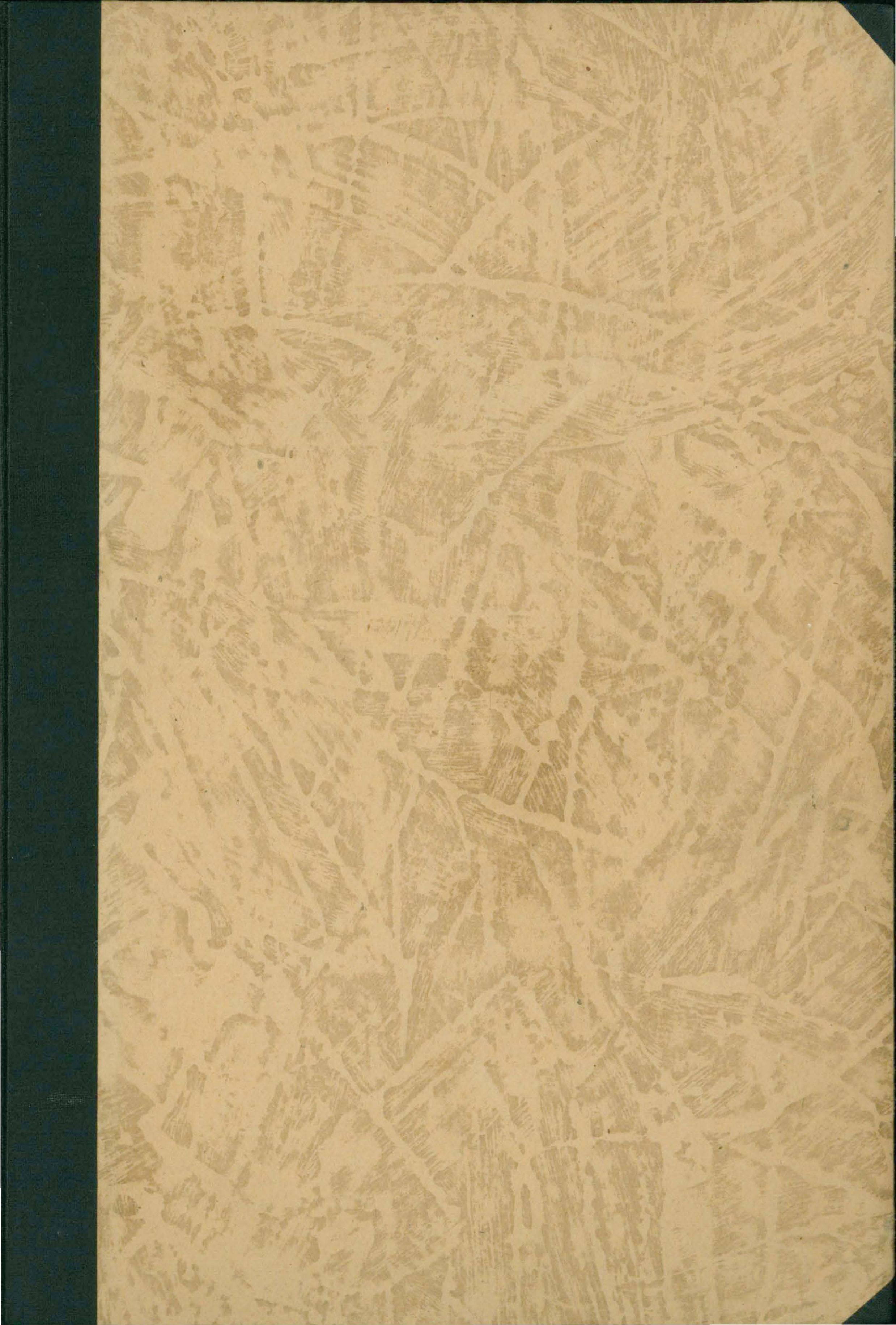


Philipp Lenard

Deutsche Physik

2. Band

Deutsche Physik

in vier Bänden

Von

Philipp Lenard

in Heidelberg

Erster Band: Einleitung und Mechanik
Zweiter Band: Akustik und Wärmelehre
Dritter Band: Optik und Elektrizitätslehre 1. Teil
Vierter Band: Elektrizitätslehre 2. Teil



J. F. Lehmanns Verlag / München-Berlin

Deutsche Physik

in vier Bänden

Von

Philipp Lenard

in Heidelberg

Allen, die in wohlgegründeter Naturerkenntnis ihre geistige Ruhe suchen, zur Freude geschrieben.

Zweiter Band:

Akustik und Wärmelehre

Mit 88 Abbildungen

Dritte, vermehrte Auflage



J. F. Lehmanns Verlag / München-Berlin 1943

Druck von Dr. F. P. Datterer & Cie., Freising-München.
Printed in Germany.

Inhalt des zweiten Bandes.

Seite

Akustik oder die Lehre vom Schall und von den Wellen.

Wärmelehre.

Anhänge zur Akustik.

Anhänge zur Wärmelehre.

külen. Innerer Zustand eines Gases beschrieben durch Komplexionen. Beispiel eines Gasvolums mit nur 7 Molekülen. Permutationen der Komplexionen. Ergebnisse für beliebig große Molekülzahlen. Geringe Wahrscheinlichkeiten von Geschwindigkeitskomplexionen, die von gleichförmiger Verteilung sehr abweichen. Wachsen der Wahrscheinlichkeit ausgehend von nichtumkehrbaren Zuständen. Zusammenhang von Entropie und Zustandswahrscheinlichkeit. Berechnung für Gase und Ermittelung der Konstante von Boltzmann's Gleichung. Anwendung zur Untersuchung der Strahlung des schwarzen Körpers. Quantenmäßiges Arbeiten der Atome und Moleküle.

Bei den in allen vier Bänden zahlreichen, meist in Klammern gesetzten Hinweisen bedeutet:

M = Mechanik (Bd. I),
A = Akustik (Bd. II),
W = Wärmelehre (Bd. II),
O = Optik (Bd. III),
E = Elektrizitätslehre (Bde. III und IV).

Die Zahlen bedeuten stets Absatznummern. Hinweise ohne Buchstaben beziehen sich auf denselben Teil.

Im Nachschlageverzeichnis (Bd. IV) der zweiten Auflage sind für den vorliegenden Band die Seitenzahlen meist gültig geblieben, nur in seltenem Falle sind sie um 1 zu erhöhen.

Akustik

oder

die Lehre vom Schall und von den Wellen.

1. Schall und Schallempfindung. — Schall bedeutete ursprünglich das Hörbare, durch das Ohr Wahrnehmbare. Dabei ist schon die notwendige Unterscheidung gemacht zwischen dem Hören, d. i. der Schallempfindung, und dem Schall selbst. Die Schallempfindung ist ein Vorgang in uns; der Schall — der Gegenstand unserer Untersuchung — ist ein Vorgang außer uns, der unabhängig von uns abläuft, der aber, an uns herankommend, die Schallempfindung hervorrufen kann. Was von einer angeschlagenen Glocke ausgeht und nach eigenem Gesetz durch die Luft zieht, gleichgültig ob ein hörendes Ohr da ist oder ob nicht, dies ist der Gegenstand unserer Untersuchung.

Man kann auch sagen: „Schall ist die normale Ursache von Schallempfindung." Es gibt auch abnorme Ursachen, z. B. Krankheitsvorgänge im Ohr, die uns Schall vortäuschen. Man hat dann Schallempfindung ohne Schall. Derlei Eigentümlichkeiten der Sinnesorgane muß man kennen um Fehlschlüsse zu vermeiden; es ist das bei allen Sinnesorganen, Ohr, Auge usw., nötig und für den Naturforscher höchst wesentlich. Der nicht unmittelbare Verlaß auf die Sinnesorgane ist aber dem geborenen Naturforscher selbstverständlich, und wir beschäftigen uns hier nicht weiter mit Sinnestäuschungen.

Was der Schall ist, weiß man mit aller Sicherheit: Er ist eine Erzitterung der Luft. Schall geht auch immer von zitternden, von schnell schwingenden Körpern aus. Diese bringen auch die Luft zum Erzittern, zuerst in ihrer Nähe, und von da aus immer weiter fortschreitend. Dies dachte schon Leonardo da Vinci (um 1500) nach Beobachtungen an Wasserwellen. Kommen die Erzitterungen aus der Luft in unser Ohr bis zu dessen feinen Bestandteilen, so hören wir. Um aber diese Empfindung hervorzubringen, dürfen die Erzitterungen weder zu schnell noch zu langsam sein. Das Gehörorgan hat hierin seine Grenzen. Erfolgen mehr Hin- und Hergänge in der Sekunde als 20000 oder weniger als 10, so hören wir nichts (48). Doch lassen wir uns von Grenzen der Sinnesorgane nicht einmal in der Namengebung wesentlich beeinflussen; wir nennen im allgemeinen alle sich ausbreitenden Erzitterungen in der Luft oder auch in anderen materiellen Stoffen „Schall", auch wenn sie für das Ohr zu schnell oder zu langsam sind. Man hat in solchen Fällen eben Schall ohne Schallempfindung, unhörbaren Schall. Es gibt auch unsichtbares Licht (W 156, O 98).

2. Inhalt der Akustik. — Wir haben somit in der Akustik schwingende Bewegungen der Materie zu behandeln, und wir befinden uns daher immer noch in der Mechanik. Man kann die Akustik auch besondere Mechanik der schwingenden Bewegungen der Materie und der Ausbreitung von Schwingungen in materiellen Körpern nennen. Zu den beiden Aufgaben, die Schwingungen und die Ausbreitung zu behandeln, kommt noch eine dritte: das Ohr zum Studium dieser Vorgänge richtig verwerten zu lernen.

Da die Schwingungen an sich, wie sie in den Schallquellen vorkommen, grundsätzlich nichts Neues bieten gegenüber dem beim Pendel schon Gefundenen (M 161 u. f.), so beginnen wir mit dem Studium der Ausbreitung von Schwingungen, als dem für die Akustik charakteristisch neuartigen Problem. Man nennt eine solche Ausbreitung „Welle". Wellen kommen auch sonst vielfach vor, nicht nur als Schall, und wir behandeln in der Akustik sogleich umfassend alles Wesentliche, was bei solcher Ausbreitung irgendwelcher Art sich zeigt. Das Ohr ist ein so hervorragend geeignetes Organ zum Studium von Wellen — wenn man nur erst seine Eigentümlichkeiten kennt —, daß die Fülle der am Schall gemachten Erfahrungen am besten unsere Kenntnisse von den Eigenschaften aller Wellen sichert. Die Beobachtungen an anderen Wellen — Wasserwellen, Lichtwellen — zeigen charakteristische Übereinstimmung aller Wellen.

Nach dem allgemeinen Studium der Wellen wenden wir uns zu der für die Verfeinerung dieses Studiums wesentlichen, richtigen Deutung der Schallempfindungen, und zum Schluß behandeln wir die Schallquellen.

Es genügt vorerst die Überzeugung, daß alle Schallquellen schwingen; man kann das oft durch Anfassen mit den Fingern sehr einfach feststellen. Die Empfindlichkeit des Ohres ist aber so groß, daß man sehr wohl die Töne von Schallquellen hören kann, deren Amplituden nur mit stark vergrößerndem Mikroskop feststellbar sind.

I. Wellen.

Die Bewegungen der Luft in der Umgebung einer Schallquelle sind nicht sichtbar. Es gibt aber viele andere Fälle von Ausbreitung schwingender Bewegung, die man mit dem Auge verfolgen kann, und wir werden uns zunächst an diese Fälle halten, die auch an sich allgemeinwichtig sind und die leicht das Wesentlichste lehren.

3. Ein Beispiel sind die Wellen an Wasseroberflächen. Wir nehmen an, es sei ein kleiner Stein in ruhendes Wasser geworfen. Indem er untersinkt, nimmt er Wasser mit und hinterläßt infolgedessen eine Grube an der Wasseroberfläche, ungefähr wie es die Abb. 1a darstellt. Was dort weiter geschieht hat mit dem Stein nichts mehr zu tun, da derselbe in die Tiefe geht. Die Grube kann nicht bestehen bleiben, weil die Gleichgewichtsform der Oberfläche eben ist. Das Wasser wird also in der Grube nach aufwärts gehen, trägheitshalber dann einen Berg bilden (x in Abb. 1b), wieder zur Ebene zurückkehren, vielleicht auch darüber hinausgehen und so im allgemeinen mehrere Male auf- und abschwanken, allerdings mit abnehmender Amplitude.

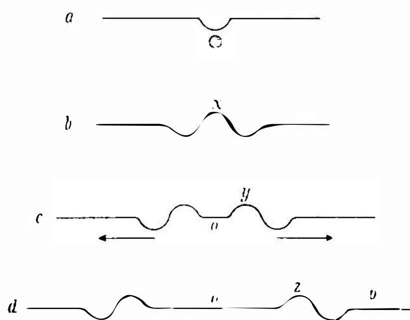


Abb. 1. Wasserwelle, durch fallenden Stein erregt (schematisch).

Wir nehmen an, daß schon nach dem ersten Absinken des Berges x wieder Ruhe am Orte des Steinauftreffens eintrete, so daß dort dann die Wasseroberfläche eben bleibt. Es kommt uns darauf an, zu betrachten, was in der Umgebung dieses Ortes geschieht. Der Berg x entnimmt sein Wasser dieser Umgebung; es bildet sich dementsprechend rings eine kreisförmige Vertiefung um ihn aus, ungefähr wie es Abb. 1b darstellt. Aber auch diese Vertiefung kann nicht bleiben; sie füllt sich vom weiter abliegenden Wasser und wird dadurch rings weiter nach außen hin übertragen, während ihr der Wasserberg nachfolgt, entstanden durch die in der Mitte eintretende Einebnung und durch die Trägheit des im Hinaufgehen befindlichen Wassers. Dies gibt den in Abb. 1c dargestellten Zustand: ein kreisförmiges Tal mit nachfolgendem kreisförmigen Berg um den Mittelpunkt o. Dieses Gebilde wandert nun dauernd weiter in Richtung der Pfeile, wobei die Kreise sich dehnen, wie es Abb. 1d in einem weiteren Augenblicksbild darstellt. Die Mitte bleibt eben und unbewegt zurück; wir hatten es von vornherein angenommen, daß dort nur ein einmaliges Hinunter-, dann Hinaufgehen und danach Ruhigbleiben des Wassers eintrete.

Das hier vom Mittelpunkt kreisförmig auseinanderlaufende Gebilde ist Bei-

spiel einer Welle. Den Körper, an oder in welchem eine Welle läuft — hier das Wasser — nennen wir das „Medium" der Welle.

Die Wellenkreise auf Wasser sind sehr bekannt. Doch sind Wasserwellen keineswegs etwas besonders Einfaches; sie gehören sogar wohl zu den verwickeltsten Wellengebilden; wir behandeln sie deshalb erst später eingehend (12 u. f.). Eines aber, was allen noch zu betrachtenden Wellen gemeinsam ist, und was auch diese bekannten Wasserwellen zeigen, sei hier an diesen sogleich hervorgehoben: Jeder Teil des Mediums, an welchem eine Welle vorbeizieht, gerät in dieselbe Bewegung, die zuerst am Ursprung der Welle stattgefunden hat. Kommt die betrachtete Wasserwelle am Punkte p (Abb. 1d) vorbei, so wird derselbe zuerst sinken müssen, weil das Tal an ihn kommt, dann steigen, weil der Berg dorthin kommt, und zuletzt wieder ruhig in der Oberflächenebene bleiben; dies ist aber genau die Bewegung, die wir am Ursprung der Welle, bei o, angenommen haben.

Man kann auch sagen: Es finden sich in der Welle räumlich nebeneinander dieselben Zustände verteilt — Tal, dann Berg, dann Ebene in unserem Falle —, die zeitlich nacheinander am Ursprung und auch an jeder Stelle sich finden, wo die Welle vorbeizieht. Dies gilt für alle Wellen.

4. Seilwellen. — Einen einfachen Wellenvorgang erhält man, wenn ein horizontal ausgespanntes Seil an einem Ende einen kurzen Schlag erhält, so daß dort plötzlich eine Einbuchtung entsteht (Abb. 2a), mit der es dann sich selbst überlassen bleibt. Statt des Seiles kann auch besonders gut ein Kautschukschlauch dienen. Man beobachtet dann, daß die Einbuchtung oder das „Tal" am Seil oder Schlauch entlangläuft, wie es die Abb. 2a—d in einigen Augenblicksbildern darstellen.

Das Medium, in oder an welchem die Welle läuft, ist hier linear; es ist überhaupt nur die eine, durch das Seil vorgegebene Laufrichtung der Welle möglich.

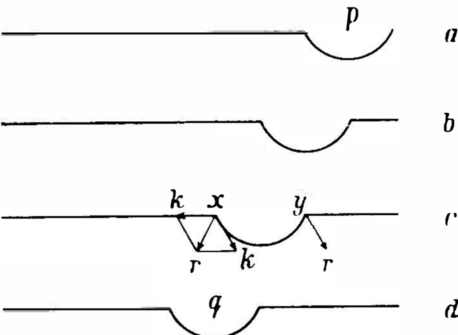


Abb. 2. Seilwelle.

Man sieht an diesem einfachen Falle wohl am besten folgende, für alle Wellen geltende Tatsachen:

1. Die Welle schreitet mit bestimmter, dem Medium eigener Geschwindigkeit vor; sie hat ihre besondere „Fortpflanzungsgeschwindigkeit", „Ausbreitungsgeschwindigkeit" oder „Laufgeschwindigkeit". Dieselbe ist bei den Seilwellen gewöhnlich größer als bei den vorher betrachteten Wasserwellen.

2. Es ist aber nicht die Körpermasse des Mediums, die mit dieser Geschwindigkeit bewegt ist; sondern es ist nur die Gruppierung seiner Teile. Nur die Form, nicht der Stoff des Mediums ist fortbewegt. Beim Seil ist es unmittelbar gewiß, daß nicht die Teile des Seiles von p nach q wandern (Abb. 2), sondern daß nur die eingebuchtete Form erst bei p und später bei q sich findet. Aber auch bei den Wasserwellen ist es keineswegs etwa dasselbe

Wasser, das als Berg von x nach y und z wanderte (Abb. 1b—d), sondern nur die Bergform wandert über das Wasser.

3. Was die Teile des Mediums wirklich machen, ist nur dies: daß jeder in Fortpflanzungsrichtung folgende Teil dieselbe Bewegung ausführt wie sein vorhergehender Nachbar, jedoch mit Verspätung. So kommt es, daß schließlich auch an entfernten Stellen dieselbe Bewegung auftritt, die zuerst am Ursprung der Welle vorhanden war, wie wir es schon bei der Wasserwelle bemerkt hatten (3). Bei der betrachteten Seilwelle in Abb. 2 ist diese Bewegung eine einfache, kurze Zuckung nach unten.

Die Verspätung in der Nachahmung der Bewegung seitens der Nachbarteile bedingt die bestimmte, endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle; ohne diese Verspätung wäre die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich groß.

4. Aus dieser Bewegungsart der Teile des Mediums — Nachahmung des Vorgängers mit Verspätung — folgt, was wir auch schon bei der Wasserwelle sahen, daß in jeder Welle räumlich nebeneinander dasselbe zu finden ist, was zeitlich nacheinander am Ursprung der Welle vorgegangen ist. Es mögen diese Vorgänge Lagen, Geschwindigkeiten oder irgendwelche andere Zustände betreffen; immer zeigt eine Welle räumlich verteilt, was zeitlich verteilt am Ursprung war. Will man die Zustände in richtiger Reihenfolge haben, so muß man der Laufrichtung der im Augenblicksbild gegebenen Welle entgegengehen, oder man muß die Welle selbst an sich vorbeilaufen lassen.

5. Wellenzüge. — Wellen können sehr verschiedene Formen haben, auch bei demselben Medium. So könnte beispielsweise durch einen Schlag nach oben, statt nach unten, ein Berg am Seile in Gang gesetzt werden statt des soeben betrachteten Tales.

Findet am Ursprungsort eine bestimmte Bewegung in regelmäßiger Wiederholung statt, so entsteht ein Wellenzug.

Am Seile kann ein Wellenzug durch wiederholtes Hin- und Her-Bewegen — Schütteln — des Endes hervorgebracht werden. Folgendes ist der Vorgang (Abb. 3): Zur Zeit 0 (Abb. a) ist der Endpunkt p noch in Ruhe; in den Zeiten T/4 bis T und 2T nimmt er bei abwechselndem Hinunter- und Hinaufbewegen die weiter in den Abb. b—f sichtbaren Lagen ein. Während p in der Zeit von 0 bis T/4 herabgeht, folgt ein Teil des Seiles mit; bis T/2 ist die Einbuchtung am Seile mit der einer Welle im gegebenen Fall eigenen Geschwindigkeit weitergewandert, und ein ganzes Tal ist entstanden während p wieder in der ursprünglichen Lage angekommen ist. Zur Zeit 3T/4 ist p oben, und es ist der Anfang eines Berges hinter dem voranlaufenden Tal entstanden. Zur Zeit T

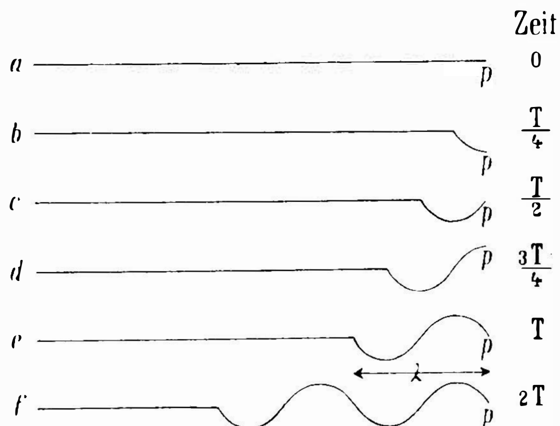


Abb. 3. Entstehung eines Wellenzuges.

ist der Berg fertig; eine Welle mit Tal und Berg ist entstanden und läuft fort. Was ihr von p aus nachfolgt kann nur Wiederholung des schon Betrachteten sein, weil p seine Bewegung wiederholt. So wie in der Zeit 0 bis T die eine Welle mit Tal und Berg entstanden ist, folgt von T bis 2T eine zweite gleiche, eben fertig gewordene, ihr nach (Abb. f). So entsteht weiter ein beliebig langer Wellenzug; während jeder Schwingungsdauer oder „Periode" T kommt eine neue Welle von der Länge λ (Abb. e) hinzu.

Faßt man einen beliebigen Punkt am Seile ins Auge, so wandert an diesem der Wellenzug wie ein unveränderliches Gebilde vorbei, und zwar rückt er in der Zeit T um die Länge λ vor. Die Geschwindigkeit dieser Wanderung im Medium, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der Welle, ist — wie jede Geschwindigkeit — als Quotient von Weg λ und der dazugehörigen Zeit, T, zu berechnen: es ist

$$v = \frac{\lambda}{T} \,. \qquad 5)$$

Dies ist der wichtige, oft gebrauchte Zusammenhang der drei Größen: Fortpflanzungsgeschwindigkeit v, Wellenlänge λ, Schwingungsdauer T. Er beruht allein nur auf der Zusammengehörigkeit von λ und T als Weg und Zeit und war in dieser Weise schon von Newton erkannt. Kennt man 2 der 3 Größen, so ist die dritte somit berechenbar. Beispielsweise ist bei gegebener Fortpflanzungsgeschwindigkeit v sogleich zu schließen, daß schnelle Schwingungen (kleine Schwingungsdauern T) kurze Wellen (kleine Wellenlängen λ), langsame Schwingungen lange Wellen geben müssen. Man kann das leicht an Seilwellen bestätigt sehen; es gilt aber auch für Wasserwellen und alle anderen Wellen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist Mediumseigenschaft. Sie gilt relativ zum Medium, weil der Maßstab für die Länge der Welle am Medium festliegend gedacht ist[1]).

Eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat nicht nur der Wellenzug, sondern sie ist auch jeder Welle beliebiger Form eigen. Wellenlänge und Schwingungsdauer sind dagegen Größen, die nur auf Wellenzüge sich beziehen. Gleichung 5 ist charakteristisch für alle Wellenzüge beliebiger Art.

Es sei noch bemerkt, daß die Ausdrücke Amplitude (volle Schwingungsweite) und Elongation (augenblickliche Ausweichung) für die Mediumsteile bei Wellen aller Art in Gebrauch sind und zwar im selben, unmittelbar verständlichen Sinne wie beim Pendel. Ebenso werden bei Wellenzügen, wo regelmäßig hin- und hergehende Bewegung sich findet, aber auch bei Einzelwellen, die durchlaufenen Zustände als „Phasen" bezeichnet, wie beim Pendel (M 164). Eine Fläche, deren Punkte sämtlich gleiche Phasen haben, was bei räumlicher Ausbreitung von Wellen vorkommt, wird „Wellenfläche" oder „Wellenfront" genannt.

Wellenlänge λ ist stets der Abstand irgendeines Punktes im Wellenzug vom nächsten mit gleicher Phase (gleichem Zustand). Von Wellenlänge zu Wellenlänge findet man die Wiederholung gleicher Zustände.

6. Bewegungszustände in einer Sinuswelle. — Abb. 4b zeigt die gewöhnliche, einfachste Form eines Seilwellenzugs, der entsteht, wenn ein Ende

---

[1]) Man sieht dies auch bei der Rechnung mit Wellen im Anhang zur Akustik I zur Geltung kommen.

des Seiles in Pendelbewegung versetzt ist. Da diese Bewegung auch Sinusbewegung genannt wird (M 168), heißt die so entstandene Welle „Sinuswelle“ (auch „harmonische Welle“).

Findet am Ursprungsort nicht Pendelbewegung sondern eine andere Bewegung statt, so entstehen entsprechend anders geformte Wellen, worauf wir später eingehen (60). Alles allgemein für Wellen Wesentliche ist aber vollkommen und am besten an Sinuswellen erkennbar, die auch als Grundbestandteile aller anders geformten Wellen sich zeigen (64).

Die Sinuswelle am Seil ist dabei nur ein Beispiel für Sinuswellen überhaupt; jede Welle beliebiger Art, bei welcher die Zustände der Mediumsteile zeitlich und räumlich so verteilt sind, wie die Verschiebungen am hier betrachteten Seil, ist eine Sinuswelle mit allen ihren charakteristischen Eigenschaften.

Es sind in Abb. 4b die augenblicklichen Bewegungszustände — Phasen — einer Punktreihe, an welcher eine Sinuswelle vorbeizieht, mit Lage und Geschwindigkeit angegeben; die ruhende Punktreihe ist in a dargestellt; die Pfeile

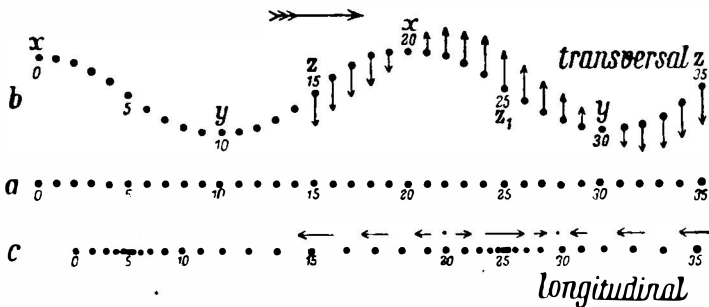


Abb. 4. Quer- und Längswellen (transversal und longitudinal).

in b zeigen die Geschwindigkeiten an. Von x bis x (Berg zu Berg) ist eine Wellenlänge, ebenso von y bis y (Tal zu Tal), sowie von z bis z; denn diese Punktpaare haben jeweils gleiche Phase. Von z bis z_1 ist eine halbe Wellenlänge; diese Punkte haben zwar beide gleiche Lage (Ruhelage), aber sie haben entgegengesetzte Geschwindigkeiten, daher nicht gleiche sondern entgegengesetzte Phasen. „Entgegengesetzt“ (genauer: „entgegengesetzt gleich“) werden die Phasen genannt, wenn ihre Übereinanderlagerung — ihr gleichzeitiges Vorhandensein an einem Punkte — Ruhezustand ergäbe. Ebenso ist es bei den Punktpaaren x und y, sie haben ebenfalls entgegengesetzte Phasen. Überhaupt finden sich in Abständen von ½ Wellenlänge überall in einer Sinuswelle entgegengesetzt gleiche Phasen.

Man erhält die in der Abb. 4b angegebenen Lagen und Geschwindigkeiten der Punkte und damit auch die Wellenform, wenn man jeden der Punkte Pendelbewegung machen läßt, jedoch jeden nach rechts hin folgenden Punkt um $^1/_{20}$ Schwingungsdauer später beginnend. Derartiges gilt ganz allgemein bei allen Wellen (4). Die Welle läuft dementsprechend hier von links nach rechts, wie es der Pfeil oben in der Abbildung angibt. Man sieht dies auch aus den eingetragenen Geschwindigkeiten; es muß z. B. der Berg x nach rechts vorrücken, weil die rechts von ihm befindlichen Punkte in Aufwärtsbewegung begriffen sind; ebenso muß an die Stelle z demnächst ein Tal kommen, weil dort schon Abwärtsbewegung vorhanden ist. Die Größe v der Fortpflanzungsgeschwindigkeit wäre, da die Wellenlänge λ gegeben ist, nach Gl. 5 angebbar, sobald die Schwingungsdauer T bekannt ist.

7. Mechanismus der Wellenausbreitung. — Man kann nun fragen, warum in den Wellen jeder Nachbarteil des Mediums die Bewegung seines Vorgängers nachahmt und warum mit Verspätung (4). Die Ursachen liegen immer im Zusammenwirken von Kräften und Massen nach dem Grundgesetz aller Bewegung (M 115), nur sind die Kräfte je nach der Wellenart verschiedenen Ursprungs (9).

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall der Seilwellen, an dem alles Wesentliche auch für andere Wellen klar wird. Wenn das Tal am Seil an den Punkt x (Abb. 2 c) gekommen ist, so wirken auf das dort gelegene Seilstück die beiden Kräfte k, die gleich sind der Kraft, mit welcher das ganze Seil gespannt ist. Diese Kräfte bilden bei x einen Winkel miteinander, weil dort das Seil geknickt ist; sie geben daher die Resultierende r, und diese beschleunigt die Seilmasse bei x aus der bisherigen Ruhe nach unten. Dies ist die Ursache der Herabbewegung von x und damit des Weiterwanderns des Tales nach q (Abb. 2 d). Eine ebensolche Kraft r wirkt auch am anderen Ende des Tals, bei y; aber sie trifft dieses Ende nicht in Ruhe, sondern in der Aufwärtsbewegung, welche Folge ebensolcher, im Tale nach oben gerichteter Resultierenden ist; die Kraft bei y hat daher nur die Wirkung, y zur Ruhe zu bringen. Daher das einseitige Weiterwandern des Tals, nur in Fortpflanzungsrichtung.

8. Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. — Man sieht aus Vorigem, ebenso wie auch aus dem an den Wasserwellen Bemerkten (3), schon die Bedingung, welcher ein materielles[1]) Medium genügen muß, damit es Wellen fortpflanzt: Die Verrückung jedes Mediumsteiles muß Kräfte hervorrufen, die nicht nur diese Verrückung rückgängig machen, sondern auch die Nachbarteile ergreifen. Von der Größe dieser Kräfte und von den Massen der Teile hängt nach dem Grundgesetz aller Bewegung die Beschleunigung ab, mit welcher die Nachbarteile folgen, wodurch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle (4) bedingt ist. Diese Geschwindigkeit wird danach um so größer sein müssen je größer die wirksamen Kräfte und je kleiner die Massen des Mediums sind. Die Durchführung der zugehörigen Rechnungen[2]) in den verschiedenen Fällen verschiedenartiger wirkender Kräfte ergibt als allgemein, für alle Wellen gültige Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v

$$v = \sqrt{\frac{\text{Kraftmaß}}{\text{Massenmaß}}} \,. \qquad 8)$$

Hierbei ist in jedem besonderen Falle noch nötig zu wissen, was als Maß der im Medium wirkenden Kräfte und was als Maß der Massen des Mediums einzusetzen sei.

Für die bereits ausführlich betrachteten Seilwellen (4, 7) ist ersichtlich, daß die Kräfte von der Spannung kommen, unter der das Seil an seinen Enden gehalten wird; diese Kraft ist überall am ganzen Seil wirksam, und sie gibt die Resultierenden, welche die Teile des Seiles an den gebogenen Stellen bewegen, wie vorher überlegt (7). Diese spannende Kraft ist dementsprechend hier das richtige Kraftmaß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Das Massenmaß ist die Masse der Längeneinheit des Seiles. Der Quotient aus beiden hat die Einheit eines Geschwindigkeitsquadrates[3]), wie es sein muß, damit die Wurzel eine Geschwindigkeit ergibt. Es gilt also für Seilwellen

$$v = \sqrt{\frac{\text{spannende Kraft}}{\text{Längeneinheitsmasse}}} \,. \qquad 8a)$$

9. Einteilung der Wellen nach den wirkenden Kräften. — Bei den Wasserwellen sahen wir die Schwere des Wassers wirksam bei Einebnung eines

[1]) Das Besondere zu den Wellen im Äther bringt O 1—4 und E 410—436.
[2]) Siehe Anhänge zur Akustik III, IV, V, VI.
[3]) cm^2/sek^2, wenn alles in cm, gr, sek gemessen war. Vgl. die Einheiten M 67, 131.

vorhandenen Tales oder Berges unter Miteinbeziehung der Nachbarschaft (3); es sind dies also Schwerewellen oder Gravitationswellen.

Es ist aber auch noch eine andere Kraft vorhanden, die ganz das gleiche bewirkt, nämlich die Oberflächenspannung der Flüssigkeit (M 317 u. f.); auch sie macht die verbogene Oberfläche eben und muß dazu Nachbarteile mit verschieben. Somit gibt es an der Oberfläche von Flüssigkeiten auch noch die gleichzeitige Möglichkeit von Oberflächenspannungs- oder „Kapillar"-Wellen. Wegen der verschiedenen Kraftart müssen diese Wellen auch eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben als die Schwerewellen, worauf wir zurückkommen (13). Man sieht, daß Flüssigkeitswellen nichts einfaches sind.

Die Seilwellen gehören zur sehr großen Gruppe der elastischen Wellen. Denn es ist die elastische Dehnung (M 257 u. f.), welche die wellentreibende, spannende Kraft (8) in der ganzen Länge des Seiles wirksam macht.

Andere elastische Wellen betrachten wir alsbald (11); auch die Schallwellen der Luft gehören zu ihnen.

10. Querwellen und Längswellen. — Eine andere Einteilung der Wellen besteht in ihrer Unterscheidung nach der Bewegungsrichtung der Teile des Mediums. Steht diese Bewegungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, so wird die Welle quer oder transversal genannt; fällt die Bewegungsrichtung in die Linie der Fortpflanzungsrichtung, so wird die Welle längs oder longitudinal genannt.

Wir haben an Abb. 4b eine Querwelle bereits eingehend betrachtet und zwar am Beispiel eines queren Sinuswellenzuges (6). Man lasse nun die ganze Punktreihe, welche in Abb. 4a in Ruhe dargestellt ist, dieselbe Pendelbewegung ausführen wie in b, jedoch nicht quer, nach oben und unten, sondern längs, nach rechts und links, so erhält man die Längswelle. Abb. 4c zeigt sie im Augenblicksbild, wieder am Beispiel eines Sinuswellenzuges. Man erhält dieses Bild c aus b, wenn man jede Verschiebung aus der Ruhelage, die in b nach oben aufgetragen ist, in gleicher Größe nach rechts aufträgt, und die in b nach unten aufgetragen ist, nach links; auch für die Geschwindigkeiten, die in c über die Punktreihe gezeichnet sind, gilt bei gleichbleibender Größe jetzt Richtung nach links statt nach unten und nach rechts statt nach oben.

Man sieht, daß die Längswelle keine Berge und Täler hat, wie es auch nicht anders sein kann, wenn die Bewegung der Teile nur in der Fortpflanzungslinie stattfindet. Dagegen treten als charakteristisch für die Längswellen Verdichtungen und Verdünnungen auf, die in Abb. 4c beim Vergleich mit a deutlich sichtbar sind.

Außer der Verschiedenheit der Bewegungsrichtung der Teile gilt bei den Längswellen alles wie bei den Querwellen. Wellenlänge λ ist auch beim Längswellenzug der kleinste Abstand zweier Stellen gleicher Phase, am besten ersichtlich als Abstand von Verdichtung zu Verdichtung. Ist T die Schwingungsdauer, v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so gilt wieder $v = \lambda/T$ (5). Der ganze Bewegungsvorgang besteht wieder darin, daß jeder Mediumsteil dasselbe macht wie sein Nachbar, nur mit Verspätung (4). In der longitudinalen Sinuswelle, wie in Abb. 4c, schwingt jeder Teil wie eine Pendelkugel um seine festliegende Gleichgewichtslage, und die Verspätung der Nachbarn (je $^1/_{20}$ Schwingungsdauer in der Abbildung) macht es, daß die Verdichtungen und Verdünnungen entstehen und mit der Geschwindigkeit v weiterwandern. Man sieht auch aus den in der Abb. c angegebenen Geschwindigkeiten des Augenblicks, daß sowohl die Verdünnung als die Verdichtung im Wandern nach rechts begriffen sein muß (vgl. 6).

11. Beispiele von Längswellen. — Wenn ein Eisenbahnzug, stehend, von einer heranfahrenden Lokomotive einen Stoß erhält, der zunächst den ersten Wagen trifft, so macht der getroffene Wagen einen Ruck in Anfahrtsrichtung der Lokomotive, und dieser Ruck pflanzt sich von Wagen zu Wagen durch den

ganzen Zug fort. Dies ist eine Welle; denn jeder Nachbarteil (Wagen) macht dasselbe wie sein Vorgänger, nur mit Verspätung, und es ist eine Längswelle; denn die Bewegung (der Ruck) der Teile findet in der Linie der Fortpflanzung statt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt wieder von den Kräften und Massen ab. Die Kräfte liegen hier in den federnden Koppelungen der Wägen; die Massen liegen in den Wägen selbst. Da bei geladenen Wägen die Massen sehr groß sind, im Verhältnis zu den Kräften, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in diesem Falle klein, so daß man leicht sehen kann, wie jeder Wagen seinen Ruck etwas verspätet macht.

Ganz dieselbe Bewegung, wie an dem Eisenbahnzug, findet man auch an der Kugelreihe der Abb. 64 der Mechanik, wenn dieselbe von der Kugel 1 gestoßen wird. Jede Kugel macht einen kleinen Ruck und gibt ihn nach rechts weiter; die letzte Kugel fliegt ab, weil sie an keine weitere stößt, die ihre Energie aufnähme[1]). Wir haben die Stoßerscheinungen bereits sowohl nach allgemeinen mechanischen Gesetzen als auch im einzelnen betrachtet (M 278, 279); man sieht hier, wie eine Reihe von Stoßvorgängen eine Welle ergibt.

Eine ebensolche longitudinale Welle läuft aber auch durch einen ununterbrochenen Stab elastischen Stoffes, wenn er am einen Ende einen längsgerichteten Stoß erhält. Die Bewegung der einzelnen Querschnitt-Schichten des Stabes ist dabei wieder dieselbe wie die der Wägen des gestoßenen Eisenbahnzuges, nur daß hier Massen und Kräfte nicht gesonderte Sitze haben, sondern beide ganz gleichmäßig über alle Schichten verteilt sind. Die Geschwindigkeitsberechnung einer solchen longitudinalen Stabwelle aus Kraft und Masse erfolgt wieder (8) nach dem Grundgesetz aller Bewegung (M 116)[2]). Es ergeben sich hier in den gewöhnlichen festen Körpern sehr große Geschwindigkeiten (17, 39). Ist das Ende eines Stabes pendelförmig in Richtung seiner Länge erschüttert, so ist die Bewegung seiner Schichten genau die an der Punktreihe Abb. 4c schon betrachtete (10).

Ein weiteres, besonderes Beispiel von Längswellen sind auch die Schallwellen in der Luft. Die Schichten der Luftstrecke, längs welcher Schall läuft, machen ganz die eben gedachte Bewegung der Schichten des gestoßenen oder vom Ende aus erzitternden Stabes. Mit dieser Bewegung hat also die Akustik hauptsächlich zu tun. Es seien vor dem gänzlichen Eingehen auf die Schallwellen (18) noch einige andere Wellenvorgänge betrachtet.

Flüssigkeitswellen.

12. Oberflächenwellen, getrieben durch die Schwere. — Diese Wellen sind an den vielen Wasseroberflächen der Erde alltäglich und auch allgemein-wichtig; daß sie wenig einfacher Art sind, wurde bereits bemerkt (3).

Sind die Amplituden klein im Verhältnis zur Wellenlänge, was der gewöhnliche Fall ist, so beschreiben die Flüssigkeitsteile an der Oberfläche Kreise. Man kann das an aufgeschwemmten, in der Flüssigkeit schwebenden Partikeln bei Wellen in Glaströgen feststellen. Der Radius der Kreisbahnen der Oberflächenteile ergibt die Amplitude der Welle, unmittelbar sichtbar als Höhe der

[1]) Wenn 3 Kugeln stoßen, wie in Abb. 64 unten, so ist zu denken, daß diese ihre Stöße sehr schnell nacheinander ausüben und daß ebenso schnell nacheinander die 3 Kugeln am anderen Ende der Reihe abfliegen.

[2]) Die Durchführung der Rechnung findet sich im Anhang zur Akustik unter III.

Berge und Tiefe der Täler. Jeder in Laufrichtung der Welle folgende Flüssigkeitsteil ist in seiner Kreisbahn verspätet gegen den Vorgänger, wie es allgemeiner Welleneigenschaft entspricht (4). Es ergibt sich daraus die Wellenform, wie in Abb. 5; die Verspätung beträgt hier für jeden der gezeichneten Teile $^1/_8$ Kreisumfang. Man sieht, daß Berge und Täler hier nicht gleichgeformt sind; die Berge sind spitzer, die Täler flacher. Dies ist als charakteristisch an allen

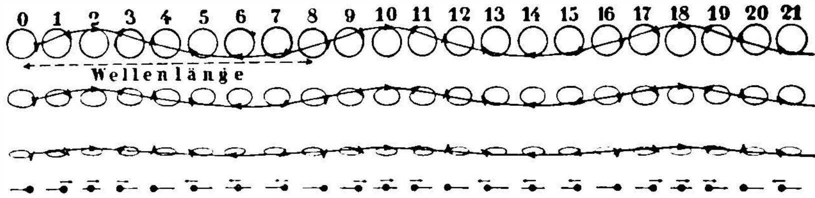


Abb. 5. Wasserwelle.

Wasserwellen zu bemerken. An den Bergen laufen die Teile in Fortpflanzungsrichtung; in den Tälern weichen sie zurück.

Die Kreisbahn verschiebt die Teile sowohl longitudinal als transversal. Diese Flüssigkeitswellen sind also weder reine Längs- noch reine Querwellen; sie sind beides zugleich. Wie es zu den Längsbewegungen der Wasserteile beim Fortschreiten der Welle kommt, haben wir bereits früher erläutert (3). Schon Newton war die Kreisbewegung bei den Wasserwellen bekannt.

Die Radien der Kreisbahnen der Flüssigkeitsteile nehmen von der Oberfläche aus gegen die Tiefe sehr schnell ab. Schon in der Tiefe gleich einer Wellenlänge ist die Amplitude auf $e^{-2\pi} = 1/535$ gesunken. Diese Flüssigkeitswellen sind also mit Recht „Oberflächenwellen" zu nennen; sie lassen die Tiefe so gut wie unberührt.

Ist das Wasser so seicht, daß die Bewegung merklich bis zum Boden reicht, so werden die Bahnen der Teile gegen den Boden zu elliptisch, und nahe dem Boden ist die Welle rein longitudinal, wie es Abb. 5 unten zeigt. Das unmittelbar am Boden haftende Wasser muß immer ruhen (M 400).

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerewellen der Flüssigkeiten ist bei kleinen Amplituden

$$v = \sqrt{g\lambda/2\pi}. \qquad 12)$$

Die Proportionalität mit der Wurzel aus der Wellenlänge λ hatte schon Newton gefunden; er ging dabei von der schwingenden Bewegung einer Flüssigkeit in einem U-Rohr aus, in dessen Schenkeln sie, anfänglich ungleich hoch stehend, der Schwere überlassen ist. Die Schwerebeschleunigung g unter der Wurzel ist für die Schwerewellen von vornherein zu erwarten (8); denn sie ist Quotient aus Schwerkraft und Masse (M 130). Daß noch 2π als Nenner hinzutritt, dies zeigt die eingehende Behandlung nach den für alle Flüssigkeitsbewegungen geltenden Grundgleichungen der Hydrodynamik (M 386). Dieselben ergeben z. B. auch die schon angegebene Amplitudenabnahme mit der Tiefe. Die Reibung kann bei den kleinen Amplituden außer acht gelassen werden.

Das besonders Bemerkenswerte bei der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist deren Abhängigkeit von der Wellenlänge λ. Solche Abhängigkeit kommt bei einfacheren Wellenvorgängen nicht

vor, schon gar nicht bei kleinen Amplituden, auch nicht bei den Schallwellen in der Luft. Folgende Zusammenstellung gibt einige mit $g = 9\cdot8$ m/sek² nach Gl. 12 berechnete Werte:

$\lambda =$	0·1	1	10	40	100	400 m
$v =$	0·4	1·3	4	8	13	25 m/sek.

Diese Geschwindigkeiten stimmen mit vorhandenen Messungen an Wasserwellen gut überein; Wellen von 100 m und noch größerer Länge sind auf freiem Meer zu beobachten. Daß längere Wellen schneller laufen als kurze ist leicht zu sehen, da es auf Flüssen und Seen oft vorkommt, daß verschiedene Wellenlängen gleichzeitig übereinander gelagert vorhanden sind. Man sieht dann die kürzeren Wellen auf dem Rücken der längeren zurückbleiben.

Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Wellenlänge hat auch die Bedeutung, daß eine bestimmte Geschwindigkeit überhaupt nur für (einfache) Wellenzüge angebbar ist; Wellen beliebiger Form ohne Wiederholung haben gar keine bestimmte Wellenlänge, die in der Geschwindigkeitsgleichung einzusetzen wäre.

Daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerewellen unabhängig ist von der Natur der Flüssigkeit, insbesondere von ihrem spezifischen Gewichte, wovon in der Gleichung für v nichts vorkommt, dies ist nach der Massenproportionalität der Schwere unmittelbar verständlich; es ist dasselbe wie der gleichschnelle Fall aller Körper. Es laufen also Schwerewellen von gleicher Länge auf allen Flüssigkeiten an der Erdoberfläche gleich schnell, dagegen auf anderen Planeten mit anderem g entsprechend anders, auf Jupiter z. B., mit 11·3-facher Schwerebeschleunigung, 3·3-mal so schnell als auf Erden.

Bei großen Amplituden ist die Bewegung der Teile viel verwickelter. Die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen macht hier Schwierigkeit; doch ist Zunahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Amplitude wohl sichergestellt und auch durch Beobachtungen an Meereswellen angezeigt. Die Berge der Wellen werden bei zunehmender Amplitude noch spitzer bis zum Erscheinen einer Kante, die bei weiterer Steigerung der Energie der Welle überschäumt.

13. Kapillarwellen. — Berücksichtigt man außer der Schwerkraft auch die stets vorhandene, ebenfalls wellentreibende Kraft der Oberflächenspannung (9), so ergibt sich als Fortpflanzungsgeschwindigkeit für kleine Amplituden

$$v = \sqrt{g\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{s}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}}\,. \qquad 13)$$

Man sieht aus dem Hinzutreten des zweiten Gliedes unter der Wurzel (vgl. Gl. 12) mit positivem Zeichen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wegen der hinzukommenden Kraft α vergrößert ist; das spezifische Gewicht s der Flüssigkeit war als Massenmaß im Nenner des zweiten Gliedes zu erwarten (8). Eigentümlich ist der Einfluß der Wellenlänge λ, die bei g im Zähler, bei α im Nenner vorkommt, wonach bei großen Wellenlängen das erste, bei kleinen das zweite Glied überwiegend wird. Dies bedeutet, daß für lange Wellen die Oberflächenspannung, für allerkürzeste dagegen die Schwere fast einflußlos ist. Selbst bei $\lambda = 0\cdot1$ m und noch mehr bei allen längeren Wellen ist die Oberflächenspannung bei allen Flüssigkeiten so gut wie ganz einflußlos neben der Schwere. Dagegen sind die kleinen Kräuselungen, die man oft auf Wasser laufen sieht, fast rein durch Oberflächenspannung getrieben; sie können mit Recht Kapillarwellen genannt werden. Man sieht hier wieder (M 214, 247), wie bei kleinen Körpermassen die Molekularkraft, bei großen die Schwerkraft zum Überwiegen kommt.

14. Entstehung der Oberflächenwellen. — Jeder Gegenstand, der eine Flüssigkeitsoberfläche ins Schwanken bringt, muß Wellen erzeugen, wie wir es am geworfenen Stein schon betrachtet haben (3).

Ein mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahrendes Schiff erzeugt vor sich dauernd einen Wellenberg. Ein solcher läuft daher von allen Punkten, die das Schiff passiert hat, weg mit der ihm eigenen Wellengeschwindigkeit v. Da gleichzeitig das Schiff mit seiner Geschwindigkeit w weiterfährt, ergibt sich in leicht verständlicher Weise[1]) beiderseits vom Schiff ein Wellenbergrücken („Bug-

---

[1]) Man kann hier das in der Optik erläuterte Prinzip von Huygens (O 38) beiziehen und den

welle"), der einen Winkel β mit der Fahrtrichtung macht, so daß $\sin\beta = v/w$. Ist $w < v$, so kann die Bugwelle nicht entstehen[1]).

Der Hauptursprung ausgedehnter Wellenzüge auf den Wässern der Erde ist aber der Wind. Dauernd bewegte Luft über dem Wasser formt allmählich die Oberfläche zu Bergen und Tälern, die in Windrichtung laufen. Anfangs oder bei schwachem Winde entstehen nur kurze Wellen von kleiner Amplitude; ist aber die Windgeschwindigkeit groß bei genügend langer Dauer, so wachsen die Wellenlängen und die Amplituden an. Die Grenze des Anwachsens ist erreicht, wenn die Wellengeschwindigkeit (12) gleich der Windgeschwindigkeit geworden ist. Die See ist dann „ausgewachsen". So entstehen bei Sturm auf dem Meer die 100 und mehr Meter langen Wellen von großen Amplituden. Es ist das ein Energieübergang vom Wind ins Wasser, der nach den Gleichungen der Hydrodynamik (M 386) einigermaßen verfolgt werden kann.

Ähnliches zeigt auch jede Fahne im Wind; sie flattert in Wellenform.

Auch die Grenzflächen von Luftschichten verschiedener Dichte, die in der Atmosphäre übereinander gelagert vorkommen, nehmen Wellenform an, sobald Relativgeschwindigkeit der beiden Schichten längs der Grenzfläche vorhanden ist, z. B. wenn oben Wind weht und die untere Schicht an der Erde ruht. Diese Wellen, deren Fronten senkrecht zur Windrichtung stehen, wie beim Wasser, werden sichtbar, wenn die untere Schicht wasserdampfgesättigt ist. Denn die Wellenberge werden kalt, wie es bei aufsteigender Luft stets der Fall ist (W 162); ihr Wasserdampf verdichtet sich daher zu Wolkentröpfchen, und man sieht infolgedessen die Bergrücken als parallele Wolkenstreifen am Himmel, — eine Erscheinung, die nicht selten ist. Von Streifen zu Streifen ist eine Wellenlänge. Diese Wellenlängen sind meist sehr groß, was leicht verständlich ist. Es ist nämlich in der Gleichung für v (12) der Faktor nicht zu vergessen, welchen die Schwerebeschleunigung g nach Archimedes Satz hier erhalten muß, da die schwerere Luft in der leichteren untergetaucht ist (M 309), und dieser Faktor, gegeben durch den Unterschied der beiden spezifischen Gewichte, ist hier sehr klein. Daher erreicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Luftwellen erst bei so sehr großen Wellenlängen die Windgeschwindigkeit. Je größer diese und je kleiner der Dichtenunterschied ist, desto größer müssen die Wellenlängen sein. Diese Zusammenhänge sind bei Luftfahrten zutreffend befunden worden.

15. Pulswellen. — Eine eigentümliche Wellenerscheinung ergibt sich, wenn in eine ganz von Flüssigkeit erfüllte, elastische Röhrenleitung plötzlich kurzdauernd Flüssigkeit einströmt, wie vom lebenden Herzen in die Schlagadernleitung. Es folgt dann keineswegs der ganze Inhalt der Rohrleitung gleichzeitig der Einströmung, auch entsteht keine beträchtliche Längswelle verdichteter Flüssigkeit, wenn die Rohrwand nachgiebig ist, sondern es erfolgt elastische Erweiterung des Rohres nächst der Einströmungsstelle, und diese Er-

unteren Teil von Abb. 19 dort zur Erläuterung benutzen (FF Fahrtrichtung des Schiffes, 0 . . . 4 die durchfahrenen Ursprungsorte von Wellenbergen, B4 der resultierende Wellenbergrücken).

[1]) Eine solche Welle geht auch in der Luft von Geschossen aus, die schneller als die Luftwellen (332 m/sek) laufen; sie wird gehört ehe die von der Geschützmündung ausgehende Knallwelle das Ohr erreicht. Bei den Wasserwellen ist der Vorgang verwickelter als bei den Luftwellen; ihre Geschwindigkeit v hängt von der Wellenlänge ab (Gl. 13), die sich entwickelt und die mit der Schiffsgeschwindigkeit w an Größe zunimmt. Es ist nicht ein einzelner Wellenberg, sondern ein andauernd erzeugter kurzer Wellenzug, der beiderseits hinter dem Schiff von ihm wegläuft.

weiterung, welche einen gewissen Teil der eingepreßten Flüssigkeitsmasse faßt, läuft dann als Welle am Rohr entlang. Es ist dies eine elastische Welle; sie wird getrieben von der elastischen Kraft der Rohrwand. Der einige Meter lange, weiche, dünnwandige Kautschukschlauch Abb. 6, auf dem Tisch liegend und einerseits in den Kautschukball, andererseits in das offene, vertikale Glasrohr mündend, alles bis ins Rohr mit Wasser gefüllt, zeigt die Erscheinung sehr gut. Schlägt man auf den Ball, so läuft die Welle, als Ausbuchtung sichtbar oder mit den Fingern gleich dem Schlagaderpuls fühlbar, am Schlauch entlang bis zum Glasrohr, und erst bei ihrer Ankunft dort, sehr merklich verspätet nach dem Schlag, steigt das Wasser im Rohr.

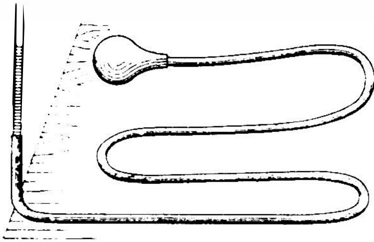


Abb. 6. Pulswelle.

Die Pulswelle ist mit schneller Vorausbewegung der Flüssigkeit an den Stellen ihres Vorbeilaufens verbunden; solcher schnellen Bewegung wirkt in engen Röhren die innere Reibung entgegen; daher kann die Welle nicht in die engen Verzweigungen der Blutgefäße dringen. Diese und die Venen schlagen nicht; sie enthalten nur den gleichmäßigen Blutstrom, welcher dem mittleren Überdruck auf der Arterienseite entspricht.

Wellen im Inneren raumerfüllender Medien.

16. Je nach Aggregatzustand verschieden. — Es erleide ein Raumelement im Inneren des Mediums eine augenblickliche Verschiebung, wie es Abb. 7 andeutet. Das Medium ist durch 3 Scharen paralleler, gleichabstehender Ebenen nach den drei Raumrichtungen in seine in Abb. 7a ersichtlichen Raumelemente geteilt, und das betrachtete, der Verschiebung ausgesetzte Element ist schwarz bezeichnet. Die Verschiebung sei nach oben gerichtet. Wir nehmen an, daß die Verschiebung keine Überschreitung der Elastizitätsgrenze im Medium bedingt, indem sie nicht zu schnell und nicht mit zu großen Kräften vor sich geht. Es folgt dann die Umgebung des betrachteten Raumelements der Verschiebung mit elastischen Verformungen, wie es Abb. 7b in vergrößertem Maßstabe zeigt. Wegen der Trägheit folgt nicht alle Umgebung, sondern die entfernteren Teile bleiben zurück; daher die Verformung der benachbarten Raumelemente. Da die Verschiebung nach oben geht, ist das obere Element gedrückt, das untere gedehnt; rechts und links tritt Verzerrung ein, wie bei der Drillung oder Scherung (vgl. M 268 u. f., Abb. 62c), ebenso vorn und hinten. Was nun zeitlich weiter erfolgt, hängt vom Aggregatzustand des Mediums ab.

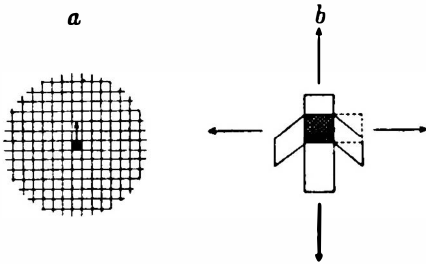


Abb. 7. Wellenentstehung im Inneren eines festen Mediums.

Ist das Medium in festem Zustand, so wecken alle diese Verformungen der Nachbarelemente elastische Kräfte, welche die Verformungen auszugleichen streben und sie dadurch weiter fortpflanzen. Das nächstobere und das nächst-

untere Element werden durch diese Kräfte ebenfalls Verschiebungen nach oben erleiden und später ebenso auch die weiteren Elemente oben und unten, d. h. es wird die Verschiebung als Welle nach oben und unten sich fortpflanzen und zwar als Längswelle, weil Verschiebung und Ausbreitungsrichtung in einer Linie liegen.

Gleichzeitig wirken auch nach den Seiten elastische Kräfte; die Verzerrungen der rechts und links sowie auch vorn und hinten gelegenen Elemente streben nach Ausgleich, wie es bei einem punktiert gezeichneten Element angedeutet ist. Dadurch pflanzt sich die ursprüngliche, nach oben gerichtete Verschiebung rings auf die weiteren Nachbarelemente fort, d. h. es geht auch nach rechts und links, vorn und hinten eine Welle vom ursprünglich verschobenen Element aus, und zwar ist es eine Querwelle, weil Verschiebung und Ausbreitungsrichtung aufeinander senkrecht stehen.

Man hat somit das Ergebnis: Im Inneren eines festen Körpers pflanzt sich eine Verschiebung sowohl als Längswelle, wie auch als Querwelle fort. Die Längswelle läuft in der Linie der Verschiebung, die Querwelle in allen Richtungen quer dazu.

Man bemerkt, daß für die Längswelle die Volumelastizität des Mediums in Anspruch genommen wird, für die Querwelle aber nur die Formelastizität; denn in Richtung der Verschiebung (oben und unten in der Abb. 7) findet Volumänderung der Elemente statt, quer dazu aber nur Formänderung wie bei der Torsion (M 272). Für die Geschwindigkeit (Gl. 8) ist demnach bei der Längswelle der Elastizitätsmodul, bei der Querwelle der Torsionsmodul maßgebend, und da ersterer Modul der größere ist, laufen die Längswellen stets schneller als die Querwellen (mit $\mu = 1/3$ doppelt so schnell)[1].

Hat aber das Medium flüssigen oder gasförmigen Zustand, so fehlt die Formelastizität; nur Volumelastizität ist vorhanden (M 294). Daher kann auch nur die Längswelle sich ausbilden, keine Querwelle. Es gibt also im Inneren flüssiger oder gasförmiger Medien nur Längswellen.

17. Erdbebenwellen. — Ein sehr bemerkenswerter Fall von Wellen im Inneren fester Medien sind die Erdbebenwellen. Findet im Erdinneren irgendwo eine plötzliche Verschiebung statt, so gehen von dort aus Längs- und Querwellen durch das ganze Erdinnere; wo sie die Oberfläche treffen, wird Erdbeben verspürt. Die an vielen Orten aufgestellten Seismographen (Erdbebenschreiber) zeichnen Richtung und Größe auch geringer Erschütterungen mit Zeitangabe auf, und aus der Vergleichung dieser Angaben über die ganze Erde kann sowohl der Ursprungsort des Erdbebens als auch die Geschwindigkeit der Ausbreitung der Längs- und der Querwellen ermittelt werden. Es zeigen sich verschiedene Geschwindigkeiten je nach der Tiefe, in welcher die Welle gelaufen ist. Folgendes sind einige bisherige Ergebnisse:

	Tiefe 0	0·3 Erdradius	0·6 Erdradius
Querwellen . .	v = 4 km/sek	7 km/sek	Querwellen nicht gefunden.
Längswellen . .	v = 8 km/sek	13 km/sek	10 km/sek.

[1]) Die Rechenergebnisse im einzelnen finden sich im Anhang zur Akustik unter IV.

Die hier ersichtliche nahe doppelte Geschwindigkeit der Längswellen gegenüber den Querwellen stimmt mit $\mu = 1/3$ für das Verhältnis von Längsdehnung zu Querschrumpfung (vgl. 16), wie es für die meisten festen Körper gilt (M 261). Die Verschiedenheiten der Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen zeigen eine geschichtete Verteilung der Stoffe des Erdinnern an. Die anfängliche Zunahme der Geschwindigkeit mit der Tiefe bei gleichzeitiger Zunahme der Dichte — letztere durch die Gravitationsuntersuchungen angezeigt (M 213) — läßt (nach Gl. 8, vgl. 16) auf sehr starke Zunahme des Elastizitätsmoduls schließen, und dies stimmt mit der durch Ebbe und Flut angezeigten sehr großen Starrheit des Erdkörpers (M 224). Die schließliche Abnahme der Geschwindigkeit in größten Tiefen zeigt dort überwiegende Zunahme der Dichte an.

Daß bis zu sehr großen Tiefen Querwellen angezeigt sind, beweist — wie Ebbe und Flut — den großteneils festen Zustand des Erdinneren; gegen den Erdmittelpunkt zu könnte flüssiger Zustand bestehen, insofern dort nur Längswellen nachgewiesen sind.

Außer den Längs- und Querwellen treten bei besonders starken Erdbeben auch noch Oberflächenwellen auf, mit Bewegungen wie bei den Wasserwellen, wobei der feste Zustand versagt (M 265) und alles durcheinandergeworfen wird. Diese Wellen laufen langsam; sie kommen daher an entfernteren Orten merklich verspätet nach den Längs- und Querwellen — den „Vorbeben" — an, das besonders verheerende „Hauptbeben" bildend. Aus dem am Erdbebenschreiber ersichtlichen Zeitunterschied beider Beben kann angenähert der Abstand des Erdbebenherdes angegeben werden.

Schallwellen und deren Abbildung.

18. Der Schall läuft gewöhnlich in Luft. Ist er also überhaupt eine Wellenbewegung, so kann er doch nur in Längswellen bestehen; denn Querwellen sind in Gasen ausgeschlossen (16).

Längswellen sind nicht so unmittelbar einfach abzubilden wie Querwellen. Bildet man eine Welle durch Augenblickslagen der Mediumsteile ab, wie es in Abb. 4 geschehen ist, so erhält man bei der Querwelle die Berge und Täler, deren Formen alle Besonderheiten der Welle gut darstellen; bei der Längswelle erscheinen die Verdichtungen und Verdünnungen (Abb. 4c), deren Abstände wohl die Wellenlänge, nicht aber gut sonstige Besonderheiten sehen lassen, die der besonderen Schwingungsart der Teile entsprechen (6). Diese Besonderheiten würden in der Gruppierungsart der Punkte erscheinen, die aber genauer Darstellung und leichter Wahrnehmung nicht zugänglich ist.

Daher wird bei Längswellen, besonders in der Luft, eine übertragene Darstellungsweise gewählt. Die Verdichtungen bringen nach Boyles und Mariottes Gesetz Überdruck in der Luft hervor, die Verdünnungen Unterdruck, und man kann die an jeder Stelle des Wellenweges zu gegebener Zeit statthabenden Drucke auftragen, Überdrucke nach oben, Unterdrucke nach unten, als wären sie Elongationen einer Querwelle. Man erhält so das gleiche Bild wie von einer Querwelle; nur bedeuten jetzt die Berge Überdruck, die Täler Unterdruck an der betreffenden Stelle. Dabei geben die Formen der Berge und Täler übersichtlich die Druckverteilung in der Welle oder im Wellenzug an, und

die Ausbreitung besteht im Fortschreiten der ganzen Druckverteilung, wobei an jeder einzelnen Stelle zeitlich nacheinander dieselben Drucke auftreten, die räumlich nebeneinander im Wellenbild zu sehen sind, ganz wie es allgemeine Welleneigentümlichkeit ist (4). Man kann dann die Verschiebungen der Mediumsteile auch ganz außer acht lassen und nur die Druckverteilung im Medium im Auge behalten; es kann in der Tat der Druck als der Zustand betrachtet werden, der als Welle sich ausbreitet. Die Längswelle erscheint so als eine sich ausbreitende Druckschwankung.

Eine einfache Rechnung[1]) zeigt, daß eine longitudinale Sinuswelle (6, 10) bei kleinen Amplituden, die immer hauptsächlich in Betracht kommen (44), auch als Druckverteilungslinie eine Sinuslinie gibt. Es ist demnach die in Abb. 4c ersichtliche Gruppierung der Mediumsteile in der longitudinalen Sinuswelle bei kleinen Amplituden durch eine Sinuslinie des Druckes darstellbar, so wie die transversale Sinuswelle durch eine Sinuslinie der Elongationen dargestellt wird.

Andere Längswellen, in denen die Teile nicht die einfache Pendelbewegung machen, ergeben auch entsprechend andere Drucklinien. Es werden so in dieser Druckdarstellung alle Unterschiede in der Bewegung der Teile als Formunterschiede der Drucklinie leicht ersichtlich.

Diese Druckdarstellung benutzen wir für alle Untersuchungen der Schallwellen, und dies ist der Sinn aller Schallwellenlinien, wie z. B. Abb. 14, 15, 17—23, die wir noch betrachten werden.

Zu bemerken ist, daß bei großer Amplitude eine sinusförmige Bewegung nicht genau sinusförmige Druckverteilung ergibt (100). Da aber jede beliebige periodische Druckverteilung aus Sinusverteilungen zusammensetzbar ist (64), so kann man bei Betrachtung von Schallwellen immer von Sinusverteilungen des Druckes ausgehen, wie wir es tun werden.

Wellen als Energieträger.

19. Jede Welle führt Energie mit sich. Denn der in ihr sich fortpflanzende Zustand wird am Ursprungsort unter Energieaufwendung hervorgebracht; er bedeutet also eine Energieaufhäufung im Medium, und wo er mit der Wellengeschwindigkeit laufend hinkommt, ist auch die ihm zugehörige Energie hingekommen.

So bedeutet jeder Berg einer Wasserwelle potentielle Energie des in dem Berg gehobenen Wassers. Gleichzeitig ist aber auch kinetische Energie in der Wasserwelle; denn die Wasserteile haben Bewegung in ihren Kreisbahnen. Die in einem longitudinalen oder auch transversalen Sinuswellenzug enthaltene Energie ist zur Hälfte potentiell, zur anderen Hälfte kinetisch, wie es der Pendelbewegung der Teile entspricht, deren Energie abwechselnd ganz potentiell und ganz kinetisch ist (M 149).

Wo eine Welle hinkommt bringt sie ihre Energie mit. Sehr augenscheinlich wird dies bei der oft mächtig wirkenden „Brandung" der Meereswellen, wenn sie vom offenen Meere her an seichtes Ufer kommen. Die ursprünglich in großen Wassermengen enthaltene Energie geht dann in die kleineren Wassermengen des Ufers über, die entsprechend hoch gehoben und schnell bewegt

[1]) Ausgeführt im Anhang zur Akustik VII, wo auch die Umrechnung von linearer Amplitude auf Druckamplitude ersichtlich ist.

werden, so daß die Wellenkämme überschäumen und das Wasser weit ins Land geworfen wird. Die Brandung ist ein Vorgang der Vernichtung von Wellen. Es gilt nach dem Energiegesetz für alle Wellen, daß Energieinhalt vernichteter Wellen in anderer Form erscheinen muß. Die Brandung erschöpft sich, sofern sie nicht etwa Zerstörung vollbringt, durch Reibung in Wärme (W 71 u. f.). Wärme ist auch sonst die meist unscheinbare Form, in welche Wellenenergie übergeht; so auch bei der Absorption der Schallwellen (40) und der Lichtwellen (O 93).

20. Energie als Intensitätsmaß von Wellen. — Die ganze Wirksamkeit einer Welle irgendwelcher Art, ihre „Stärke" oder „Intensität" genannt, ist durch ihren Energieinhalt gegeben. Auch die Wirkung von Wellen, wie des Schalles, des Lichtes, auf die Sinnesorgane ist durch ihren Energieinhalt bedingt. Die Sinnesorgane haben dabei freilich ihre großen Eigenheiten, was wir beispielsweise schon beim „unhörbaren Schall" bemerkt haben (1); davon frei, als unabhängiges, absolutes Maß der Intensität einer Welle, ist immer ihr Energieinhalt. Bei einem Wellenzug aus räumlichem Medium ist Intensitätsmaß die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit an die senkrecht auffangende Flächeneinheit kommt. Damit ist auch das Maß für Schallintensität gegeben (44).[1])

21. Energieübertragung durch Wellen. — Durch Wellen kann Energie in sehr sauberer, verlustfreier Weise und meist mit sehr großer Geschwindigkeit von einer Stelle zur anderen übertragen werden. Beim Einschlagen eines Nagels, wie beim Einrammen eines Pfahls, läuft die vom Hammer an den Kopf des Nagels abgegebene Energie als Längswelle schnell bis zur Nagelspitze und wird dort zur Beiseiteschiebung der Umgebung wirksam. Es ist dies der schon an der Kugelreihe erläuterte Vorgang (11). Das Besondere ist, daß der zum Voranschieben der Nagelspitze nötige Druck dauernd auf den ganzen Nagel gar nicht ausgeübt werden könnte ohne ihn durch unerwünschte seitliche Komponenten zu verbiegen; in der vom Hammer ausgehenden Längswelle ist dieser sehr beträchtliche Druck immer nur auf sehr kurzer Strecke im Nagel vorhanden, bis er an der Spitze anlangt, wo er, ins Hindernis übergehend, dessen Elastizitätsgrenze zur Überschreitung bringt, womit der gewünschte Erfolg in einfachster Weise erreicht ist.

Ebenso ist es mit Schallsignalen in der Luft, die auch als Längs- d. i. Druck-Wellen (18) sich ausbreiten und durch Druck auf das Trommelfell des Ohres wirken, ohne daß der Druck der ganzen Luft gestiegen wäre.

Ein großartiges Beispiel von Energieübertragung durch Wellen bieten die elektromagnetischen Wellen des von der Sonne ausgehenden Lichtes. In Gestalt dieser in der Optik und Elektrizitätslehre zu behandelnden Wellen (O 120 u. f., E 410 u. f.) empfängt die Erde fast alle auf ihr wirksame Energie von der Sonne her. Alle Energien der Lebewesen, der Dampfmaschinen, der Wasserkräfte und dadurch auch der Elektrizitätswerke sind in solcher Wellenform von der Sonne gekommen (W 164). Diese in den weiten Himmelsräumen so wesentliche Energieübertragung geht mit der für diese Räume wie geschaffenen großen Geschwindigkeit des Lichtes, 300000 km/sek, vor sich.

---

[1]) Die Berechnung der Intensität aus der Amplitude findet man im Anhang zur Akustik unter VIII.

II. Untersuchung des Schalles.

Die Behauptung, daß Schall eine Luftwelle sei, kann nur durch Versuche und Beobachtungen am Schall selbst erwiesen werden. Wir werden dabei in der Tat nicht nur alle für Wellen zu erwartenden Eigentümlichkeiten am Schalle nachweisen können (23 u. f., 68 u. f.); sondern es wird auch möglich, die Wellen und ihre Formen mit allen Einzelheiten nachprüfbar aufzuzeichnen (60 u. f.).

22. Schall gibt es nur in Materie. — Die erste Frage ist: ob der Schall überhaupt ein Vorgang in der Luft ist, oder ob er etwa, wie das Licht, auch ohne Luft oder sonstige Materie sich ausbreiten könne. Die Frage wurde mittels der Luftpumpe schon früh durch Guericke zu beantworten gesucht. Man findet, daß eine im ausgepumpten Raume tätige Schallquelle, etwa eine Schelle mit uhrwerkgetriebenem Klöppel (wie S in Abb. 8), außen nicht gehört werden kann, wenn genügende Vorsicht gegen Fortleitung des Schalles durch die Befestigungen der Schelle getroffen ist. Durch den von Materie freien Raum pflanzt sich somit kein Schall fort; er ist also ein Vorgang in der Materie. Man bemerkt zugleich, daß Schall auch durch feste Körper laufen kann, z. B. durch Metallstangen, die die Schelle tragen, daß es aber auch Körper gibt, die ihn schlecht weiterleiten, z. B. Filz, was wir später untersuchen (40).

Auch durch verdünnte Luft wird der Schall schon schlecht geleitet; die Hörbarkeit der luftdicht umschlossenen Schelle nimmt schon während allmählicher Wegpumpung der Luft deutlich ab bis zum Verschwinden mit dem Verschwinden der Luft. In der verdünnten Luft hoher Berge ist die Verständigung durch Sprechen auf einige Entfernung schwierig; man sieht die Bewegungen des Mundes ohne recht die Stimme zu hören.

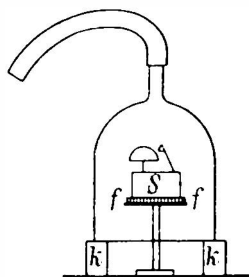


Abb. 8. Schallquelle in Wasserstoffgas.

Ebenso ist es in Gasen geringer Dichte, wie Wasserstoff, bei vollem Atmosphärendruck. Stülpt man über die auf Filz f f gestellte Schelle mit Uhrwerk S (Abb. 8) eine unten offene, oben mit Schlauch versehene Glasglocke, die auf Klötzen k ruht, so hört man die Schelle sehr wohl, solange Luft in der Glocke ist. Läßt man aber durch den Schlauch Wasserstoffgas einströmen, das die Luft aus der Glocke verdrängt, so wird die Schelle fast unhörbar, obgleich man sieht, daß der Klöppel sie fortwährend schlägt.

Die Erklärung für die geringe Wirksamkeit der wenig dichten Gase liegt darin, daß dieselben nur wenig Energie von der schwingenden Schelle übernehmen und also auch nur wenig fortpflanzen können. Denn die Energie wird in kinetischer Form von der Schelle an das Gas abgegeben, das an deren schwingendem Rande dieselbe Geschwindigkeit annimmt wie dieser. Wenn aber die Masse der Raumeinheit des Gases gering ist, ist auch die von der Raumeinheit übernommene kinetische Energie als Produkt von Masse und halbem Geschwindigkeitsquadrat gering.

23. Schallgeschwindigkeit. — Schall braucht Zeit zur Fortpflanzung; man bemerkt leicht seine Verspätung bei größeren Entfernungen von einer Schallquelle. Sieht man aus der Ferne Steine klopfen, so scheint es, als ginge der Schall nicht beim Schlag, sondern beim Wegziehen des Hammers vom Stein aus. Offenbar hat sich der Schall gegen das Licht, welches Kunde vom Vorgang gibt, verspätet, und da Lichtverspätungen in irdischen Abständen ohne weiteres unmerklich sind, ist die bemerkbare Verspätung gleich der Laufzeit des Schalles

Die Schallgeschwindigkeit wurde in solcher Weise auch früh schon gemessen. Es wurde die Ankunft des Schalles von Kanonenschüssen, die in bekannter Entfernung zu festgehaltenen Zeiten abgegeben wurden, mit der Uhr beobachtet. Der Quotient aus Entfernung und Verspätungszeit des Schalles gibt die Schallgeschwindigkeit und zwar gegen Erde, weil die Entfernung an der Erde gemessen ist (siehe M 42). Ist Wind der Geschwindigkeit w in Schallrichtung vorhanden, so vergrößert dies die Schallgeschwindigkeit gegen Erde; man findet dann $v+w$, wenn v die Schallgeschwindigkeit entlang der Luft ist. Um von der Luftbewegung unabhängig zu sein, stellt man an jeder der beiden Stationen eine Schallquelle auf und beobachtet abwechselnd mit Schall in beiden Richtungen. Man findet dann in Windrichtung $v+w$ und gegen den Wind $v-w$, wovon der Mittelwert, v, die Schallgeschwindigkeit entlang der Luft ist. Man sieht aus solchem Windeinfluß, daß die Schallgeschwindigkeit in der Tat relativ zur Luft (entlang der Luft, gegen Luft) einen festen Wert hat, wie es für eine Wellengeschwindigkeit zu erwarten ist, die immer relativ zum Medium gilt (5).

Ist man auf Messung sehr kurzer Zeiten eingerichtet, so kann man die Schallgeschwindigkeit auch auf sehr kurzen Strecken messen, wobei am besten elektrische Empfangszeichen (mittels Mikrophon) benutzt werden.

Außerdem gibt Gl. 5 das Mittel, die Schallgeschwindigkeit aus bekannten Schwingungsdauern und gemessenen Wellenlängen zu berechnen, was ebenfalls in sehr kleinen Räumen ausführbar ist (80).

Das Ergebnis aller solcher Messungen ist für Luft von 0° Temperatur und 760 mm Quecksilberdruck 332 m/sek.

24. Vergleichung mit der berechneten Wellengeschwindigkeit. — Die gemessene Geschwindigkeit stimmt mit der für Längswellen in der Luft zu erwartenden vollkommen überein.

Es ist dabei in der allgemeinen Gleichung 8 für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen als Kraftmaß das Maß der Volumelastizität (16) des Gases, als Massenmaß die Dichte D des Gases zu setzen. Die Volumelastizität, d. i. die reziproke Kompressibilität (M 267) ist bei unveränderter Temperatur nach Boyles und Mariottes Gesetz durch den Druck p des Gases gegeben (M 362), und danach wäre die Wellengeschwindigkeit $v = \sqrt{p/D}$. Dies war schon von Newton gefunden.

Es finden jedoch bei der Schallbewegung Temperaturänderungen statt. Das Gas wird an den verdichteten Stellen warm, an den verdünnten kalt (W 61), und die Wechsel der Verdichtungen und Verdünnungen gehen in den Schallwellen so schnell vor sich, daß keine Zeit bleibt zum Temperaturausgleich. Das bei Volumverminderung warm werdende Gas erhöht seinen Druck stärker als nach Boyles und Mariottes Gesetz (W 29); es muß daher die Volumelastizität größer als p eingesetzt werden, und zwar ergibt die Rechnung[1]) $k \cdot p$, wobei k das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen des Gases ist. Dies wurde von Laplace erkannt. Für Luft ist $k = 1{\cdot}41$ (W 63).

Die Schallgeschwindigkeit in Gasen ist demnach

$$v = \sqrt{k\,\frac{p}{D}}\,, \qquad 24)$$

und dies stimmt mit den Messungen überein. Es ergibt sich mit $p = 760$ mm

[1]) Siehe Anhang zur Akustik VI und Anhang zur Wärmelehre II.

Quecksilber = $1{\cdot}013 \cdot 10^6$ dyn/cm² (M 192, 352), $D = 1{\cdot}293 \cdot 10^{-3}$ gr/cm³ und $k = 1{\cdot}41$ $v = 332$ m/sek.

Auch die Schallgeschwindigkeiten in anderen Gasen (80) stimmen mit Gl. 24 überein, soweit nur k aus Wärmemessungen gut ermittelt ist. Umgekehrt kann Schallgeschwindigkeitsmessung in Gasen oder Dämpfen, von denen man nur die Dichte kennt, zu erleichterter Ermittelung des Verhältnisses k der spezifischen Wärmen dienen (W 64).

Die Gleichung für v zeigt die Schallgeschwindigkeit unabhängig vom Druck des Gases, da die Dichte proportional dem Druck sich ändert, dagegen mit steigender Temperatur steigend, weil die Dichte abnimmt, — alles so weit die einfachen Gasgesetze gelten (M 359, W 39) und k konstant ist, wie es unter nicht extremen Umständen sehr nahe der Fall ist.

25. Die Frage einer etwaigen Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von Wellenlänge und Amplitude ist aus unmittelbarer Beobachtung für alle gewöhnlichen Schallwellen verneinend zu beantworten. Jedes aus der Ferne gehörte Konzert zeigt dies, sobald man weiß, daß Wellenlänge als Tonhöhe, Amplitude als Tonstärke gehört wird (44, 45); wären Fortpflanzungsverschiedenheiten vorhanden, so würden verschieden hohe und verschieden starke Töne in der Ferne auseinanderkommen und der Musikeindruck wäre merklich verdorben.

Ebenso kommen Wellenlänge und Amplitude auch in der für die Wellen der Luft berechneten Gl. 24 für v nicht vor. Allerdings ist diese Gleichung für kleine Amplituden, Abwesenheit von Reibung und von Wärmeverlusten berechnet, und es ist daher nicht zu verwundern, daß unter Umständen, wo diese Voraussetzungen nicht zutreffen, auch abweichende Schallgeschwindigkeiten beobachtet sind.

26. Die Übereinstimmung der beobachteten Schallgeschwindigkeit mit der berechneten Wellengeschwindigkeit, wozu auch noch die Übereinstimmungen bei den Einflüssen von Temperatur und Druck gehören (24), wäre Beweis für die Wellennatur des Schalles, auch wenn Längen und Formen der Schallwellen nicht so eingehend untersuchbar geworden wären, wie es tatsächlich der Fall ist (45 u. f., s. auch 41).

27. Entfernungsquadratgesetz der Schallintensität bei allseitig freier Ausbreitung. — Wirkt eine Schallquelle im freien Luftraum, wo ihre Wellen auf kein Hindernis treffen, so breitet sich die von jedem Punkt der Quelle in der Zeiteinheit ausgegebene Energie (19) auf Kugelflächen von steigendem Radius aus. Wirkt die Schallquelle allseitig gleichmäßig, wie z. B. eine mit Knallgas gefüllte, explodierende Seifenblase, oder ein kleiner knallender elektrischer Funke, so ist die Energie auf den Kugelflächen auch gleichmäßig verteilt. Es fallen dann auf die Flächeneinheit in der Zeiteinheit Energiemengen, die den Flächengrößen der Kugeln, also den Quadraten ihrer Radien verkehrt proportional sind, und da diese Energiemengen das Maß für die Schallstärken sind (20), so ist Intensitätsabnahme des Schalles nach Maßgabe des verkehrten Quadrats der Entfernung von der Schallquelle nicht zu bezweifeln.

Wirkt die Schallquelle nicht allseitig gleichmäßig, wie es meistens der Fall ist, so kann das Entfernungsquadratgesetz nur für die mittlere Schallintensität der gegebenen Entfernung gelten.

Allseitig freie Ausbreitung von Schall kommt übrigens gewöhnlich nicht vor;

mindestens der Erdboden wirkt schon störend durch Reflexion an ihm, was verringerte Intensitätsabnahme zur Folge hat.

28. Schallstrahlen; Beugung des Schalles. — Wenn der Weg des Schalles durch ein Hindernis teilweise versperrt ist, z. B. durch eine feste Wand WW mit Öffnung (Abb. 9), so geht der nicht aufgehaltene Teil des Schalles am Hindernis vorbei und setzt sich hinter demselben in gerader Richtung, außerdem aber auch seitlich fort. Die geradlinige Fortsetzung ist „Strahl" zu nennen, die seitliche „Beugung"; beide Bezeichnungen sind mit gleichem Sinn auch für das Licht im Gebrauch. Der Name Strahl wird übrigens gleichsinnig mit „Fortpflanzungsrichtung" auch dann gebraucht, wenn seitliche Begrenzung fehlt; der Strahl steht senkrecht zur Wellenfläche (5).

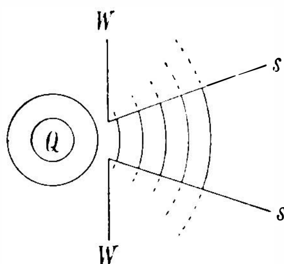


Abb. 9. Freie Wellenausbreitung, Strahlbildung und Beugung.

Strahlbildung mit Beugung hinter Öffnungen kommt bei allen Wellen vor. Es kann Abb. 9 eine Wasseroberfläche von oben gesehen darstellen, aus welcher die senkrechte Bretterwand WW mit Öffnung herausragt. Fällt bei Q ein Stein ins Wasser, so entstehen die bekannten Wellenkreise (3) mit Q als Mittelpunkt, und sie setzen sich durch die Öffnung der Wand fort und zwar sowohl im Strahlraum zwischen den von der Quelle ausgehenden Geraden s s, als auch, geschwächt, seitlich davon als gebeugte Wellen (in der Abbildung punktiert).

Man kann die Beugung der Wellen auch als Um-die-Ecke-gehen bezeichnen. Daß der Schall um Ecken geht, ist alltägliche Erfahrung; man kann Schallquellen hinter schallundurchlässigen Hindernissen hören, ohne sie sehen zu können.

Licht geht im Gegensatz zum Schall nicht merklich um Ecken. Da aber auch Licht ein Wellenvorgang ist (O 120 u. f.), scheint hier ein Widerspruch zu bestehen; er klärt sich auf als bedingt durch den Unterschied in den Wellenlängen. Wellen gehen um so weniger um die Ecke, erfahren um so weniger Beugung, je kürzer sie sind, und die Wellen des sichtbaren Lichtes sind nach Zehntausendstel Millimetern, die Wellen des hörbaren Schalles aber nach Metern zu messen (vgl. Tab. 15). Dieser große Unterschied macht es, daß man für gewöhnlich beim Schall gar nicht an geradlinige Ausbreitung, nicht an Strahlen denkt, beim Licht dagegen die Geradlinigkeit der Ausbreitung als besonders charakteristisch betrachtet. Wir gehen auf diese Abhängigkeit der Beugung von der Wellenlänge im einzelnen und mit aller Begründung in der Optik ein (O 140 u. f.), da sie dort von besonderer Wichtigkeit ist.

Die Gradlinigkeit der Schallstrahlen gilt übrigens auch bei ungehinderter Ausbreitung nur bei rings um den Strahl überall gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Temperaturunterschiede in der Luft (24), oder — relativ zum Erdboden — auch Luftströmungen können die Schallstrahlen krümmen. Es ist aus Huygens' für alle Wellen gültigem Prinzipe (O 38) leicht einzusehen, daß der Strahl nach der Seite hin sich krümmen muß, wo geringere Fortpflanzungsgeschwindigkeit gilt. So krümmen sich Schallstrahlen im freien nach dem Erdboden hinab, wenn oben Wind in Schallrichtung bläst, und man hört daher besser, wenn der Schall „vom Wind getragen" wird, als wenn der Wind ihm entgegen ist. Schichten abnormer Temperaturverteilung in der Atmosphäre — sowohl oben als unten wärmer als in mittlerer Höhe — können Schallstrahlen erst nach oben und dann wieder zurück nach unten lenken, was bei Schall von Explosionen beobachtet ist, der in großem Abstand von der Quelle hörbar, in gewissem mittlerem Abstand aber unhörbar gefunden wurde („Schweigezone").

29. Beobachtung von Schallstrahlen. — Es entspricht dem Bemerkten (28), daß einigermaßen scharf begrenzte Schallstrahlen am besten bei höchsten Tönen nachweisbar sind; denn diese haben die kürzesten Wellen. Eine sehr kleine Glocke oder Pfeife kann solche Töne liefern. Man setzt eine solche Schallquelle in eine Kiste, deren Innenwände mit Filz oder Watte dick bekleidet sind[1]); es dringt dann durch eine (nicht zu kleine) Öffnung in der Wand der Kiste ein Schallstrahl heraus, wie der Lichtstrahl aus einer Blendlaterne.

Man kann den Strahl in seiner Längenerstreckung und Breite mit dem Ohr abhören, allenfalls mit Zuhilfenahme eines ans Ohr gesetzten, biegsamen Hörrohres, dessen Mündung an verschiedene Raumstellen zu bringen ist. Besser und auch zu quantitativer Untersuchung geeignet sind die elektrischen Nachweismittel des Schalles, Mikrophon und Zubehör (61).

Sehr geeignet zur Untersuchung von räumlicher Schallverteilung ist auch eine schallempfindliche Flamme. Sie ist das einfachste Mittel, um Schall mit dem Auge statt mit dem Ohr zu beobachten, geeignet besonders für sehr hohe Töne. Man erhält eine solche Flamme (ff_1, Abb. 10) von Leuchtgas, das unter nicht zu geringem Druck aus enger Öffnung mit so großer Geschwindigkeit ausströmt, daß schon bei kleiner Druckerhöhung des Gases oder Druckverminderung der äußeren Luft Wirbelbildung eintritt (M 395). Diese tritt auch ein, wenn genügend starker Schall herankommt, was wohl durch den zeitweiligen Unterdruck in dessen Wellen erklärlich ist. Die Flamme zieht sich dann zusammen (in der Abbildung punktiert), was besonders bei intermittierendem Schall sehr auffallend wird; sie zeigt so die bei m vorhandene Schallstärke an. Die Empfindlichkeit wird sehr erhöht durch den unten geschlossenen Mantel $m m_1$, und zwar vorzugsweise für Schall, dessen Wellenlänge $4\,l_1 = l_2$ ist (Abb. 10)[2]).

Mit einer solchen Flamme können Schallstrahlen aus Öffnungen und auch „Schallschatten" hinter Hindernissen gut studiert werden.

Der Schallschatten des Kopfes bewirkt es, daß mit zwei Ohren auch der Ort einer Schallquelle allein nach dem Gehör beurteilt werden kann. Der Ursprung von Schall, der beispielsweise aufs rechte Ohr stärker wirkt als aufs linke, wird rechts gesucht.

Die äußerst kurzen Wellen über der Hörgrenze (48, 102) geben leicht schmale und scharf begrenzte Strahlen, was sie zu gerichteter Sondierung (durch Reflexion) und Nachrichtenübermittelung unter Wasser benutzbar macht.

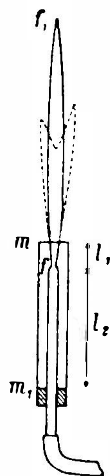


Abb. 10. Schallempfindliche Flamme.

30. Zurückwerfung (Reflexion) des Schalles ist vom „Echo", dem „Widerhall" an Felswänden, auch an Häuserwänden, lange bekannt. Ist die Wand 332 m entfernt, so dauert es nach der bekannten Fortpflanzungsgeschwindigkeit (23) 2 sek bis zur Rückkehr des Schalles an den Ort der Quelle, bei 33 m nur rund 0·2 sek und bei 16 m 0·1 sek. Letzteres ist die kürzeste Zwischenzeit, bei der zwei Schalleindrücke noch getrennt wahrnehmbar sind. Widerhall von noch näheren Wänden wird nur als Schallverstärkung merklich.

Reflexion ist Wellen jeder Art eigen; Wasserwellen werden am steilen Ufer reflektiert, Seilwellen am Ende des Seiles, und auch die Wellen des Lichts erfahren Spiegelung. Ganz allgemein findet Reflexion statt, wenn eine Welle an die Grenze gegen ein anderes Medium trifft; die Reflexion kann dabei auch nur teilweise stattfinden, so daß ein Teil der Welle mit ihrer Energie ins andere Medium eindringt.

31. Mechanismus der Reflexion. — Die Bewegungsvorgänge an den Mediumsteilen bei der Reflexion von Wellen können im wesentlichen am besten an den transversalen Seilwellen erkannt werden.

---

[1]) Die Bekleidung verhindert Reflexionen des Schalles an der Kistenwand (47, 50), so daß nur die unmittelbar von der Quelle ausgehenden Schallwellen zur Geltung kommen.

[2]) Diese Empfindlichkeitserhöhung ist Folge der Resonanz der Luft im Mantel (85); es bildet sich an der Rohrmündung f ein Bauch des Druckes aus. Es kann ebensogut $l_2 = 2\,l_1$, d. i. eine halbe Wellenlänge des Schalles sein, oder auch 2, 3, . . . halbe Wellenlängen.

Es sind hier, wie überhaupt bei Wellenreflexion, zwei Fälle zu unterscheiden: „Reflexion am dichteren" und „Reflexion am dünneren Medium". Das dichtere Medium hat mehr, das dünnere weniger Masse in der Raumeinheit, bzw. bei Seilwellen in der Längeneinheit.

Reflexion der transversalen Seilwellen am dichteren Medium. — Man betrachtet hier am besten den Grenzfall der Reflexion an unendlich großer Masse. Derselbe ist auch leicht in großer Annäherung zu verwirklichen bei Befestigung des Seiles oder Schlauches an einer Wand; die große Masse der Wand verhindert fast gänzlich ihre Mitbewegung, so daß eine herankommende Welle an der Befestigungsstelle fast in voller Intensität reflektiert wird. Dieser Vorgang läuft folgendermaßen ab: Die beispielsweise als Tal angenommene Welle, Abb. 11a, läuft, wie schon früher betrachtet (7), vermöge der Kraft k_1 nach links, während die Kraft k_2 den in Aufwärtsbewegung begriffenen Teil x des Seiles zum Stillstand bringt. Ist die Welle beim festen Punkt P der reflektierenden Wand angelangt (Abb. 11b), so wirkt zwar, wie auch sonst, die Kraft k_3 vermöge der Krümmung des Seiles und bringt den Teil y des Seiles zur Aufwärtsbewegung, so daß er alsbald geradlinig wird (Abb. 11c); aber es fehlt jetzt eine Kraft wie k_2, die y zum Stillstand brächte, da keine Knickung am Seil vorhanden ist. Der Teil y bleibt daher vermöge seiner Trägheit weiter nach aufwärts bewegt und erzeugt einen Berg (Abb. 11d), wo vorher das Tal war. Damit ist die Reflexion schon vollendet; denn der entstandene Berg läuft vermöge der Kraft k_4, die ruhende Masse trifft, in der schon bekannten Weise (7) nach rechts weiter (Abb. 11e); er ist die reflektierte Welle. Das Tal ist also als Berg reflektiert worden; ein Berg würde ebenso als Tal reflektiert. Es hat also am dichteren Medium Reflexion mit Umkehr der Phase stattgefunden.

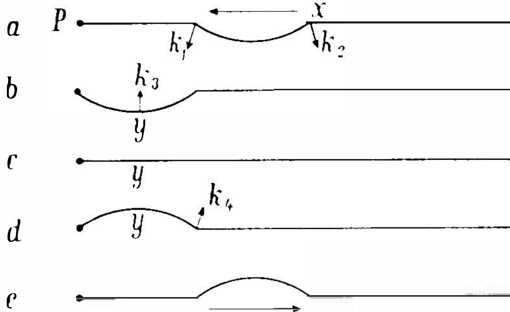


Abb. 11. Reflexion einer Seilwelle am dichteren Medium.

Kommt ein ganzer Sinuswellenzug (5, 6) zur Reflexion an dichterem Medium, so werden alle seine Täler in Berge, seine Berge in Täler verwandelt. Er bleibt dabei ein Sinuswellenzug; aber hat er mit einem Berg begonnen, so wird er nach der Reflexion mit einem Tal beginnen, und umgekehrt. Dies kann auch festgehalten werden durch die Aussage: Reflexion eines Sinuswellenzuges am dichteren Medium findet mit Verlust einer halben Wellenlänge statt.

Reflexion der transversalen Seilwellen am dünneren Medium. — Diese kann an einem etwas massigen Schlauch beobachtet werden, der in einem dünnen Bindfaden sich fortsetzt. P in Abb. 12 ist der Punkt, wo beide aneinandergrenzen; an ihm findet die Reflexion statt. Sie verläuft folgendermaßen:

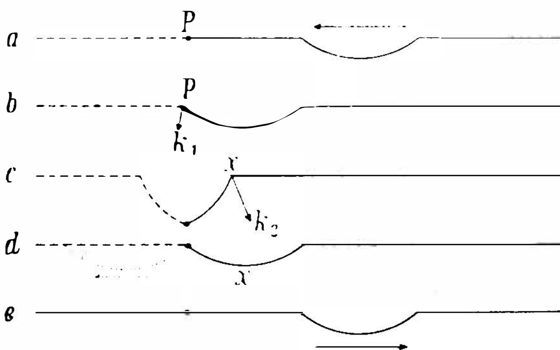


Abb. 12. Reflexion einer Seilwelle am dünneren Medium.

Die wieder als Tal angenommene Welle (Abb. 12a) gelangt in der bekannten Weise (7) bis an P, wo die Kraft k_1 jetzt eine verminderte Masse trifft und deshalb P und seiner Umgebung eine vergrößerte Beschleunigung und daher auch eine größere Amplitude erteilt als sie den Massen des bisherigen Mediums zukam (Abb. 12c). Die Folge davon ist der verstärkte Knick bei x und die entsprechend verstärkte Kraft k_2, die nun den Teil x, der im Hinaufgehen begriffen war, nicht nur zur Ruhe, sondern darüber hinaus zur Umkehr nach unten bringt. Damit ist das neue Tal bei x entstanden (Abb. 12d). Dies bedeutet aber schon die Vollendung der Reflexion; denn das neue Tal

läuft jetzt in der schon bekannten Weise (7) nach rechts zurück ins erste Medium (Abb. 12e). Zugleich ist vermöge der Ausweichung von P (Abb. 12c) auch eine ins zweite Medium fortschreitende Welle zustande gekommen (in der Abbildung punktiert), so daß die Energie der herangekommenen Welle geteilt ist zwischen der reflektierten und der ins neue Medium übergehenden Welle[1]).

Man sieht, daß hier das Tal als Tal reflektiert ist; es findet also am dünneren Medium Reflexion ohne Umkehr der Phase statt. Dementsprechend gilt für einen Wellenzug auch: Reflexion am dünneren Medium ohne Verlust der halben Wellenlänge.

Reflexion von longitudinalen Wellen. — Hier geht alles wie bei den transversalen Wellen vor sich; daß die Verschiebungen und infolgedessen auch die Kräfte längs statt quer gerichtet sind (10), ändert nichts an den für die Querwellen gefundenen Ergebnissen.

Der Vorgang ist hier sogar viel einfacher zu durchschauen als bei den Querwellen. Besteht die Welle beispielsweise aus einem nach der Grenzstelle hin gerichteten Ruck, so wird dieser am dichteren, unbeweglicheren Medium elastisch zurückgeworfen, wie beim elastischen Stoß; woraus man unmittelbar sieht, daß Reflexion am dichteren Medium auch hier mit Phasenumkehr stattfindet. An der Grenze eines dünneren Mediums verstärkt sich der Ruck, wodurch er in gleicher Richtung, reflektiert, ins erste Medium zurückgeht: also wieder am dünneren Medium Reflexion ohne Umkehr der Phase, wie bei den Querwellen.

32. Phasen der Bewegung und Phasen des Druckes bei Längswellen. — Man kann bei Längswellen an Stelle der Bewegung der Teile auch die Verteilung des Druckes beachten (18). Man muß aber „Phasen der Bewegung" und „Phasen des Druckes" stets auseinander halten; denn die beiden verhalten sich gegenteilig.

Das bisher über die Phasen bei der Reflexion Festgestellte (31) bezog sich nur auf die Phasen der Bewegung und gilt nur für diese. Für die Phasen des Druckes ist folgendes zu sehen:

Wird am dichteren Medium die Phase der Bewegung umgekehrt, wie wir es fanden, so läuft beispielsweise ein nach der reflektierenden Wand hin gerichteter Ruck von ihr weg gerichtet zurück. Dies bedeutet aber, daß die Phase des Druckes ungeändert bleibt; denn der umgekehrte Ruck ergibt für die ebenfalls umgekehrt laufende Welle wieder eine Verdichtung, die Verdichtung läuft also bei der Reflexion am dichteren Medium als Verdichtung zurück. Ebenso zeigt sich, daß eine Verdünnung als Verdünnung zurückläuft; die Phase des Druckes wird also nicht umgekehrt.

Am dünneren Medium, wo der Ruck, der eine Verdichtung heranbrachte, als Ruck von gleicher Richtung reflektiert wird (31), erzeugt er nun, da er in der reflektierten Welle gegen die Fortpflanzungsrichtung gerichtet ist, eine Verdünnung. Es ist also die Phase des Druckes umgekehrt, wo die der Bewegung nicht umgekehrt ist; wieder verhalten sich Druck und Bewegung gegenteilig.

33. Änderung der Fortpflanzungsrichtung bei der Reflexion. — Kommt eine Welle aus räumlich verbreitetem Medium senkrecht an eine Grenzfläche gegen ein neues Medium, so wird sie senkrecht in sich zurückgeworfen, indem im Raume dasselbe vorgeht, was am linearen Medium bereits betrachtet wurde (31, 32).

Bei beliebig gerichtetem Einfall der Welle wird die Fortpflanzungsrichtung nach der Reflexion mittels Huygens Prinzip gefunden, das für alle Wellen gilt. Wir behandeln dasselbe in der Optik, wo es bei den Wellen des Lichtes in umfassendster Weise zur Anwendung kommt (O 38 u. f.).

Reflexionsgesetz. — Das wichtigste Ergebnis für die Reflexion von Wellen ist das Gesetz von der Gleichheit des „Einfalls- und des Reflexionswinkels" des Strahles (Abb. 13, s. auch Optik Abb. 10 und 11). Ist F F die Grenzfläche zweier ungleich dichter Medien, $A O_1$ ein einfallender Wellenstrahl (28), $N O_1$ das „Einfallslot", so ist O_1R der reflektierte Strahl, so gerichtet, daß $\alpha = \beta$.

Man kann dies an Schallstrahlen mittels der schallempfindlichen Flamme (29)

---

[1]) Man bemerkt hiernach, daß die Amplituden in Abb. 12d und e zu groß gezeichnet sind. Da jedoch die Energien den Quadraten der Amplituden proportional sind (44), wären die Amplituden nur wenig zu verkleinern.

sehr gut nachprüfen. Man setzt dem aus der Schallkiste (29) kommenden horizontalen Schallstrahl die reflektierende Fläche unter verschiedenen Winkeln entgegen und prüft mit der Flamme den Raum, in welchem der reflektierte Strahl zu erwarten ist; vom direkten Strahl wird einigermaßen weit seitlich kaum etwas abgebeugt. Als reflektierende Wand kann eine Glastafel dienen.

34. Spiegelbild. — Geht der Schall von einem Punkte A (Abb. 13 und Optik Abb. 11) divergent aus, so laufen die Schallstrahlen nach der Reflexion von der Ebene F F so, als wären sie vom Punkte B hinter F F gekommen, der in der Optik das Spiegelbild von A genannt wird und wobei A O = O B ist. Dies ist Folge des Reflexionsgesetzes (siehe O 29). Die zu den Strahlen gehörenden, auf ihnen überall senkrecht stehenden Wellenflächen sind Kugeln, wie in Abb. 13 zu sehen. Jede von A ausgehende Kugelwelle vergrößert sich zunächst ungestört bis zum Radius A O; hier trifft sie die Wand, und während ein Teil der Welle im ursprünglichen Medium weiter ungestört bis zur Kugel K sich erweitert, kommt der fehlende Teil dieser Kugel als K′ scheinbar aus der Wand F F heraus. Man sieht diesen Vorgang aufs deutlichste an einer Wasserfläche an steilem Ufer F F, wenn ein Stein bei A Wellen erregt hat; die Wellenfronten sind hier Kreise statt Kugeln. Was hier die Wasserwellen zeigen, kann an Schallwellen mittels der Schlierenmethode (O 73) ganz der Abb. 13 entsprechend gezeigt werden. Die Druckveränderungen in der Schallwelle geben Veränderungen des Lichtbrechungsexponenten der Luft, und daher bilden sich die Wellenfronten bei Momentbeleuchtung als Schlieren ab. Als Schallquelle bei A dient dabei am besten ein knallender elektrischer Funke, als reflektierende Wand F F eine Glasplatte.

Abb. 13. Reflexion einer Kugel- (oder Kreis-) Welle.

35. Sammlung und Verbreitung von Schall. — Dem Reflexionsgesetz entsprechend kann Schall mittels Hohlspiegeln gesammelt werden, wie Licht. Trichterige „Hörrohre" sammeln Schall ins Ohr; die Ohrmuscheln der Tiere dienen bei geeigneter Form, wie bei den Pferden, auch dazu, und sie können bei Wendbarkeit sogar gut die Richtung erkennen lassen, aus welcher der Schall kommt. Nicht viel anders wirken Horchgeräte für Kriegszwecke.

Umgekehrt senden geeignet geformte Sprachrohre den Schall in die Ferne gleich den Scheinwerfern des Lichts (vgl. O 30 u. f.). Es kommt dabei aber auch darauf an, die an der Schallquelle großen Amplituden auf vergrößerte Wellenfronten so auszubreiten, daß Wirbelbildung vermieden wird, die bei schnellen Luftbewegungen immer leicht auftritt (M 395) und die Schallenergie zu Reibungswärme verzehren würde (M 409). Diesem Zweck dienen die trichterförmigen Mündungen von Trompeten und ähnlichen Schallquellen.

36. Einfluß der Beschaffenheit der reflektierenden Wand. — Für die langen Schallwellen (vgl. die Längen in Tab. 12) ist besondere Glätte zu guter Spiegelung durchaus nicht erforderlich. Man vergleicht leicht mittels der schallempfindlichen Flamme (29) in der früher beschriebenen Weise (33), am besten mit einem Einfallswinkel von 45°, die Reflexion an einem grob rauhen Holzbrett, einer rostigen Eisenplatte, einem Stück Mattglas, und findet sie ganz ebenso gut und unter richtigem Winkel wie am besten Spiegelglas. Die Rauhigkeiten müßten Ab-

messungen haben, die groß gegen die Wellenlängen des Schalles sind, um ihn nicht zu spiegeln, sondern allseitig zu zerstreuen, wie es z. B. mattes Glas oder Papier für Licht tut, dessen Wellenlängen so sehr viel kleiner sind. Dieser für alle Wellen geltende Zusammenhang mit der Wellenlänge wird in der Optik für die Wellen des Lichts im einzelnen nachgewiesen und erklärt (O 33, 140 u. f.).

Dichte Körper von erheblichem Elastizitätsmodul (M 259), wie Metalle, Stein, Glas, hartes Holz reflektieren Schallwellen sehr vollkommen, so daß der reflektierte Strahl nahe dieselbe Intensität zeigt wie der einfallende, was mit der schallempfindlichen Flamme sehr gut zu sehen ist.

Dagegen reflektieren Körper von geringer Dichte und Elastizität wenig; man kann von einer Tuchschicht oder Watteschicht kaum einen reflektierten Strahl nachweisen, woran nach Vorigem nicht etwa ihre Rauhigkeit schuld ist.

37. Raumakustik. — Reflexion des Schalles an den Wänden der zu Schalldarbietungen dienenden Räume bedingt wesentlich ihre Brauchbarkeit zu diesem Zwecke, ihre „gute oder schlechte Akustik". Die Raumakustik kann schlecht sein, wenn man zu wenig hört, aber auch wenn man zu viel hört.

Gegen das Zuwenighören in den großen Abständen von der Schallquelle kann die Reflexion helfen. In dieser Weise ist der Schalldeckel über den Kanzeln der Kirchen förderlich. Eine gut reflektierende Wand dicht hinter dem Redner oder Orchester hilft den Schall nach vorn bringen. Offene Fenster lassen ihn nach außen verlorengehen, machen „die Akustik" schlecht.

Zu viel hört man, wenn der reflektierte Schall zu sehr verspätet ans Ohr kommt, wodurch er nachfolgenden direkten Schall verdeckt und verwirrt. Eine Verspätung von 0·1 sek stört schon sehr. Dies kommt in großen Räumen in Betracht; eine stark reflektierende Wand in 16 m Abstand von der Schallquelle bedingt schon solche schädliche Verspätung („Nachhall", 30). Die Rückwände in großen Konzertsälen müssen daher Bekleidung mit schlecht reflektierenden, weichen Stoffen erhalten (36) und zwar in genügender Dicke (38); auch genügend grobe Unebenheiten, wie sie die „Lauben" im Theater bilden, schützen vor Nachhall, und der mit Menschen rauh gefüllte Saal gibt weniger Nachhall als der leere.

38. Eindringen des Schalles ins andere Medium. — Wenn eine Fläche schlecht reflektiert, so durchdringt sie der Schall; er setzt sich im anderen Medium fort. Dies entspricht dem Energiegesetz; denn die im reflektierten Schall fehlende Energie muß anderswo sich finden.

Watte und Tuch, die wenig reflektieren (36), lassen den Schall eindringen; man kann ihn hinter einer einfachen oder auch doppelten Tuchschicht leicht mit der Flamme nachweisen. Tuch, hinter welchem eine Glasplatte ist, zeigt sich scheinbar reflektierend; in Wirklichkeit reflektiert die Glasplatte, zu und von welcher der Schall durch das Tuch geht; eine 4fache Lage von Tuch ist auch mit der Glasplatte unwirksam, zum Zeichen daß durch 2mal 4faches Tuch kein merklicher Schall geht.

In Glas oder Metall, die fast vollkommen reflektieren, dringt wenig Schall aus der Luft ein.

39. Schallfortpflanzung in festen und flüssigen Körpern. — Ist Schall in einen festen Körper gebracht, etwa wenn die Schallquelle in seinem Inneren oder an ihm befestigt ist, so findet die Fortpflanzung um so besser statt, je vollkommener elastisch der Körper ist (M 254). Befestigt man z. B. eine Spieldose am einen Ende eines viele Meter langen Eisenstabs, so hört man den Schall am anderen Ende mit großer Stärke, wenn man das Ohr an den Stab legt oder die Zähne daran beißt; im letzteren Falle gelangt der Schall durch die Zähne und Kopfknochen zum Ohr. Läßt man den Stab in ein großes, quer an ihm befestigtes Blech enden, so geht der Schall aus dem Stab in das Blech und von diesem in die Luft über, weithin hörbar; der bloße Stab hat zu wenig Berührungsflächen mit der Luft zu solchem Übergang.

Im festen Körper kann die Fortpflanzung sowohl in Längs- als auch in

Querwellen stattfinden (16). Bei der Wiederabgabe an die Luft kommen im erwähnten Falle des Stabes mit dem Blech aus leicht verständlichem Grunde nur Längswellen in Betracht.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit besonders der Längswellen in stabförmigem festem Körper kann leicht auf einem Umwege gemessen werden (102); sie ist meist viel größer als in Luft, stimmt aber vollkommen mit der aus Elastizitätsmodul und Dichte zu berechnenden Geschwindigkeit (Gl. 8 und 11) überein.

Durch feste Körper fortgepflanzten Schall bieten z. B. auch Kanonenschüsse, die man mit dem Ohr am Erdboden auf größere Entfernungen und auch früher hört als durch die Luft. Herztöne und Atemgeräusche hört der Arzt durch die Brustwandung.

Auch in Wasser ist die Schallfortpflanzung sehr gut. Eine unter Wasser versenkte Glocke am einen Ende eines großen Sees kann Signale geben, die man am anderen Ende mittels eines Hörrohres aus dem Wasser hören kann. In dieser Weise ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im reinen Wasser des Genfer Sees zu 1440 m/sek gemessen worden. Dies stimmt wieder vollkommen überein mit der für Wellen — die im Wasser nur longitudinal sein können (16) — aus Dichte und Kompressibilität im Sinne von Gl. 8 berechneten Geschwindigkeit. Vom Meeresboden wird von oben heruntergesandter Schall reflektiert, und man kann aus der Zeit bis zu seiner Rückkehr die Meerestiefe finden („Echolot").

40. Schallabsorption. — In unvollkommen elastischen Medien, weichen Körpern (M 275), nimmt die Schallenergie ab; es geht die kinetische Energie der bewegten Mediumsteile durch innere Reibung in Wärme über, wie beim unelastischen Stoß (M 277) und wie auch sonst beim Verschwinden von Wellen (19). Am meisten findet das in inhomogenen Körpern statt, wo verschieden schnell bewegte Teile, wie Luft und Gewebe im Tuch, dicht nebeneinander sind.

Man bezeichnet solche nicht durch divergente Ausbreitung verursachte Intensitätsabnahme als Absorption in Analogie zur gleichen Bezeichnung beim Licht (O 84).

In Tuch wird Schall schon auf geringen Strecken absorbiert. Ebenso ist es in Filz oder Watte (38). Schall-absorbierende Stoffe („Schallisolierstoffe") sind wichtig in Gebäuden, um unerwünschte Schallausbreitung durch Wände und Decken zu verhindern. Die Schwierigkeit liegt dabei darin, daß gut schallabsorbierende Stoffe meist nicht die für Baustoffe erwünschte Festigkeit besitzen.

Die Absorption steigt im allgemeinen mit der Schwingungszahl. Bei den unhörbaren Tönen höchster Schwingungszahlen tritt noch eine besondere Absorption in Luft als Folge der innermolekularen Bewegungen auf (48).

41. Es sind im Bisherigen schon so viele Nachweise der Wellennatur des Schalles gegeben, besonders auch durch die Übereinstimmung der mit dem Ohr gemessenen Schallgeschwindigkeiten in Luft, Wasser und anderen Körpern mit den für Wellen berechneten Geschwindigkeiten (24, 26, 39), daß wir die Beibringung weiterer Beweisstücke, welche die Interferenzerscheinungen bieten, ebenso auch die Behandlung sonstiger für Wellen charakteristischer Schallvorgänge auf später verschieben können (68—91).

Wir wenden uns jetzt passender zum Studium der Eigentümlichkeiten des Ohres als Schallwahrnehmungsorgan. Dabei kommen die Schallwellen sogleich mit allen Einzelheiten zur Untersuchung.

III. Deutung der Schallwahrnehmungen.

42. Unterscheidung verschiedener Schallwahrnehmungen. — Die dem Gehör allenthalben sich bietenden Schallwahrnehmungen, Schallempfindungen, sind außerordentlich verschiedenartig. Jede dieser Wahrnehmungen soll von kundigem Ohr richtig deutbar sein auf die Art und Besonderheit der Schallwelle, die da ans Ohr gekommen ist. Dies zu erreichen, ist vor allem eine Einteilung der verschiedenen Wahrnehmungen erforderlich. Der erste Schritt hierzu ist die Sonderung in Geräusche und Töne. Beide müssen, wie jeder Schall, irgendwelche Druckschwankungen in der Luft sein (18), die entsprechende Bewegungen der feinen Bestandteile des Ohres zur Folge haben und dadurch gehört werden.

Geräusche sind ihrer Entstehung nach als mehr oder weniger unregelmäßige Druckschwankungen zu erwarten. Ein Wagen, der mit harten Rädern auf rauher Straße fährt, kommt in sehr unregelmäßiges Erzittern; ebensolches Erzittern und entsprechende Druckschwankungen teilt er auch der Luft mit, und diese werden als „Rasseln" gehört. Ebenso erzeugen die unregelmäßig bewegten Wassermassen am Fuße eines Wasserfalles „Getöse" oder „Rauschen" oder „Plätschern", was alles Geräusche sind.

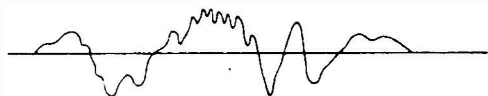


Abb. 14. Geräusch.

Quellen von Tönen sind dagegen immer in regelmäßiger Wiederholung schwingende Massen; eine Saite, eine Stimmgabel ist ersichtlich in solcher Bewegung. Töne sind daher ohne Zweifel Wellenzüge (5) in der Luft.

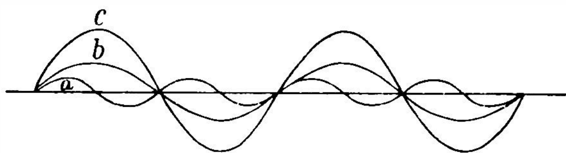


Abb. 15. Töne.

In unserer Drucklinendarstellung (18) ist daher Abb. 14 ein Geräusch, während die drei Sinuslinien der Abb. 15 Töne sind, d. h.: wenn die eine Druckschwankung ans Ohr kommt, hören wir ein Geräusch, wenn die anderen kommen, Töne.

Das Unregelmäßige der Geräusche macht eine weitere Einteilung bei denselben schwer; doch gibt es Geräusche in sehr großer Mannigfaltigkeit, wie außer den schon genannten Beispielen das Zischen, Poltern, Brummen, Knallen, Donnern u. s. f. Außerdem sind auch alle Konsonanten (Mitlaute) der Sprache, wie das s, r, m u. s. f. Geräusche, während die Vokale (Selbstlaute) Töne sind. Jeder dieser verschiedenen Geräusche-Arten muß ein besonderer Drucklinienverlauf entsprechen. Wir werden uns damit später befassen (67). Indem wir jetzt das Einfachere, die Töne, vorwegnehmen, wird sich zeigen, daß die Eigen-

tümlichkeiten der Geräusche ziemlich von selbst verständlich sind und nichts wesentlich Neues mehr bieten (54).

43. Töne dreifach verschieden. — Eine durchgreifende Einteilung der Tonwahrnehmungen oder Tonempfindungen ist leicht zu treffen. Zwei beliebige Töne können in ihrer vom Ohr zu erfassenden Beschaffenheit dreifach verschieden erscheinen, nämlich nach Stärke, Höhe und Klangfarbe. Dreifach unendlich ist in dieser Weise das Bereich der Tonempfindung. Die Unterschiede der Stärke oder Intensität und auch die der Höhe, letztere in der Notenschrift der Musik bestimmt festgelegt, sind allgemein bekannt. Etwas entlegener sind die Unterschiede der Klangfarbe. Es ist aber kein Zweifel, daß zwei Töne gleicher Höhe und gleicher Stärke sehr wohl noch Unterschiede zeigen können, z. B. wenn der eine gesungen, der andere auf der Violine gespielt ist; sie unterscheiden sich nach „Klangfarbe".

Diesen dreierlei Empfindungsunterschieden müssen dreierlei Unterschiede in den ans Ohr kommenden Wellenzügen entsprechen, und es ist die Frage, in welchen drei Weisen zwei Wellenzüge voneinander verschieden sein können. Die Antwort ist: In Amplitude, in Länge und in Form, und dies wird im weiteren eingehend zu verfolgen sein.

1. Schallstärke oder Intensität.

44. Energie und Amplitude. — Schallstärke ist durch die Energie der Wellen einwandfrei bemessen (20). Für Töne, die Wellenzüge sind, ist die in der Zeiteinheit senkrecht auf die Flächeneinheit fallende Energie das absolute Intensitätsmaß. Die Energie der Wellen ist aber durch deren Amplitude bedingt; man kann daher auch sagen: maßgebend für die Tonstärke ist die Amplitude.

Bei Sinuswellen ist die Energie proportional dem Quadrat der Amplitude. Dies ist am einfachsten einzusehen, wenn man die schwingenden Mediumsteile im Augenblick der Gleichgewichtslage betrachtet, wo ihre ganze Energie kinetisch und daher proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist. Die Geschwindigkeit ist aber bei Sinusbewegung proportional der Amplitude (M 168), und daher ist die Energie auch proportional dem Quadrat der Amplitude. Dies gilt nicht nur für die Gleichgewichtslage, sondern für die ganze Zeit der Schwingung, weil die mit der Welle den Mediumsteilen gebotene Energie in den anderen Zeiten nur teilweise bis ganz die potentielle Form annimmt ohne die Menge zu ändern, wie bei jeder Pendelschwingung[1]).

Da auch die Drucke proportional den Amplituden sind, ist auch in der gewöhnlichen Druckdarstellung (18) die Intensität durch das Quadrat der Amplitude gegegeben. Es haben daher die 3 Töne a b c der Abb. 15 mit den Amplituden 1, 2, 4 Intensitäten, die wie 1:4:16 sich verhalten.

Absolute Messungen von Schallstärken, in erg/cm²sek (M 192), sind schwierig wegen der Kleinheit der Energiemengen allen Schalles, der für das Ohr nicht geradezu verderblich ist; denn die Energieempfindlichkeit des Ohres ist außerordentlich groß. Man kann die Amplituden einer Telephonmembran nach den gut ermittelbaren elektrischen Stromstärken angeben, auch wenn sie mikroskopisch nicht mehr meßbar sind. Wird das Telephon dicht ans Ohr gehalten, so empfängt dasselbe Luftamplituden von ebensolchen sehr geringen

[1]) Die durchgeführte Rechnung ist im Anhang zur Akustik unter VIII zu sehen.

Größen, die bei mittleren Schwingungszahlen, z. B. 1000 je sek gut hörbar sind. Eine solche Amplitude von beispielsweise 10^{-5} mm gibt Druckschwankungen von rund 10^{-3} dyn/cm² (etwa 10^{-6} mm Quecksilberdruck) und eine absolute Intensität von rund 10^{-8} erg/cm²sek. Amplituden von 0·01 mm werden bei mittleren Schwingungszahlen schon sehr laut gehört. Bei sehr großen und sehr kleinen Schwingungszahlen sinkt die Empfindlichkeit herunter bis zum Verschwinden an den Hörbarkeitsgrenzen (1, 48).

Das zuverlässigste Maß für absolute Schallintensität ist der Schalldruck (87).

2. Tonhöhe.

45. Wellenlänge, Schwingungszahl. — Das Bezeichnendste für einen Ton ist seine Höhe, für eine Welle ihre Länge. Es ist daher fast selbstverständlich, daß es die Länge der Schallwellen ist, die man als Tonhöhe hört.

Mit der Wellenlänge λ hängt über die Schallgeschwindigkeit v die Schwingungsdauer T nach der einfachen Gleichung (5) $v = \lambda/T$ zusammen; es kann daher, wegen der für alle Töne gleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit v (25), an Stelle der Wellenlänge auch die Schwingungsdauer eines Tones als bestimmend für seine Höhe angegeben werden, und statt der Schwingungsdauer T kann auch die Schwingungszahl $n = 1/T$ angegeben werden.

Die drei miteinander verbundenen Größen Wellenlänge, Schwingungsdauer, Schwingungszahl sind es daher, die als Tonhöhe zur Wahrnehmung kommen; und zwar entsprechen kurze Wellen, kleine Schwingungsdauern, große Schwingungszahlen den hohen Tönen, und lange Wellen, große Schwingungsdauern, kleine Schwingungszahlen den tiefen Tönen.

Dies ist leicht festzustellen. Fährt man mit den Fingernägeln über einen regelmäßig gerauhten Gegenstand, so entsteht bei langsamer Handbewegung ein tiefer, bei schneller ein hoher Ton. Die Schwingungszahl ist dabei gegeben durch die Zahl der Einsenkungen der Hand in die Vertiefungen der Unterlage während einer Sekunde; denn bei jeder Einsenkung erhält die Luft einen Stoß. Aus solchen Erfahrungen war schon Galilei der Zusammenhang von Tonhöhe und Schwingungszahl bekannt.

Von den 3 Größen λ, T, n sind Schwingungsdauer T und Schwingungszahl n durch die Schallquelle gegeben (4); die Wellenlänge λ aber richtet sich nach der dem vorhandenen Medium eigenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und ist dieser gemäß Gl. 5 proportional. Versetzt man die Schallquelle mit unveränderter Schwingungszahl in ein anderes Medium, z. B. unter Wasser oder auch in Luft von anderer Temperatur, so gibt sie somit Wellen von anderer Länge aus; dennoch hört das Ohr stets nur dieselbe Tonhöhe. Das Ohr wird auch nicht von der herankommenden Wellenlänge beeindruckt, sondern von der Anzahl der Stöße, die das Trommelfell in der Zeiteinheit erhält, d. i. von der Schwingungszahl. Daher ist es die Schwingungszahl, die als stets, ohne weiteres und eindeutig bestimmende Angabe für die Tonhöhe festzuhalten ist.

Schwingungszahlen werden immer für die Sekunde angegeben[1]);

[1]) Die Einheit der Schwingungszahlen ist daher sek^{-1}. Es ist überflüssig, dafür ein besonderes Wort einzuführen, als wäre der Zusammenhang mit der Sekunde nicht einfach genug. Die vielen willkürlich eingeführten Gedächtniswörter verdecken zunehmend die Einfachheit der naturgegebenen Zusammenhänge. Aus dem Studium der Natur wird ein Wortstudium.

ihr Reziprokes gibt dann die Schwingungsdauer in Sekunden. Statt Schwingungszahl wird manchmal „Frequenz" gesagt.

46. Lückenlose, unbegrenzte Tonhöhenreihe. — Ein vollkommen zuverlässiges Mittel, Töne von beliebigen, feststellbaren Schwingungszahlen hervorzubringen, ist die „Sirene". Sie besteht (Abb. 16) aus einer zylindrischen Büchse B, die von unten Druckluft erhält und an deren kreisförmigem Deckel D D ein Kranz gleichabstehender Löcher sich befindet; zwei der Löcher erscheinen in der Abbildung im Querschnitt bei l l. Über diesem Deckel befindet sich in geringem Abstand eine ihm gleiche, aber um die Achse x bewegliche Scheibe S S mit ebensovielen Löchern. In geeigneter Stellung dieser Scheibe stimmen ihre sämtlichen Löcher mit den darunter befindlichen des Deckels überein, so daß die Luft freien Austritt hat. Ist die Scheibe in Drehung, so kommen während einer Umdrehung so viel Luftstöße aus den Löchern als deren Zahl beträgt, und diese Luftstöße werden als Ton gehört, wenn sie genügend schnell einander folgen; ihre Zahl in der Sekunde ist die Schwingungszahl des Tones. Sie kann jederzeit aus der Drehzahl der Scheibe ermittelt werden, wozu deren Achse ein (in der Abbildung nicht dargestelltes) Zählwerk trägt. Die Drehung der Scheibe wird durch die Luft selbst besorgt, wenn die Löcher schief gebohrt sind, wie es in einem Schnitt längs la senkrecht zur Zeichnungsebene in der kleinen Nebenabbildung S'D' dargestellt ist. Diese ursprünglich zu akustischen Studien erfundene Sirene wird, mit Dampf betrieben, auch als weithin hörbares Signalmittel verwendet.

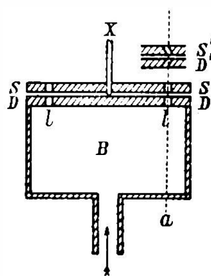


Abb. 16. Sirene.

Läuft die Scheibe von der Ruhe aus mit allmählich gesteigerter Geschwindigkeit, so hört man einen aus der Tiefe aufsteigenden Ton, der immer höher wird, solange die Scheibe noch schneller läuft. Es zeigt sich so, daß es unendlich viele verschiedene Tonhöhen gibt, die eine lückenlose Reihe bilden, so wie auch die Schwingungszahlen in beliebig kleinen Bruchteilen stetig aneinanderschließend abgestuft werden können.

47. Ermittelung von Schwingungszahlen. — Soll mittels der Sirene die Schwingungszahl eines aus irgendwelcher Quelle hörbaren Tones bestimmt werden, so ändert man die Drehzahl der Sirenenscheibe so lange, bis ihr Ton mit dem zu untersuchenden übereinstimmt, wofür das Ohr sehr empfindlich ist, und hat dann aus der Drehzahl und Lochzahl die gesuchte Schwingungszahl.

Es gibt noch viele andere Wege zur Ermittelung von Schwingungszahlen, auf die wir gelegentlich kommen, sowohl mit Ausschaltung des Gehörs (aus Wellenlängenmessungen, 77, 80), als auch ganz allein mit dem Ohr (70, 73).

Bei gut sichtbaren Amplituden kann die Ermittelung auch an der Schallquelle selbst erfolgen; so an einer Stimmgabel, wenn man sie mittels einer an der Zinke befestigten Borste ihre Schwingungen auf eine Rußtrommel schreiben läßt und die zwischen zwei Sekundenmarken liegende Wellenzahl abzählt (M 34).

48. Grenzen der Hörbarkeit. — Mit der Sirene bemerkt man schon, daß nicht beliebig kleine Schwingungszahlen gehört werden können. Besser geeignet zur Ermittelung der so angezeigten unteren Hörgrenze sind große Stimmgabeln (99), deren Schwingungszahlen durch Laufgewichte an ihren Zinken geändert werden können. Man findet so, daß die Schwingungszahl 16 eben noch als

tiefes Brummen gehört werden kann, aber nur bei sehr großer Amplitude. Der Ton heißt in der Musik „Subkontra C"; nur die Orgel hat ihn, in ihren größten Pfeifen, zu tiefster Baßbegleitung (vgl. Tab. 12).

Die obere Hörgrenze erreicht man am besten mit einer kleinen, verstellbaren gedeckten Pfeife (105, „Grenzpfeife"); es zeigt sich, daß man bis zu etwa 16000 Schwingungen noch hört. Die Musik wendet indessen so hohe Töne nicht an (vgl. Tab. 12), weil das Ohr von etwa 4000/sek aufwärts kaum mehr Tonhöhenunterschiede merkt. Grillen und andere Insekten verständigen sich durch so hohe Töne („Zirpen"), die sie durch Reiben ihrer Beine oder anderer kleiner Körperteile erzeugen. Im Alter geht die Hörgrenze stark herunter.

Äußerst hohe unhörbare Töne („Ultraschall") von großer Intensität erhält man von schwingenden Kristallplatten bei elektrischer Erregung (102, E 113). So hohe Töne werden in Luft auffallend stark absorbiert, viel weniger in Flüssigkeiten, nicht in Edelgasen[1]); sie liefern scharfe Schallstrahlen (29).

Tab. 12.

Tonumfang der Musik	Schw.-Zahl n	Wellenlänge λ in Luft	[* a′, n = 426·6]
Subkontra C	16	rd. 20 m	
Kontra C	32	10	Orgel
Groß C	64	5	Kontrabaß
Klein c	128	2·5	
1fach gestrich. c′	* 256	1·3	Klavier
2 „ „ c″	512	0·7	Flöte, Klarinette; Violine
3 „ „ ‴	1024	0·4	
4 „ „ c⁗	2048	0·2	Pikelflöte
5 „ „ c′′′′′	4096	0·1	

49. Zusammenklänge. — Besondere Schallempfindungen ergeben sich beim gleichzeitigen Erklingen, ebenso auch bei unmittelbarem Nacheinandererklingen verschiedener Töne („Harmonie" und „Melodie"). Die Musik ist auf diese Empfindungen gebaut (vgl. 112). Auch dies sind Naturdinge, und die Frage nach der Beschaffenheit der Wellen, die solche Empfindungen sehr bestimmter Art hervorbringen, ist ebenso Gegenstand der Naturforschung wie alle ihre anderen Fragen, die auch nur auf sinnlich wahrnehmbare, aber von den Sinnen nicht unmittelbar enträtselte Vorgänge sich beziehen.

Sehr geeignet zum Studium von Zusammenklängen ist eine Sirene (46) mit mehreren Lochkreisen — es seien deren Lochzahlen 8, 10, 12, 16 —, wobei Ventile nach Willkür nur einzelne oder mehrere dieser vier Lochkreise mit Luft zu versehen gestatten („Akkordsirene"). Das Besondere der Sirene ist hierbei die Unfehl-

[1]) Die Absorption in den mehratomigen Gasen hängt wohl mit der Verwandlung und Rückverwandlung von molekularer und innermolekularer Bewegung (W 121, 128) bei den Erhitzungen und Erkaltungen (Verdichtungen und Verdünnungen W 61) in der Welle zusammen. Ist die Rückverwandlung bei so sehr schnellen Geschwindigkeitsänderungen der Moleküle unvollständig, so muß Schallenergie an innermolekulare Energie und damit zuletzt an Wärme verloren gehen.

barkeit des Schwingungszahlenverhältnisses der zusammenklingenden Töne. Die erste und letzte Lochreihe zusammen müssen so bei jeder Laufgeschwindigkeit stets Töne mit Schwingungszahlen geben, die unfehlbar genau im Verhältnis 8:16 = 1:2 stehen, die erste und zweite zusammen Töne mit dem Schwingungszahlenverhältnis 8:10 = 4:5 u. s. f. Man ist, in der Ausdrucksweise der Musik, bei der Sirene stets der vollkommen „reinen Stimmung" sicher; ihre Klangfarbe ist freilich etwas seltsam. In anderer, einfacherer Klangfarbe geben Stimmgabeln Töne mit ebenfalls zuverlässigen Schwingungszahlen, freilich aber ohne den Vorteil der Einstellung auf beliebige Tonhöhen.

Alle nachfolgenden Feststellungen über Zusammenklänge (50—53) können mit einer Akkordsirene oder mit einer genügenden Anzahl gut abgestimmter Stimmgabeln gemacht werden, die in der erläuterten Weise reine Beobachtungen gestatten; aber auch andere Tonquellen mit genügender Mannigfaltigkeit von Schwingungszahlen zeigen dasselbe. Dabei kann man sowohl gleichzeitiges als auch kurz aufeinanderfolgendes Erklingen von Tönen prüfen. Wichtiger, weil von einfacherer Bedeutung ist jedenfalls das erstere, weil dabei das beim Nacheinanderklingen offenbar mitwirkende Gedächtnis ausgeschaltet ist.

Je zwei Töne verschiedener Schwingungszahl bilden miteinander eine „Tonstufe", auch „musikalisches Intervall" genannt.

50. Oktave. — Die allereinfachste Empfindung des Zusammenklanges geben unter allen Umständen zwei Töne, deren Schwingungszahlen wie 1:2 sich verhalten; sie klingen wie selbstverständlich zusammen; der höhere Ton scheint nur eine Verstärkung oder Verzierung des tieferen zu sein. Einzeln nacheinander klingend geben sie fast die gleiche Empfindung, so daß sie bei einigem zeitlichen Abstand sogar leicht miteinander verwechselt werden können. Und zwar trifft dies alles in jeder beliebigen Höhenlage der zwei Töne zu, was am unmittelbarsten bei Veränderung der Laufgeschwindigkeit der Akkordsirene feststellbar ist; es kommt nur darauf an, daß das Verhältnis der Schwingungszahlen 1:2 eingehalten ist.

Dieses Intervall mit dem Schwingungszahlverhältnis 1:2 wird in der Musik die „Oktave" genannt, und es entspricht diesem einfachsten Zahlenverhältnis auch der einfachste Gehöreindruck. Der Musiker nennt den Ton mit der verdoppelten Schwingungszahl, weil sein Dazuklingen fast nichts Neues bietet, „denselben Ton, nur eine Oktave höher", und da Töne mit Buchstaben bezeichnet werden, erhält er auch denselben Buchstaben.

Tab. 12 gibt den ganzen in der Musik benutzten Tonhöhenumfang in Oktaven abgeteilt. Der tiefste Ton mit n = 16/sek ist als „Subkontra" oder „zweifach unterstrichenes" C bezeichnet, und alle höheren Töne mit jedesmal verdoppelter Schwingungszahl heißen dann auch c, wenn auch mit den in der Tabelle angegebenen Unterscheidungen. Man sieht, daß die Musik im ganzen 8 Oktaven zur Verfügung hat; jede derselben wird nach ihrem tiefsten Ton benannt. Neben den Schwingungszahlen sind in der Tabelle die zugehörigen Wellenlängen in Luft (abgerundet) angegeben, und ganz rechts andeutungsweise der Tonumfang einiger musikalischer Instrumente. Den ganzen Umfang besitzt nur die Orgel.

Da der Verdoppelung der Schwingungszahl eine Halbierung der Wellenlänge entspricht, geben in der Abb. 15 die Wellen b und a oder c und a zusammen eine Oktave; b und c geben gleiche Tonhöhe, nur in verschiedener Stärke.

Das Ohr ist äußerst empfindlich für die „Reinheit" der Oktave; es werden schon sehr geringe Abweichungen des Schwingungszahlenverhältnisses von 1:2 stark merklich durch Störung des Wohlklanges. Wir untersuchen dies später im einzelnen (54, 72), bemerken aber sogleich die hohe Brauchbarkeit des Ohres zur Kontrolle von Schwingungszahlen, und es zeigt sich, daß dies nicht allein nur für das Verhältnis 1:2 gilt.

51. Verhältnis der Schwingungszahlen maßgebend. — Untersucht man mit Sirene oder Stimmgabeln andere Schwingungszahlverhältnisse im Zusammenklang, so findet man, daß durchweg wieder — wie bei der Oktave — nur das Verhältnis, der Quotient — nicht etwa der Unterschied, die Differenz — der Schwingungszahlen maßgebend ist für den Gehöreindruck. Nur sind es sehr verschiedene Eindrücke, die bei den anderen Schwingungszahlverhältnissen auftreten.

Dem entsprechend ist auch für die musikalische Bedeutung eines Intervalls und damit auch für den Namen, den es in der Musik erhält, nur das Verhältnis der Schwingungszahlen maßgebend, unabhängig von der absoluten Höhe.

Tabelle 13 enthält im oberen Teil die Namen der verschiedenen Intervalle, die Zusammenklänge bemerkenswerter Art geben, und daneben die zugehörigen Verhältnisse der Schwingungszahlen.

Tab. 13.

Musikalische Intervalle	Verhältnisse der Schwingungszahlen
Oktave	1:2
Quint	2:3
Quart	3:4
Terz (große)	4:5
Sext	3:5
Kleine Terz	5:6
Kl. halber Ton	24:25
Komma	80:81

Diese allgemeine Wichtigkeit des Verhältnisses der Schwingungszahlen war schon Galilei bekannt.

52. Übergang zur Dissonanz. — Keines der übrigen Intervalle der Tab. 13 gibt den einfachen Eindruck der Oktave, und zwar wird der Eindruck um so verwickelter, eigenartiger, je größer die kleinsten ganzen Zahlen sind, die das Verhältnis der Schwingungszahlen angeben. Bei der Oktave kommt keine höhere Zahl als 2 vor, bei der Quint schon 3, bei der Terz 5. Die kleine Terz mit der Zahl 6 ist schon ein sehr bemerkenswerter Übergang zu einem nicht mehr als glatt empfundenen, deutlich getrübten Zusammenklang; sie klingt düster, schwermütig; sie ist in der Musik das Grundlegende der „Moll"-Tonarten, so wie es die große Terz für „Dur" ist. Die große Terz nach der kleinen klingt wie die Beseitigung einer Trübung, wie die Lösung eines Widerspruchs.

Geht man zu Intervallen mit noch größeren Zahlen als 6 in ihrem Schwingungszahlverhältnis, so verliert der Eindruck schnell allen Wohlklang; man ist

beim Übergang zum Mißklang, von der „Konsonanz“ zur „Dissonanz“. Verhältnisse wie 8:9 oder 15:16 geben schon volle Dissonanz. Weiteres über Dissonanz s. unten 54, 67, 71.

Wie die Einfachheit des Eindrucks der Intervalle, so nimmt auch die Empfindlichkeit des Gehörs für deren Reinheit stark ab mit dem Steigen der Zahlen ihrer Schwingungsverhältnisse. Nächst der Oktave ist noch die Quint, wenn „falsch“, sehr auffallend, weniger schon Quart, Sext und Terz; für die Genauigkeit von Intervallen wie 8:9 oder 15:16 gibt das Ohr gar keinen Anhalt.

53. *Beschränktheit der wohlklingenden Intervalle.* — Alle bisher betrachteten Intervalle liegen innerhalb der Oktave, d. h. die Schwingungszahlen ihrer Töne liegen einander näher als beim Verhältnis 1:2. Geht man zu Intervallen außerhalb der Oktave, wie z. B. 1:3, 1:4, 1:5 usw., so findet man Wohlklänge wieder nur bei Schwingungszahlen, die im Verhältnis möglichst kleiner ganzer Zahlen stehen. Ersetzt man dabei den tieferen Ton durch eine seiner höheren Oktaven, so daß die beiden Töne wieder innerhalb eine Oktave zu liegen kommen, so ändert dies den Wohlklang nicht wesentlich; das Schwingungszahlenverhältnis 1:5 beispielsweise gibt etwa denselben Wohlklang wie 4:5. Man hat daher in den bereits betrachteten, innerhalb einer Oktave liegenden Zusammenklängen schon die ganze Auswahl der überhaupt möglichen Wohlklänge, wenn man zu den hierdurch gegebenen Tönen noch die höheren und tieferen Oktaven hinzunimmt. Man kann dies noch besonders nachprüfen, indem man zu einer beliebigen, forttönenden, festgehaltenen Schwingungszahl allmählich von der Tiefe zur Höhe steigende Schwingungszahlen, wie etwa die Sirene sie gibt, erklingen läßt und die Gehöreindrücke beachtet. Es ist allein nur der Eintritt jener besonderen Intervalle als Wohlklang auffallend; alles andere ist Mißklang. So wie die kleinen ganzen Zahlen nur wenige sind im Vergleich zu allen übrigen Zahlen, so sind auch die wohlklingenden Intervalle nur wenige unter den überhaupt möglichen Intervallen.

Diese Beschränktheit der wohlklingenden Intervalle ist *grundlegend für das Verständnis der von der Musik zu ihrem Gebrauche getroffenen Auswahl von Tonhöhen* (55).

Alles dies sind Eigentümlichkeiten unseres Gehörs, Eigentümlichkeiten unseres Innern also, denen wir noch später nachgehen (112); in gewissem Maße sind sie aber schon ohne weiteres bedingt durch die Eigentümlichkeiten der Wellen der Zusammenklänge, die wir nun sogleich (54) und auch noch später (71, 72) betrachten.

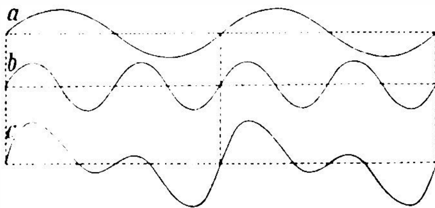


Abb. 17. Oktave 1:2.

54. *Wellenformen der Zusammenklänge.* — Um zu erfahren, was in der Luft vorgeht, wenn zwei oder mehr Töne gleichzeitig erklingen, ist es nur nötig, die Wellenlinien der Einzeltöne zu addieren. Denn Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Kräfte und also auch Drucke *überlagern einander ungestört* (M 45), was für die Schallwellen noch besonders durch die Interferenzen nachgewiesen wird (33).

Abbildung 17 zeigt solche Additionen in Sinuswellen für die *Oktave*. a ist die

Wellenlinie des „Grundtones", b die seiner Oktave, c die Summe beider, erhalten an jedem Punkte aus Abmessung der senkrecht darüber befindlichen Ordinaten von a und b mit dem Zirkel und Zusammentragung beider mit Größe und Richtung. Man sieht, daß die Welle der Oktave, die Summe zweier Sinuswellen, keine Sinuswelle mehr ist; ihre besondere Form ist vom gewählten Intensitätsverhältnis (1:1 in der Abbildung) der beiden Töne und auch von ihrer Phasenstellung abhängig (vgl. 65 und Abb. 22). Das zunächst Wesentliche ist aber, daß c in allen Fällen, unabhängig von diesen Besonderheiten, dieselbe Wellenlänge hat, wie a; es kehrt in c auf derselben Strecke, bezeichnet durch die punktierten Vertikalen, die gleiche Druckverteilung wieder, wie in a. Der Zusammenklang der Oktave hat also dieselbe Wellenlänge wie der Grundton, und dem entspricht die Gehörempfindung, daß der Zusammenklang noch dasselbe sei, wie der Grundton, dieselbe Tonhöhe, nur etwas verziert, nur in der Klangfarbe geändert (50).

Bei der Quint ist es schon anders, wie Abb. 18 zeigt. Hier hat der Zusammenklang eine Wellenlänge, die gleich ist 2 Wellenlängen des Grundtons, d. i. gleich der Wellenlänge von dessen tieferer Oktave. Die Quint wird dementsprechend keineswegs mehr ähnlich dem Grundton empfunden; eher kann man die tiefere Oktave des Grundtons mittönend vermeinen, die bei Quinten in der Tiefe der Groß-C-Oktave (Tab. 12) als ein gewisses Brummen auch deutlich hörbar ist.

Untersucht man ebenso die Zusammenklänge der Intervalle der höheren Zahlen, so findet man — was aus den Zahlen auch von vornherein zu entnehmen ist —, daß die regelmäßige Wiederkehr der gleichen Zustände erst auf entsprechend längeren Strecken eintritt. Es wachsen somit die dem Zusammenklang entsprechenden Wellenlängen. Bei der Quart (3:4) und Sext (3:5) ist die Wellenlänge die 3-fache des Grundtones, bei der Terz (4:5) die 4-fache; allgemein wird die Vervielfältigung durch die dem Grundton zugehörige Zahl im Schwingungszahlenverhältnis des Intervalls angegeben.

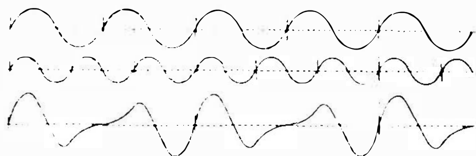


Abb. 18. Quint 2:3.

Man sieht so, daß Intervalle wie 8:9 oder gar 15:16, die übel klingen (52), dem Ohr Druckschwankungen bieten, die erst auf langer Strecke (8, bzw. 15 Wellenlängen des tieferen Tones) überhaupt regelmäßige Wiederkehr, d. i. Toneigenschaft (42) zeigen; sie könnten fast ebenso gut ohne Regelmäßigkeit sein, d. i. Geräusche sein. Man sieht so, daß der Übergang von Konsonanz zu Dissonanz einem Übergang von Tönen zu Geräuschen gleichkommt (67).

Als besonders bemerkenswert in dieser Beziehung sei noch der „Durdreiklang" oder „Vierklang" (Dur-„Akkord", c, e, g, c′ in der Musikbezeichnung) mit dem „Mollvierklang" (Mollakkord, c, es, g, c′) verglichen. Letzterer entsteht aus dem ersteren durch Vertauschung der großen Terz (c, e) mit der kleinen (c, es, vgl. 52), und man könnte meinen, daß die Trübung des Mollakkords allein schon durch das Vorhandensein einer kleinen Terz bedingt sei. Diese Erklärung verschwindet aber, wenn man bemerkt, daß auch im Durakkord eine kleine Terz ist (e, g), nur an anderer Stelle. Der wesentliche Unterschied der beiden Akkorde ist jedenfalls durch ihre Schwingungszahlenverhältnisse bedingt; diese sind in kleinsten Zahlen beim Durakkord 4:5:6:8, beim Mollakkord aber 10:12:15:20. Während also beim Durakkord schon nach 4 Wellenlängen des Grundtones Wiederholung eintritt, zeigt die Welle des Mollakkords diese Regelmäßigkeit erst nach 10 Wellenlängen des Grundtons. Man dürfte danach von vornherein erwarten, daß der Durakkord einfacher, befriedigender klingen wird als der Mollakkord.

55. Tonleiter. — Man kann innerhalb einer Oktave unendlich viele Tonhöhen einschalten (46). Die Musik[1]) verwendet aber nur eine beschränkte Auswahl dieser Töne aus drei Gründen: Erstens bedarf die Musik jedenfalls der mit dem Grundton wohlklingenden Töne; diese sind aber, wie wir sahen, nur wenige, so wie es nur wenige kleine ganze Zahlen gibt (53). Zweitens soll Musik mit einer beschränkten Zahl von Zeichen aufschreibbar sein. Drittens liegt eine Hauptbeschränkung in den Tonquellen der Musik mit Tasten oder Klappen, deren in einer Oktave nicht allzu viele unterzubringen sind. Das Ergebnis aller dieser Bedürfnisse und Umstände ist die gebräuchlich gewordene Tonfolge der Musik mit ihren Abwandlungen, den „Tonleitern" oder „Skalen".

Die grundlegende Tonleiter geht aus von 7 Tönen innerhalb der Oktave, so daß diese selbst der achte ist, wovon auch der Name dieses Intervalls herrührt. Tabelle 14 gibt diese Töne mit ihren gewöhnlichen Bezeichnungen (1. Zeile) und

Tab. 14. **Schwingungszahlen-Verhältnisse.**

c-dur	c	d	e	f	g	a	h	c′	d′	e′	f′	g′
	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3
	24	27	30	32	36	40	45	48				
g-dur					$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	3
					g	a ko.	h	c′	d′	e′	fis ko.	g′

ihren Schwingungszahlverhältnissen („relativen Schwingungszahlen") an, und zwar sowohl mit 1 für den Grundton c, somit 2 für seine Oktave c′ (2. Zeile), als auch in kleinsten ganzen Zahlen, mit 24 für c (3. Zeile). Die Betrachtung von bestimmten Schwingungszahlen in sek^{-1} ist nicht nötig, weil für den Gehöreindruck nur die Verhältnisse der Zahlen maßgebend sind (51); wollte man die Schwingungszahlen für die Klein-c-Oktave und weiter die c′-Oktave (Tab. 12) haben, so wären alle Zahlen der 2. Zeile mit 128 zu multiplizieren[2]). Aus der 3. Zeile sieht man, daß das Ansteigen der Schwingungszahlen in der Tonleiter ungleichmäßig ist; e und f stehen einander besonders nahe, a und h besonders fern. Diese Ungleichmäßigkeit hat ihren Grund darin, daß die Wahl der Töne durch die wenigen Wohlklänge festgelegt ist (53); man bemerkt, daß e die Terz des Grundtons ist ($1 : \frac{5}{4} = 4 : 5$), f die Quart, g die Quint, a die Sext (vgl. Tab. 13), und von der Stellung dieser Töne in der Tonleiter sind auch die Namen dieser Intervalle genommen. An diesen Tönen kann wegen des Wohlklangs zum Grundton c nichts geändert werden; sie bilden die Lichter in der Tonmalerei. Die beiden mit dem

[1]) Wir meinen mit „Musik" stets die entwickelte Musik der arischen Menschen (vg. 112); auf die Musik von Negern usw., die wenig wählerisch in den Schwingungszahlen ist, gehen wir nicht ein.

[2]) Man erhält dann für a′, den „Normal-a" genannten Ton (in Tab. 12 durch * angedeutet und rechts oben mit seiner Notenbezeichnung angegeben), die Schwingungszahl 426·66. . . . Diese einzige Angabe legt die Schwingungszahlen aller anderen Töne der Musik fest; alle Instrumente können nach einer solchen Normal-a-Stimmgabel gestimmt werden. Die Töne c aller Oktaven erhalten damit die in Tab. 12 angegebenen Schwingungszahlen. Wird das Normal-a (auch „Kammerton" genannt) anders gewählt (etwa mit der Schwingungszahl 435), so ändern sich im selben Verhältnis die Schwingungszahlen sämtlicher übrigen Töne; für die Musik ist das gleichgültig, abgesehen davon, daß etwa höchste Töne zu hoch, tiefste zu tief fallen können.

Grundton (und seiner Oktave) dissonanten Töne d und h (8:9, bzw. 8:15 oder 15:16, vgl. 52, 54) bilden die Schatten; nach ihrer Stellung in der Tonleiter werden sie auch „Sekund" bzw. „Septime" genannt. Diesen Dienst, Dissonanz mit dem Grundton c zu geben, könnten d und h auch mit anderen, benachbarten Schwingungszahlen tun (52); jedoch haben diese beiden Töne mit den in Tab. 14 verzeichneten Schwingungszahlen auch noch Gebrauchswert für Wohlklang; es bildet nämlich d mit g eine Quart, d′ mit g eine Quint, h mit g eine Terz, mit e eine Quint. Daher die Wahl der angegebenen Schwingungszahlen für g und h.

56. Harmonische Obertöne. — Die so innerhalb einer Oktave festgelegte Tonleiter ist durch Oktavenbildung beliebig nach unten und nach oben fortsetzbar. In Tab. 14 ist ein Stück der Fortsetzung nach oben angegeben. Man sieht, daß man mit g′ zum Ton mit der dreifachen Schwingungszahl des Grundtons, kurz „Ton 3" zu nennen, kommt; er ist Quint der Oktave oder auch „Duodezime" des Grundtons. Auch Ton 4 ist vorhanden; er ist die zweite Oktave des Grundtons. Ton 5 erscheint als Terz von 4 u. s. f.

Diese Reihe der Töne mit den nach den ganzen Zahlen vervielfältigten Schwingungszahlen eines Grundtones ist von besonderer Wichtigkeit für das Studium der Klangfarbe, wo wir dann darauf zurückkommen (65). Sie wird „harmonische Tonreihe" oder Reihe der „harmonischen Obertöne" (kurz „Obertöne") des Grundtons genannt; Tab. 15 gibt eine Übersicht bis zum Ton 20 mit den Schwingungszahlen zu c_1 (oder c′) als Grundton in der letzten Spalte. Nicht alle diese Töne kommen in der schon betrachteten Tonleiter und ihrer Fortsetzung vor; einige der Töne (7, 11, ...) stimmen überhaupt mit keinem der in der Musik gebrauchten Töne,[1]) was Tab. 15 durch Fehlen einer Tonbezeichnung anzeigt.

Tab. 15.

Harmonische Tonreihe.

Nr.	Ton	n (Tab. 12)	Nr.	Ton	n (Tab. 12)
1	c_1	256	11		2816
2	c_2	512	12	g_4	3072
3	g_2	768	13		3328
4	c_3	1024	14		3584
5	e_3	1280	15	h_4	3840
6	g_3	1536	16	c_5	4096
7		1792	17		4352
8	c_4	2048	18	d_5	4608
9	d_4	2304	19		4864
10	e_4	2560	20	e_5	5120

Die Wellenlängen der harmonischen Tonreihe verhalten sich, entsprechend den Schwingungszahlen, wie $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}\cdots$. Sind irgendwelche Töne dieser Reihe gleichzeitig mit dem Grundton vorhanden, so wird demnach dessen Wellenlänge nicht geändert; nur die Form der Wellen wird geändert, wie es schon

[1]) Ton 7 liegt z. B. zwischen ais_3 = 1777·8 und ais_3komma = 1800·02 (vgl. 57).

das Beispiel der Oktave zeigte (54, Abb. 17). Gemäß dieser Nichtänderung der Wellenlänge verderben die harmonischen Obertöne im Zusammenklang mit dem Grundton auch nicht dessen Toncharakter (54); daher auch der Name „harmonische" Obertöne.

57. Tonarten. — Die auf den Grundton c gebaute Tonleiter, wie in Tab. 14, wird c-dur-Tonleiter genannt; ersetzt man die große Terz e in ihr durch die kleine Terz (es genannt), d. i. $\frac{5}{4}$ durch $\frac{6}{5}$ (vgl. Tab. 13), so erhält man die c-moll-Tonleiter (vgl. 52, 54).

Die ausgebildete Musik benutzt jedoch viel mehr Töne in der Oktave. Sie verlangt zu jedem von ihr überhaupt benutzten Ton eine ebensolche Tonfolge, wie sie die c-dur (und c-moll)-Tonleiter zu c gibt, d. h. sie verlangt zu jedem Ton die Sekund, Terz, kleine Terz, Quart u. s. f. Dadurch entstehen die verschiedenen „Tonarten", d. h. Ton-Auswahlen, jede nach ihrem Grundton benannt, wie c-dur, c-moll, d-dur, g-dur u. s. f.

Ein Übergang von einer Tonart in eine andere in einem Musikstück wird „Modulation" genannt. Es ist das ein besonderes Ausdrucksmittel der Musik. Der Wechsel des Grundtons mit dem Auftauchen neuer, vorher nicht benutzter Töne in seinem Gefolge ist dem Gehör eindrucksvoll merklich.

Daß in der Tat für die genannten neuen Tonfolgen neue Töne erforderlich werden, sei am Beispiel von g-dur gezeigt (Tab. 14). Um von g, mit der relativen Schwingungszahl $\frac{3}{2}$, die Sekund, Terz usw. zu erhalten, hat man $\frac{3}{2}$ mit $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$ usw. zu vervielfältigen, wie es bei c-dur mit der Schwingungszahl 1 von c geschehen ist. Dadurch entsteht die in der 4. Zeile der Tab. 14 verzeichnete Folge von relativen Schwingungszahlen. Man sieht beim Vergleich mit Zeile 2, daß die Töne h, c′, d′, e′ aus c-dur auch für g-dur brauchbar sind, daß jedoch 2 neue Töne auftreten, nämlich $\frac{27}{16}$ und $\frac{45}{16}$, die in c-dur nicht vorkommen.

Führt man dies für alle Tonarten in dur und moll durch, so findet man eine große Zahl von Tönen innerhalb der Oktave nötig[1]).

Die Schreibweise der Musik weiß diese Töne alle in einer geschickt vereinfachten Weise genügend zu bezeichnen, indem ie durch ♯ und ♭ Erhöhungen und Vertiefungen der durch die bekannten Notenlinienzeichen festgelegten c-dur-Töne angibt (gelesen mit Anhängung von „is" und „es" an den Buchstaben des Tons). Das Maß dieser Erhöhungen und Vertiefungen ist gegeben durch das Intervall des „kleinen halben Tones", $\frac{24}{25}$ (vgl. Tab. 13), welches dem Übergang von der großen Terz in die kleine Terz entspricht ($\frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25} = \frac{6}{5}$). Es werden so aus den 7 Tönen von c-dur $3 \cdot 7 = 21$ Töne, von denen die ersten 13 in Tab. 16 angegeben sind und zwar in der 1. Spalte mit ihrem Namen, in der zweiten mit den relativen Schwingungszahlen. Daß diese 21 Töne allerdings noch nicht genügen, zeigt sich schon am Beispiel der g-dur-Tonleiter (Tab. 14). Ihr zweiter Ton ist nicht a, ist aber sehr nahe a, nämlich a erhöht um das sehr kleine Intervall $\frac{80}{81}$, welches „Komma" genannt wird (Tab. 13) ($\frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80} = \frac{27}{16}$); ebenso ist die Septime in g-dur zwar nahe aber nicht genau fis, sondern fis-komma (fis $= \frac{8}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{9}$, fis-komma $= \frac{25}{9} \cdot \frac{81}{80} = \frac{45}{16}$). Diese Unterschiede des Komma sind es, welche die musikalische Schreibweise nicht angibt. Sie macht beispielsweise keinen Unterschied zwischen a in c-dur und a-komma in g-dur; ebenso wird fis-komma in g-dur einfach als fis bezeichnet.

Ein Verzicht auf Reinheit der Intervalle ist diese Beschränkung der Schreibweise aber für den ausführenden Musiker nicht, sofern er, wie im Gesang oder auf der Violine, die Möglichkeit hat, alle Schwingungszahlen nach seinem Gehör frei zu wählen. Es genügt ihm dann aber vollkommen die Schreibweise der Musik; er wird z. B. bei Modulation von c-dur nach g-dur die als a angegebene Note erst als a, dann als a-komma singen, und in der Betonung, vielleicht geringen Übertreibung solcher Unterschiede liegt ein Teil des feineren Ausdrucks bei der Wiedergabe von Kunstwerken, wenn auch wohl nur wenige Künstler dies bemerklich zu machen vermögen.

Groß ist der durch das Komma bedingte Tonhöhenunterschied nicht; er kann in mittlerer und hoher Lage nur eben gut gehört werden, in der Tiefe überhaupt nicht. Hat z. B. a′ die Schwingungszahl 426, so hat a′-komma $426 \cdot \frac{81}{80} = 431{\cdot}3$; der Unterschied von 5·3 Schwingungen ist nur etwa das Dreifache dessen, was in dieser Höhenlage vom Ohr als Höhenunterschied überhaupt noch bemerkt werden kann. (Über das gleichzeitige Erklingen eines Tons mit seinem Komma siehe 70).

---

[1]) 30 oder mehr, je nach dem Umfang der Erweiterung der Reihe der Tonarten.

58. **Tonleitern der Tasten- und Klappen-Instrumente.** — Diese Instrumente bringen nicht mehr als 12 Töne in der Oktave unter. Sie machen daher große Vernachlässigungen, die weit über das Komma hinausgehen; sie haben für die in Tab. 13 durch Klammern verbundenen Tonpaare nur je einen Ton, wie das vom Klavier bekannt ist.

Es ist dann aber die Frage, auf welche Schwingungszahl der betreffende Ton, der zweie ersetzen soll, zu stimmen sei. Der mögliche Spielraum ist ziemlich groß; die relativen Schwingungszahlen der einzelnen Töne sind in der 2. Spalte der Tab. 16 angegeben. Hat z. B. cis'' die Schwingungszahl 520·85, so kommt auf des'' die Schwingungszahl 540·0, was aufs Deutlichste verschieden klingt. Es muß also von den **Tasteninstrumenten** notwendigerweise eine merklich unreine Stimmung benutzt werden. Es gibt mehrere Auswege, dem Ohr unter diesen Umständen möglichst Genüge zu tun.

Eine beim Klavier wohl meist benutzte Möglichkeit besteht darin, zuerst c-dur dem Gehör nach rein zu stimmen und danach die übrigen Töne möglichst befriedigend einzurichten. Es häufen sich dabei die Unreinheiten notwendigerweise auf die anderen Tonarten, wodurch Unterschiede im Charakter der verschiedenen Tonarten entstehen; c-dur tritt dann als einfachst, glattest, klarst klingende Tonart hervor.

Tab. 16.

	Reine Stimmung	Temperierte St.
C	1	1
Cis	$\frac{25}{24} = 1{\cdot}0417$	$i = 1{\cdot}0595$ (Cis, Des)
Des	$\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = 1{\cdot}0800$	
D	$\frac{9}{8} = 1{\cdot}1250$	$i^2 = 1{\cdot}1225$
Dis	$\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = 1{\cdot}1719$	$i^3 = 1{\cdot}1892$ (Dis, Es)
Es	$\frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25} = 1{\cdot}2000$	
E	$\frac{5}{4} = 1{\cdot}2500$	$i^4 = 1{\cdot}2599$ (E, Fes)
Fes	$\frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25} = 1{\cdot}2800$	
Eis	$\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24} = 1{\cdot}3021$	$i^5 = 1{\cdot}3348$ (Eis, F)
F	$\frac{4}{3} = 1{\cdot}3333$	
Fis	$\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = 1{\cdot}3889$	$i^6 = 1{\cdot}4142$ (Fis, Ges)
Ges	$\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = 1{\cdot}4400$	
G	$\frac{3}{2} = 1{\cdot}5000$	$i^7 = 1{\cdot}4983$
⋮	⋮	⋮
C'	2	$i^{12} = 2{\cdot}0000$

Ein anderer Ausweg ist die „**temperierte Stimmung**" („gleichschwebende Temperatur"), welche die Unreinheiten vollkommen gleichmäßig auf alle Tonarten verteilt; sie macht dazu alle 12 Intervalle der vorhandenen Töne einander gleich. Das danach zu wählende Intervall i je zweier aufeinanderfolgender Töne muß der Bedingung genügen, daß es 12 mal auf denselben Ton erhöhend angewandt dessen Oktave gibt, d. h. es muß $i^{12} = 2$, daher $i = \sqrt[12]{2} = 1{\cdot}0595$ sein. Die letzte Spalte der Tab. 16 gibt die so auf die 12 Töne kommenden Schwingungszahlen an. Man sieht, daß sie meist zwischen die Schwingungszahlen der zusammengefaßten reinen Töne fallen. Bemerkenswert und wichtig für die Brauchbarkeit dieser Stimmung ist die sehr nahe Reinheit ihrer Quinten, für welches Intervall das Ohr nächst der Oktave die größte Empfindlichkeit hat (52); temperierte und reine Quint (Tab. 16) unterscheiden sich um viel weniger als ein Komma. Die Orgel, hauptsächlich zu möglichst in allen Tonarten gleich brauchbarer Begleitung von Gesang bestimmt, hat meist diese temperierte Stimmung.

Für die meisten **Klappen-Instrumente** (108 u. f.) ist die Wahl einer bestimmten Stimmung nicht so wichtig, weil der Bläser kleine Änderungen der Schwingungszahlen stets in der Gewalt hat (vgl. 110).

3. Klangfarbe.

59. Da Tonstärke durch die Amplitude, Tonhöhe durch die Länge der Schallwellen bedingt sind (44, 45), so bleibt für den dritten möglichen Unterschied von Tönen, für die Klangfarbe (43), nur die Frage: Wodurch können zwei Luftwellen gleicher Amplitude und gleicher Länge noch verschieden von einander sein? Es ist nach Kenntnis des Bisherigen nur die Antwort möglich: durch ihre Form (5), und dies ist nun weiter zu prüfen.

60. Wellen verschiedener Formen. — Wir haben eingehend Sinuswellen betrachtet und sie als Beispiel für Wellen überhaupt bisher vorgezogen, nicht ohne bereits zu bemerken, daß es auch Wellen anderer Formen gibt und wie solche entstehen (6).

Abb. 19 zeigt in a die Sinuswelle und in b eine Welle gleicher Länge λ von anderer Form. Aus der Form der Welle kann sogleich die Bewegungsweise oder die Art des Zustandswechsels am Ursprung angegeben werden (4). Sind a und b Querwellen, so muß für a eine quer gerichtete Pendelschwingung am Ursprung sein, wie es schon betrachtet wurde (6); für b ist aus der Form zu sehen, daß eine rasche Aufwärtsbewegung mit langsamer Abwärtsbewegung wechseln müßte, beide von gleichförmiger Geschwindigkeit und plötzlich ineinander übergehend, wie es die mit Knicken aneinander grenzenden geraden Linien der Welle anzeigen. Sind a und b Druckwellen in der gewöhnlichen Darstellungsweise der Schallwellen (18), so gilt für die Druckwechsel am Ursprung dasselbe wie für die Lagenwechsel bei den Querwellen.

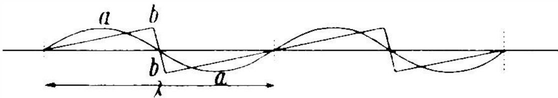


Abb. 19. Verschiedene Wellenformen.

Man sieht daraus, daß die Form der Schallwellen ganz durch die Art der Druckwechsel an der Schallquelle bedingt ist, welche wieder von der Schwingungsweise der Schallquelle abhängen. Damit stimmt es überein, daß verschiedenartige Schallquellen bei gleicher Tonhöhe und Stärke verschiedene Klangfarbe geben.

61. Untersuchung der Wellenform. — Der Nachweis der verschiedenen Wellenformen verschieden klingenden Schalls ist in mehrfacher Weise ganz im einzelnen geliefert.

Am überzeugendsten sind durch die Schallwellen selbst erhaltene Aufzeichnungen derselben, aus denen wieder Schallwellen hervorgebracht werden können, die man mit dem Ohre nachprüfen kann, um die Vollkommenheit der Aufzeichnung an der Übereinstimmung der wiedergegebenen Klangfarbe mit der ursprünglichen zu beurteilen. Dies leistete zuerst der Phonograph. Eine Membran (Haut, dünnstes Glimmer- oder auch Metallblatt), einseitig von der Schallwelle getroffen, wird durch die Druckschwankungen ihnen entsprechend bewegt und zeichnet diese Bewegungen mittels eines an der anderen Seite befestigten Stiftes in Wachs oder ähnlichem genügend weichen Stoff auf, dessen Fläche am Stift vorbeibewegt wird. Wie nahe getreu die Schallwellen so aufgezeichnet sind, zeigt sich bei Wiedergabe des Schalles aus ihnen mittels einer Membran mit weniger spitzem Stift, der an der Walze oder Platte mit den aufgezeichneten Wellen gleiten kann. Diese Wellen haben Amplituden von ungefähr natürlicher Größe; ihre Längen sind dabei in dem Maße verkürzt, als die

Aufnahmefläche langsamer als mit Schallgeschwindigkeit bewegt wird. Man kann die Amplituden dieser Wellen vergrößern, indem man einen Stift mit Spiegelchen an ihnen gleiten läßt, so daß dasselbe den Amplituden entsprechende Drehungen macht; ein daran reflektierter langer Lichtstrahl gibt dann einen Lichtpunkt, der auf bewegter photographischer Schicht die gewünschte vergrößerte Wellenlinie verzeichnet.

In dieser Weise konnten die Wellenformen verschiedener Klänge zuerst eingehend studiert werden.

Später haben elektrische Mittel noch feinere Aufzeichnungen erlaubt. Das Mikrophon liefert elektrische Ströme, deren Intensität nach Maßgabe des Druckverlaufs in den Schallwellen wechselt. Es besteht aus einem schlechten Elektrizitätsleiter (z. B. Kohlepulver), dessen elektrischer Widerstand durch Druck vermindert wird, was bei angeschalteter elektrischer Spannung die Stromstärke entsprechend verändert. Der wechselnde Druck wird durch die den schlechten Leiter berührende, schallempfangende Membran ausgeübt.

Auch in anderer Weise, besonders mittels Induktion (E 336 u. f.), ist es gelungen, die Bewegungen der schallempfangenden Membran entsprechend wechselnde Stromstärken hervorbringen zu lassen. Sind die Ströme schwach, so verstärkt man sie durch Elektronenröhren (E 477). Diese Ströme können durch ihre bekannten, in vielfacher Weise ausnutzbaren magnetischen Wirkungen, sei es einen Stift bewegen, der die Wellen ins Wachs zeichnet, wie es beim Phonographen in unmittelbarer Weise geschieht, oder sie können mittels Wackelspiegels einen Lichtzeiger zu photographischer Aufnahme der Wellenformen betätigen[1]).

62. Aller Schall erschöpfend in Wellenform aufzuschreiben. — Die Ergebnisse der Untersuchungen der Wellenformen der Klänge der verschiedenen Musikinstrumente besprechen wir bei der Betrachtung dieser Tonquellen (93 u. f.). Von besonderem Interesse waren immer die Klangfarben der menschlichen Stimme. Die verschiedenen Selbstlaute (Vokale) der Sprache, die auch gesungen werden können, unterscheiden sich überhaupt wesentlich nur durch Klangfarbe; die Tonhöhe kann im Gesang durch die gleiche Note gegeben sein. Abb. 20 gibt einige Aufnahmen von Vokal-Wellen. Man sieht, daß der Vokal a die kompliziertesten Wellen hat; es ist innerhalb der deutlich erkennbaren Wellenlänge eine große Zahl (8) von Einzelbergen vorhanden. Auch bei e, i und o ist es ähnlich, doch tritt die Hauptwelle besser hervor. Beim i sind es sehr kurze Nebenwellen, die über die Hauptwelle gelagert sind; e nimmt in bezug auf

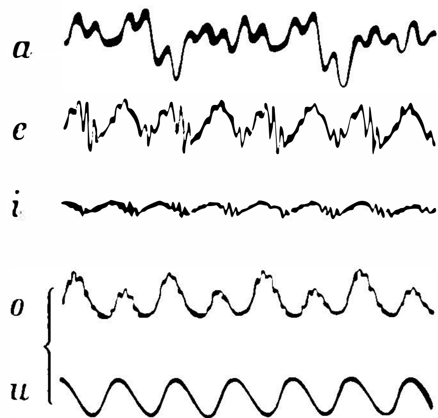


Abb. 20. Vokal-Wellen.

[1]) Solche Einrichtungen, die die Amplitudenschwankungen der Schallwellen mittels Mikrophon in Stromschwankungen und diese (nach Verstärkung) in Lichtschwankungen überführen, dienen auch zur Herstellung der Schallaufzeichnungen im „Tonfilm". Die Lichtschwankungen werden photographisch auf laufendem Filmband aufgenommen, das dann, nach fertiger Ent-

diese Nebenwellen eine Mittelstellung zwischen a und i ein. Der Vokal u erscheint als fast reine Sinuswelle.

Hervorzuheben ist aber, daß die als Beispiele hier abgebildeten Wellenformen keineswegs eine erschöpfende Charakteristik der betreffenden Vokale geben; vielmehr sind die zu beobachtenden Formen ziemlich mannigfaltig, je nach der Tonhöhe und auch je nach der singenden oder sprechenden Person. Letztere Mannigfaltigkeit ist selbstverständlich; denn an dem Klang der Sprache erkennen wir einzelne Personen sowohl, als auch Volkszugehörigkeiten.

Andere Unterschiede von Hörbarem, als so in den Wellenformen ersichtlich werden, gibt es überhaupt nicht. Alles Hörbare, nicht nur Töne, auch alle Geräusche, Sprache mit allen Eigentümlichkeiten, Musik mit ihrem gesamten Inhalt einschließlich des feinsten Ausdrucks, alles dies kommt vollkommen und erschöpfend in den Wellenlinien zur Festlegung, die der Phonograph oder die elektrische Einrichtung aufnimmt, und es kann — zum Beweise — aus diesen Wellenlinien auch alles dies wieder in die Luft und ans Ohr gebracht werden. Diese Schrift der Wellen ist demnach weit mehr als alle Buchstabenschrift und Notenschrift zusammengenommen; nur daß wir sie nicht mit dem Auge lesen gelernt haben, sondern nur mit dem Ohr. Es ist wunderbar, welche Fülle von Vorstellungen und Empfindungen wir mit Wellenlinien verbinden, wenn das Trommelfell des Ohres nach ihren, auf eine einzige Zeitveränderliche beschränkten Angaben aus und ein bewegt wird.

63. Das Ohr empfindet Klänge zusammengesetzt aus „einfachen" Tönen. — Sehen wir von der ganzen Mannigfaltigkeit der Schallempfindungen ab und beachten wir wieder besonders die Klangfarben von Tönen, wie etwa der Vokale, so zeigt sich, daß für jeden durch das Ohr wohlunterscheidbaren Klang auch an der Wellenform entsprechend Besonderes zu sehen ist. Das a klingt „voll", „reich", „hell", und die Welle hat viele Nebenwellen (Abb. 20); sie ist augenscheinlich Summe einer Grundwelle, deren Länge die Tonhöhe des a bestimmt, und einer Reihe von kürzeren Wellen, deren Längen aber genau $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ usw. der Grundwellenlänge sein müssen, weil sonst nicht der tatsächlich vorhandene Wellenzug mit genauen Wiederholungen sich ergäbe. Die Schwingungszahlen der im Klang a vereinten Wellen verhalten sich demnach wie die kleinen ganzen Zahlen 1:2:3:4 . . . ., d. h. der Klang besteht aus einem Grundton mit seinen harmonischen Obertönen (56), und die erhebliche Zahl und Intensität der Obertöne ist es, was die Klangfarbe hell, voll, reich macht. Fehlen die tieferen Obertöne, besonders die Oktave und Duodezime, wie beim e, oder sind gar überhaupt nur höchste Obertöne vorhanden, wie beim i, so wird der Klang „schärfer", „spitzer". Der Vokal u klingt dagegen „dumpf",

wickelung, die Tonschrift in Gestalt von Lichtdurchflüssigkeitsschwankungen längs seiner Laufrichtung festhält. Die Schallwiedergabe erfolgt durch Verwandlung der Lichtdurchlässigkeitsschwankungen des Films in elektrische Schwankungen mittels lichtelektrischer Wirkung (E 466 u. f.) und weitere Verwandlung der (verstärkten) Stromschwankungen in Schall mittels Lautsprechers (103). Die Schallaufnahme kann neben eine gleichzeitige kinomatographische Bildaufnahme des betreffenden Vorganges auf einen einzigen Film kopiert werden, was dann gleichzeitige optische und akustische Vorführung ermöglicht. Da die optische Wiedergabe ruckweise, die akustische aber gleichförmige Fortbewegung des Films erfordert, müssen die beiden Aufnahmen beim Kopieren um eine gewisse Strecke gegeneinander am Film verschoben werden um gleichzeitig wirken zu können.

„hohl", „leer"; ebenso das o. Die Wellen verschiedener u und o sind oft schwer voneinander unterscheidbar, wie in der Tat auch die beiden Klänge. Das abgebildete, gesungene o ist nicht ganz dumpf, es hat viel vom Oberton 2 (Oktave), wie der Vergleich mit Abb. 22b zeigt. Das abgebildete u ist eine einzelne, einfache Sinuswelle, und dieser ist der Eindruck des „Hohlen" und „Leeren" eigen. Man kann aus der Sinuswelle keine Einzelheiten oder Bestandteile heraushören, sie kann daher der Empfindung nach auch als „einfacher Ton" bezeichnet werden. Eine Welle wie die des a wird dagegen wie ein Zusammenklang einer Reihe gut aufeinander abgestimmter Töne empfunden, was die Reihe der harmonischen Obertöne auch wirklich ist; sie enthält die Oktave, deren Quint, zweite Oktave, deren Terz und Quint (Tab. 15).

64. Zerlegung beliebiger Wellenzüge in Sinuswellenzüge. — Dieser Eigentümlichkeit des Ohres, Klänge wie zusammengesetzt aus einfachen Tönen — Sinuswellen — zu empfinden, entspricht eine Eigentümlichkeit aller beliebigen Wellenformen: Man kann jede gegebene Welle beliebiger Form in eine Summe von Sinuswellen zerlegen, und zwar sind die Summanden diejenigen Wellen, welche der harmonischen Tonreihe der gegebenen Wellenlänge zugehören. Dementsprechend gilt auch die Zusammensetzung beliebiger Wellenformen aus solchen Sinuswellen. Es ist dies ein rein geometrisch-mathematischer Satz (ursprünglich von Fourier 1822), der hier von großer Wichtigkeit ist.

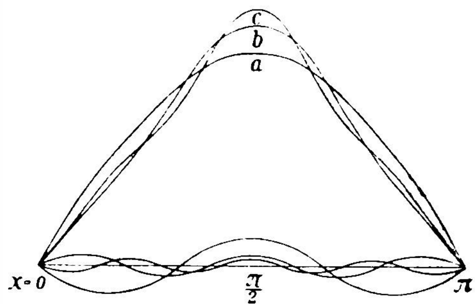


Abb. 21. Spitze Welle aus Sinuswellen summiert.

Will man den Satz auf eine gegebene Welle anwenden, so hat man demnach eine Grundwelle anzunehmen von gleicher Länge wie die gegebene Welle, dann eine Welle von halber Länge, eine von $^1/_3$ Länge u. s. f., alles Sinuswellen, und es kommt nur darauf an, jeder dieser Oberwellen die geeignete Amplitude und die geeignete Phasenstellung zu geben; die Summe wird dann die gegebene Wellenform richtig darstellen.

Diese Zerlegung kann durch Rechnung geschehen, wenn die gegebene Wellenform geometrisch wohldefiniert vorliegt. Hiervon zeigt Abb. 21 ein Beispiel. Es ist hier eine spitze Wellenform gegeben, ähnlich wie Abb. 19b, nur mit der Spitze mitten auf $\frac{1}{4}$ Wellenlänge. Es genügt, die halbe Wellenlänge zu betrachten, von $x = 0$ bis $x = \pi$. Die Grundwelle ist dargestellt durch $\sin x$ (a in der Abbildung); dazu kommt die Welle von $^1/_3$ Länge, $\sin 3x$, aber nur mit $^1/_9$ Amplitude und mit entgegengesetzter Phase anfangend (Minuszeichen in der Summe), unten für sich verzeichnet. Diese beiden Wellen zusammen ergeben schon die etwas spitzere Welle b. Die Hinzufügung von $\frac{1}{25}\sin 5x$ und $-\frac{1}{49}\sin 7x$ (ebenfalls unten für sich verzeichnet) verbessert die Spitze schon bis zur Form c. Die volle Spitze ergibt sich bei Fortsetzung der Reihe der Summanden nach dem schon ersichtlichen Gesetz bis ins Unendliche. Man sieht, daß hier nur die ungradzahligen Oberwellen benötigt sind; die gradzahligen haben Amplitude Null.

Andere Beispiele zeigt Abb. 22. Hier sind in a und b zwei verschiedene Wellenformen als Summe von Grundwelle und ihrer Oktave dargestellt; weitere Oberwellen fehlen. Diese

beiden Sinuswellen sind, wie man sieht, mit gleicher Amplitude angenommen, jedoch mit verschiedenen Phasenstellungen; in a beginnen beide Wellen mit gleicher Phase, in b ist die Oktave um $\frac{1}{4}$ ihrer Wellenlänge verschoben, und dieser Unterschied bedingt die Verschiedenheit der Wellenformen a und b.

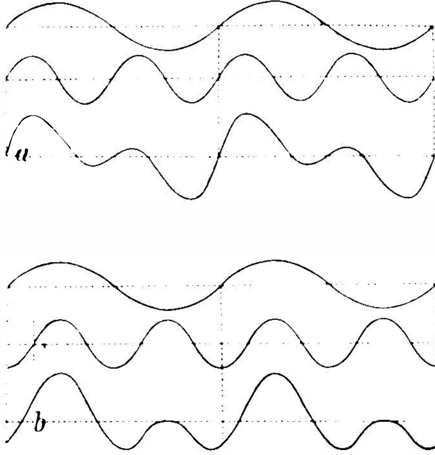


Abb. 22. Oktave bei verschiedenen Phasen.

Diese beiden Beispiele zeigen schon die umfassende Wirksamkeit des Satzes von der Wellenzerlegung oder — was dasselbe ist — von der Herstellung beliebiger Wellenformen aus Sinuswellen. Ein anderes Beispiel bietet auch die schon betrachtete Abb. 18.

65. Klangfarbe durch Auswahl und Intensität der Obertöne bedingt. — Da somit jede Wellenform gegebener Länge aus einer Sinus-Grundwelle dieser Länge und ihren harmonischen Oberwellen zusammensetzbar ist, kann auch gesagt werden, daß jede Klangfarbe gegebener Tonhöhe als Zusammenklang eines Grundtons mit einer geeigneten Auswahl seiner harmonischen Obertöne, alle in Sinuswellen, auffaßbar ist. In dieser Weise beurteilt das Ohr bei einiger Übung in der Tat die verschiedenen Klangarten, indem es die vorhandenen Obertöne heraushört (63).

Eine besondere Frage ist es dabei, ob das Ohr auch Unterschiede in der Phasenstellung der Bestandteile eines Klanges bemerkt. Bejahendenfalls würden dem Ohr die beiden Wellenformen Abb. 22a und b verschieden klingen. Dies ist aber nicht der Fall; eingehende Untersuchungen haben das gezeigt. Eine sehr einfache Probe besteht darin, den Zusammenklang zweier Stimmgabeln, die eine sehr schwach verstimmte Oktave geben, aufmerksam zu verfolgen. Die schwache, keineswegs als Dissonanz merkliche Verstimmung bewirkt in leicht verständlicher Weise eine langsame Verschiebung der Phase der Oktave gegen den Grundton, so daß allmählich, etwa im Laufe von 1 oder 2 Sekunden, aus der Wellenform a die Wellenform b wird. Man merkt aber dabei nicht die mindeste Änderung der Klangfarbe.

Wohl ist also die Wellenform bestimmend für die Klangfarbe (59); aber es werden nicht alle Wellenformen verschieden gehört, sondern es kommt dem Ohr in der Tat nur auf die vorhandenen Obertöne an; die Phasenstellung ist gleichgültig.

Das Ohr zeigt sich so geradezu darauf eingerichtet, Sinustöne in vorhandenem Gemisch unabhängig voneinander wahrzunehmen.

Dementsprechend besteht die Analyse einer Klangfarbe nur darin, ihre Sinusbestandteile zu sondern, ohne Rücksicht auf deren Phasenstellungen. Dies ist die unserem Gehörorgan entsprechende, durch dessen Eigentümlichkeit gegebene „Klanganalyse". Das Ohr kann bei Ausführung solcher Analysen durch besondere Hilfsmittel wirksam unterstützt werden, die wir später besprechen (Resonatoren 86, Umwegrohr 77).

66. Das Ohr. — Welches die Organe sind, die im menschlichen Ohr zur gesonderten Wahrnehmung der innerhalb von etwa 7 Oktaven liegenden, nicht nur hörbaren sondern gut

von einander unterscheidbaren vielen Töne (48) dienen, ist nicht gesichert bekannt. Es könnten wohl sinusförmig schwingungsfähige Gebilde sein, verbunden mit dem Ende je einer Nervenfaser aus dem Bündel des Gehörnervs, der vom Ohr zum Gehirn führt, und die Reizung dieser Faser hätte die Empfindung des Vorhandenseins des betreffenden Sinustons, allein oder im Gemisch, zur Folge, auf welchen das Gebilde abgestimmt ist, das vom herankommenden Schall in Mitbewegung gesetzt werden kann, wie wir es bei Betrachtung der „Resonanz" erläutern (82 u. f.). Auf Sinusschwingungen können allerdings Gebilde von mancherlei Art am allereinfachsten eingerichtet sein, wie die Betrachtung der verschiedenen Schallquellen zeigt (93 u. f.); aber die Fülle der äußerst zarten und sehr kleinen Gebilde, welche in den Knochenhöhlungen des Kopfes beim Ohr eingeschlossen sich finden, und denen der Schall unzweifelhaft vom Gehörgang her zugeleitet wird, ist so groß, daß deren schwierige Untersuchung noch immer keinen befriedigenden Abschluß gefunden hat.

Die Zuleitung des Schalles vom Gehörgang aus ist wohlbekannt. Das lose gespannte „Trommelfell" mit rund 1 cm Durchmesser schwingt mit der Luft wie die Membran des Phonographen oder des Mikrophons, und die Bewegung wird durch die Gehörknöchelchen — ihrer Form nach „Hammer", „Amboß" und „Steigbügel" genannt — auf eine zweite, kleinere Membran übertragen, die andererseits an Flüssigkeit grenzt. Die Übertragung erfolgt wohl mit verkleinerter Amplitude, aber durch das Hebelwerk der Knöchelchen entsprechend vergrößerter Kraft (M 98), wie es für gute Übertragung der Wellen in die Flüssigkeit auch erforderlich ist. Die Mitbewegung der Flüssigkeit, trotz deren geringer Kompressibilität, ist durch eine zweite Öffnung des knöchern begrenzten Flüssigkeitsraums mit Hautverschluß gesichert. In diesem sehr verzweigten Flüssigkeitsraum finden sich die vielen, nur teilweise verstandenen mit Nervenenden versehenen Gebilde.

67. Übergang von Tönen zu Geräuschen. — Wenn neben einem Grundton viele harmonische Obertöne vorhanden sind, etwa bis zum 12ten oder mehr, und zwar die hohen in großer Intensität, so wird der Klang als „rauschend", auch wohl „schmetternd" empfunden. Blechblasinstrumente können diesen Fall liefern (110). Es ist das ein Übergang zum Geräusch ohne daß Tonbestandteile da wären, die nicht harmonisch zum Grundton wären, d. h. die die Wellen des Grundtons nicht nur verzieren, sondern die Gleichheit der Wellen, den Wellenzug verderben würden. Die Gleichheit aller einzelnen Wellen bleibt erhalten; das Gemisch bleibt also noch ein Ton, wenn auch von sehr verzierter Klangfarbe. Das Ohr, welches das Gemisch in seine Sinusbestandteile zerlegt, hat aber die Empfindung der vielen hohen Obertöne, als wären sie gesondert da — bei der großen Intensität stark hervortretend —, und diese Töne sind miteinander dissonant und zwar um so mehr, je höher sie sind, weil ihre Schwingungszahlen dann immer mehr ins Verhältnis nahe benachbarter großer Zahlen kommen. Besonders der Oberton 7 läßt bei starkem Vorhandensein den Klang schon rauschend werden, weil er mit dem Ton 6 die Dissonanz 6:7 gibt. Endet das Tongemisch mit dem Oberton 6, so enthält es mit dem Ton 5 nur die kleine Terz 5:6, die Grenze zur Dissonanz (52). Ist der Klang nur aus den Obertönen 2, 3, 4, 5 mit dem Grundton zusammengesetzt, so enthält er ausschließlich miteinander wohlklingende Intervalle; die Klangfarbe ist dann zwar „voll", doch rein und mild, völlig fern vom Geräusch.

Daß jede Dissonanz schon einen Übergang zum Geräusch bildet, wurde bereits bemerkt (54). Besteht die Dissonanz aus nur wenigen Tönen, so findet das Ohr diese Töne als Sinusbestandteile meist leicht heraus (63); es erkennt das Geräusch als Dissonanz bestimmter Töne. Aber auch die vom Ohr nicht entwirrbaren Geräusche sind aus Sinustönen herstellbar (vgl. den Satz 64), was um so mehr der Fall sein muß, wenn außer beliebig hohen harmonischen Bestandteilen auch noch unharmonische dazugenommen werden, d. h. Schwingungszahlen, die nicht nur nicht im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen, sondern über-

haupt nicht im Verhältnis ganzer Zahlen stehen. Das erstere läßt viele Wellen eines tiefsten Tones vorbeigehen bis wieder genaue Gleichheit eintritt (54); das letztere verdirbt sogar ganz die Wiederkehr gleicher Wellen.

Die Herstellung von unentwirrbaren Geräuschen aus Tönen ist leicht zu zeigen. Läßt man die 7 oder 12 Töne einer Oktave eines Tasteninstruments gleichzeitig erklingen, so gibt das einen Lärm, ein Geräusch, aus dem die Töne nicht mehr herauszufinden sind; eine Besonderheit dieses Geräusches liegt aber doch in der ungefähr erkennbaren Höhenlage der betreffenden Oktave, die seine Bestandteile umfaßt. Ebenso hat auch jedes andere Geräusch seine Besonderheit, die durch die Schwingungszahlen und Intensitäten seiner Sinusbestandteile und deren etwaige zeitliche Änderungen beschreibbar ist. Ein Gemisch unharmonischer, sehr hoher Töne ist z. B. der Konsonant s; treten tiefere hinzu, so wird es sch, und in dieser Weise können auch die anderen Konsonanten betrachtet werden. Das Klirren des Hämmerns eines Stahlstabes oder Bleches ist das Gemisch des Grundtons mit den unharmonischen Obertönen, die den Querschwingungen von Stäben und Platten eigen sind (98).

So haben auch die Geräusche ihre verständlichen Besonderheiten; doch bringt deren weitere Verfolgung nichts Wesentliches.

Interferenzerscheinungen.

68. Interferenz. — Die ungestörte Übereinanderlagerung gleichzeitig im selben Raum vorhandener Schallwellen (54, M 45) kann unter Umständen eine gegenseitige Vernichtung zweier Schallwellen zur Folge haben, insoweit nämlich dieselben mit entgegengesetzt gleichen Phasen (6) zusammentreffen. Solche Vernichtung wird Interferenz genannt. Sie ist ein besonders auffallendes Ergebnis der Übereinanderlagerung und ist daher auch ein besonderes Nachweismittel des Stattfindens der ungestörten Übereinanderlagerung.

Die mannigfachen Interferenzerscheinungen bei Schall sind auch an sich bemerkenswert, auch teils wichtig zu weitergehenden Schlüssen; sie bilden auch wertvolle Vergleichsstücke zu den Interferenzerscheinungen des Lichtes, die denen des Schalles gleichartig sind.

Interferenzerscheinungen kommen überhaupt nur bei Wellen vor, und dies ist besonders zur Erkenntnis der Wellennatur des Lichtes wesentlich gewesen, dem in anderer Weise nicht so leicht beizukommen war, im Gegensatz zum Schall, dessen Wellennatur auch ohnedies schon mit Sicherheit erfaßbar war (26, 41). Wir behandeln daher die Grundeinsicht der ausschließlichen Verknüpfung von Interferenz mit Wellen besonders in der Optik (O 121 u. f.); hier in der Akustik zeigt sich die Verknüpfung in Beispielen, welche von selber jene allgemeine Einsicht erläutern.

69. Schwebungen. — Diese Interferenzerscheinung zeigt sich, wenn zwei Töne von wenig verschiedener Schwingungszahl bei ganz oder nahe gleicher Intensität gleichzeitig vorhanden sind.

In Abb. 23 sind a und b die Wellen der beiden Töne; c ist das Ergebnis der Übereinanderlagerung, erhalten Punkt für Punkt durch Addition der in a und b gegebenen Einzeldrucke. Man sieht, daß a 9 Wellen auf der Strecke a a′ hat, b dagegen 10 Wellen auf der gleichen Strecke b b′; der Ton b macht also 10 Schwingungen während a 9 macht. Bei a und b stimmen die Phasen der

beiden Wellen überein, ebenso wieder bei a′ und b′; dort addieren sich also die Druckamplituden zu doppelter Größe. Dazwischen treffen entgegengesetzte Phasen zusammen; daher dort die Vernichtung zur Amplitude Null. Das Gesamtergebnis c ist ein Wellenzug von mittlerer Wellenlänge und periodisch

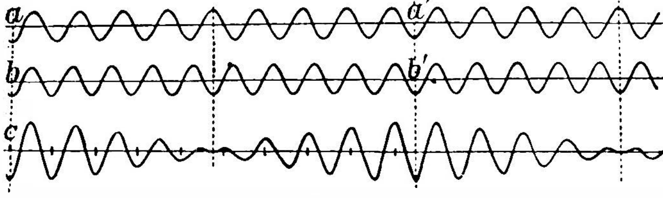


Abb. 23. Schwebungen.

verschwindender Amplitude[1]). Dieser Wellenzug ist in der Luft vorhanden und kommt ans Ohr. Dementsprechend hört das Ohr einen Ton, dessen Höhe (45) es bei dem geringen Höhenunterschied von a und b nicht als geändert unterscheiden kann, dessen Intensität (44) aber schwankt und zwar mit periodisch gänzlichem Verschwinden in dem dargestellten Falle gleicher Stärke von a und b. Man nennt dies „Schwebung".

Die Zahl der Schwebungen in der Sekunde ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen der beiden Töne. Denn diese Differenz gibt an, wieviel Schwingungen der eine Ton mehr macht in der Sekunde als der andere, und bei jeder Schwingung mehr erfolgt — gemäß Vorigem — eine Schwebung.

70. Die Schwebungen sind ein vortreffliches Mittel, geringe Unterschiede von Schwingungszahlen aufzudecken und festzustellen; denn gerade bei geringem Unterschied sind die Schwebungen leicht nach der Uhr zu zählen. Beispielsweise kann der kleine, beim Nacheinander-Erklingen meist nicht auffallende Höhenunterschied des Komma (57) bei gleichzeitigem Erklingen sofort durch die Schwebungen erkannt werden; 160 und 162 sek^{-1}, die im Verhältnis des Komma stehen (80:81), geben 2 Schwebungen in der Sekunde.

Will man zwei Schallquellen auf genau gleiche Schwingungszahl stimmen, so ändert man eine derselben solange, bis die Schwebungen verschwinden.

71. Verstimmt man den einen von 2 gleichhohen Tönen allmählich, was besonders an Pfeifen durch längenändernde Schieber leicht ausführbar ist, so geht der Einklang ins Schweben über; die Schwebungen sind anfänglich gut zählbar und stören den Klangeindruck noch nicht viel, unterbrechen nur dessen Gleichmäßigkeit. Erfolgen sie aber so schnell, daß sie schlecht zählbar werden, so wird der Eindruck unangenehm, wie alles was zwar wahrnehmbar aber nicht gut verfolgbar den Sinnen sich bietet, wie etwa flackerndes Licht dem Auge. Bei noch weiter steigender Verstimmung wird der durch die einzeln unverfolgbar gewordenen Schwebungen immerfort unterbrochene Klang „rauh". Dies ist der Übergang zur Dissonanz benachbarter Töne.

Die Dissonanzen bei größeren Unterschieden der Schwingungszahlen, auftretend wegen nicht einfachem Verhältnis derselben, haben wir bereits früher betrachtet (52, 54).

---

[1]) Die mittlere Wellenlänge ist in Abb. 23c durch die gleichabstehenden Punkte ersichtlich gemacht. Man sieht auch, daß beim Verschwinden der Amplitude eine Phasenumkehr eintritt; das verschwindende Tal (Verdünnung) kehrt als Berg (Verdichtung) wieder.

72. Schwebungen von Obertönen. — Die Schwebungen spielen eine besondere Rolle bei der Störung des Wohlklanges im Falle nicht ganz reiner Stimmung von Intervallen. Man hört schon bei sehr geringen Abweichungen von den einfachen Schwingungszahlverhältnissen Ungleichmäßigkeiten der Intensität, so daß der glatte Verlauf des Zusammenklanges gestört ist. Dies kommt von den Schwebungen immer vorhandener harmonischer Obertöne (56) der benutzten Töne (100). Wenn beispielsweise die unreine Oktave der Schwingungszahlen 200 und 404 erklingt, so hört man die 4 Schwebungen in der Sekunde, welche die mit 200 stets vorhandene Oktave $2 \cdot 200 = 400$ mit dem Ton 404 macht. Dies zeigt sofort an, daß die Oktave nicht ganz rein ist. Bei der unreinen Quint 200 und 304 hört man 8 Schwebungen in der Sekunde von den Obertönen $3 \cdot 200 = 600$ und $2 \cdot 304 = 608$ der beiden benutzten Töne.

73. Man kann die Fähigkeit des Ohres, durch Schwebungen Differenzen von Schwingungszahlen, durch die Konsonanzempfindlichkeit aber Verhältnisse von Schwingungszahlen zu erkennen, miteinander verbinden und darauf eine eigenartige Ermittelungsweise von Schwingungszahlen rein nach dem Gehör gründen. Es ist dazu ein Instrument erforderlich, das so viele Töne innerhalb einer Oktave gibt, daß je zwei benachbarte zusammen gut zählbare Schwebungen hören lassen („Sonometer"; mit Harmonikazungen gut ausführbar). Hat man 64 Intervalle in der Oktave und gibt jeder Ton mit seinem Nachbar 4 Schwebungen in der Sekunde, so ist bei der Schwingungszahl n des tiefsten Tones die Reihe der Schwingungszahlen $n, n+4, n+2 \cdot 4, \ldots\ldots n+64 \cdot 4$. Daß aber der höchste Ton die genaue Oktave des tiefsten ist, dies ist ebenfalls mit dem Gehör gut feststellbar, wonach $n+64 \cdot 4 = 2n$ und daraus $n = 256$ sein muß. Man kennt dann nicht nur die Schwingungszahlen aller 65 Töne des Instruments, sondern man hat auch das Mittel, die Schwingungszahlen jedes beliebigen Tones nach dem Gehör zu finden (70), da er — oder eine seiner Oktaven — mit irgendeinem der bekannten 65 Töne zählbare Schwebungen geben muß.

74. Interferenz als Energie-Wegweiser. — Die gegenseitige Auslöschung zweier Töne — zweier Wellen —, eine besonders bei langsamen Schwebungen sehr auffallende Erscheinung, die übrigens Eigenheit aller Interferenz ist, bedeutet keine Energieverminderung. Die Energie wird nur anders verteilt. Jeder der beiden Wellenzüge mit der Amplitude a verbreitet Energie proportional a^2 (44); gesondert würden sie also zusammen die Energie $2a^2$ in der Zeiteinheit verbreiten. Übereinander gelagert geben sie Schwebungen, deren Amplituden zwischen $2a$ und 0, deren Energien also zwischen $4a^2$ und 0 wechseln, was im Mittel für die Zeiteinheit ebenfalls $2a^2$ gibt. Während der Auslöschung geben die dicht beieinander stehenden, mit entgegengesetzten Phasen schwingenden Tonquellen keine Wellenenergie ins Medium ab; während der Verstärkung in gleichen Phasen schwingend gibt jede die verdoppelte Energie ab.

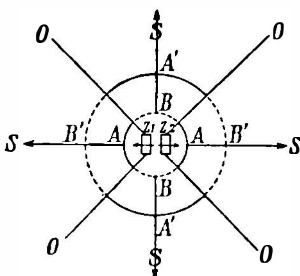


Abb. 24. Interferenzen an einfacher Stimmgabel.

Ähnlich, wenn auch teils in anderer Weise, zeigt sich die Interferenz auch in den anderen Fällen als eigentümlicher Energie-Wegweiser (75—80).

75. Gedrehte Stimmgabel. — Eine sehr einfache Interferenzerscheinung ist an jeder Stimmgabel zu beobachten, da sie eine Doppelschallquelle ist, weil beide Zinken schwingen (99). Abb. 24 zeigt die Gabel von den Zinkenenden z_1, z_2 her gesehen. Diese Enden schwingen zueinander und voneinander; die Pfeile der Abbildung zeigen letztere Phase. In diesem Augenblick gibt die Gabel nach rechts und links die Verdichtungen A A in die Luft ab, nach oben und unten aber die Verdünnung B B (punktiert); beide pflanzen sich als Wellen kugelig fort. A'A' sind die ½ Schwingungsdauer früher abgegebener Verdichtungen, B'B' die gleichzeitigen Verdünnungen, die unterdessen schon ½ Wellenlänge weit weggelaufen sind. Man sieht, daß der stärkste Schall nach den vier Richtungen S von den Stimmgabelenden abgegeben wird, in den um 45° dazwischen liegenden Richtungen O aber gar keiner; er wird in letzteren Richtungen durch das stete Zusammenkommen entgegengesetzter Phasen ausgelöscht. Die Energiewegweisung ist hier sehr ersichtlich.

Man hört diese eigentümliche auswählende Schallverbreitung aufs Deutlichste, wenn man die schwingende Gabel vertikal am Stiel hält und die Zinken dem Ohr nahe bringt. Dreht man den Stiel in den Fingern, so hört man während einer Umdrehung 4mal stark den Ton und dazwischen 4mal gar nicht, ersteres wenn der Gehörgang in den Richtungen S zur Gabel sich befindet, letzteres in den Richtungen O.

76. Interferenz mit Beugung. — In Abb. 25 stellt k k die schon beschriebene Schallkiste dar (29), Q eine Schallquelle in ihr, etwa eine Pfeife c_5 mit rund 10 cm Wellenlänge (Tab. 12), die dauernd angeblasen werden kann. Die Kiste habe zwei Öffnungen o und p, die nicht sehr groß sein dürfen, damit starke Beugung des herausdringenden Schalles eintritt (28)[1]), wodurch diese Öffnungen als allseitig wirkende Schallquellen für den äußeren Raum dienen; der Abstand der Öffnungen voneinander sei größer als die Wellenlänge λ. Für die zwei Schallquellen o und p ist stets gleiche Phase gesichert, weil sie von Q gleichweit abstehen. Es kommen also bei h und überhaupt auf der ganzen gestrichelten Mittellinie stets gleiche Phasen zusammen, so daß dort Verstärkung der Schallwellen eintritt. In d_1 dagegen vernichten die Schallwellen einander, wenn d_1o um $\lambda/2$ größer ist als d_1p (was der mit dem Radius d_1p gezogene Kreisbogen anzeigt), weil dort stets entgegengesetzte (und genügend nahe gleiche) Phasen zusammenkommen. In h_1 tritt wieder Verstärkung ein, wenn h_1o um λ größer ist als h_1p. Diese Schallverteilung kann sehr gut mittels der schallempfindlichen Flamme (29) untersucht werden; die Flamme reagiert stark in h und h_1, gar

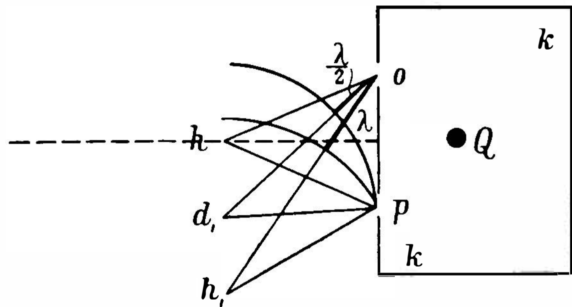


Abb. 25. Interferenzen von gebeugtem Schall, analog dem optischen Gitter oder auch Fresnel's Spiegelversuch.

[1]) Etwa ½ Wellenlänge Öffnungsdurchmesser genügt der Bedingung starker Beugung; vgl. O 144.

nicht in d_1. Verschließt man eine der 2 Öffnungen, während die Flamme in d_1 ist, so reagiert sie auch dort plötzlich stark; dies zeigt in auffallendster Weise, wie durch Interferenz Schall und Schall einander vernichten und wie in solchem Falle durch eine Öffnung mehr Schall kommt als durch deren zwei.

Der Versuch ist vollkommen analog den Beugungsversuchen der Optik (O 148—150); er zeigt mit den Wellen des Schalles dasselbe, was jene mit den Wellen des Lichtes zeigen. Auch Fresnels Spiegelversuch (O 131, 149) ist analog, nur ist er einfacher, weil ohne Beugung wirkend; er war daher besonders wertvolles Nachweismittel für die Wellennatur des Lichtes, während die des Schalles auch ohnedies genügend gesichert ist.

Bemerkenswert ist auch bei dieser Interferenzerscheinung wieder die Wegweisung der Energie. Die Schallenergie ist an den Stellen der Verstärkungen, h h_1 in der Abbildung, gehäuft. Diese Stellen sind im ganzen auf Hyperboloiden verteilt, deren Brennpunkte in den beiden Öffnungen liegen; dazwischenliegende Hyperboloide haben Auslöschung, wie d_1[1]). Da aber die Energie aus den beiden Öffnungen kommt, muß sie, um zu dieser Verteilung zu gelangen (z. B. nach h_1), notwendigerweise Orte der Auslöschung passieren; denn alle Hyperboloide, auch die der Auslöschung, gehen zwischen o und p durch. Es kann demnach gefragt werden, in welcher Form die Energie diesen Weg durch schallose Orte macht. Nähere Überlegung der übereinander gelagerten Bewegungen der beiden Wellen zeigt, daß die Energie an den schallosen Orten, wo Druckschwankungen fehlen, in Form kinetischer Energie der Luft vorhanden ist. Diese Absonderung von Bewegungs- und Druck-Energie bei Interferenz wird besonders deutlich bei den stehenden Wellen (78).

77. Umwegrohr. — Wegunterschiede zweier Wellen gemeinsamen Ursprungs, nach welchen sie mit dauernd entgegengesetzten Phasen zusammenkommen und also einander auslöschen, können in sehr einfacher Weise durch ein verzweigtes Rohr hervorgebracht werden. Man benutzt dabei die Eigentümlichkeit der Schallwellen, auch in beliebig gekrümmten Rohrleitungen ungestört sich fortzupflanzen, was dem Lauf der Strömungslinien (M 389) entspricht, die den Rohrkrümmungen folgen.

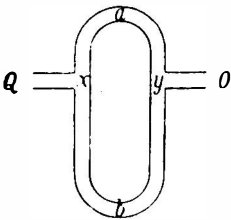


Abb. 26. Umwegrohr.

In Abb. 26 ist bei Q die Schallquelle, deren Wellenlänge λ sei; bei x verzweigt sich das Rohr, bei y vereinigen sich die Zweige wieder und bei O oder am Ende einer an O gesetzten Schlauchleitung kann das Ohr des Beobachters sein. Der eine Schenkel der Rohrleitung, z. B. x b y kann einen posaunenartigen Auszug haben, so daß man beliebige Umwege herstellen kann. Ist der Weg über b um $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$ usw. länger als über a, so kommen bei y stets entgegengesetzte Phasen zusammen und man hört nichts bei O. In den Stellungen des Auszugs mit den Umwegen 0, λ, 2λ, ..., wobei gleiche Phasen bei y zusammen-

[1]) Hyperbeln geben die Orte gleicher Abstands-Unterschiede von ihren beiden Brennpunkten an; für die Verstärkungen sind die Abstandsunterschiede 0, λ, 2λ, ..., für die Auslöschungen $\lambda/2$, $3\lambda/2$, ... Sämtliche Hyperboloidflächen haben ihre Scheitel zwischen den beiden Öffnungen; eines der Hyperboloide, das mittelste, ist die Ebene der gestrichelten Linie, auf welcher h liegt. (Vgl. O 149, Abb. 47 dort.)

treffen, ist dagegen die Rohrleitung gut durchlässig. Es kann auch das Rohrende Q an eine Öffnung der Schallkiste (29) gesetzt werden und bei O die schallempfindliche Flamme sein. Verlängert man dann allmählich den einen Rohrschenkel, von der Gleichheit beider ausgehend, so sieht man die Flamme abwechselnd kraus und glatt sich einstellen.

Da die Umwege am Rohrauszug leicht meßbar sind, ist so auch die Wellenlänge des benutzten Tones leicht ermittelbar, und aus der Wellenlänge kann die etwa unbekannte Schwingungszahl des Tons berechnet werden (Gl. 5). Versuche mit bekannten Schwingungszahlen zeigten, daß die Schallgeschwindigkeit in nicht allzu engen Röhren gleich der im Freien gemessenen ist.

Umwegrohre können zur Klanganalyse benutzt werden, da sie geeignet sind, Sinusbestandteile, auf deren Auslöschung sie eingestellt sind, aus einem Klanggemisch zu entfernen und also deren Vorhandensein durch Änderung der Klangfarbe anzuzeigen.

Auf die Frage, wo die Energie bleibt, welche durch Interferenz an der Durchschreitung des Umwegrohrs verhindert wird, gibt die einfache Betrachtung des Verlaufs der Verdichtungen und Verdünnungen und der Luftverschiebungen im Rohr Antwort. Es zeigt sich bei der Einstellung des Rohres auf Undurchlässigkeit, daß bei y, wo Verdichtung und Verdünnung stets einander vernichten,

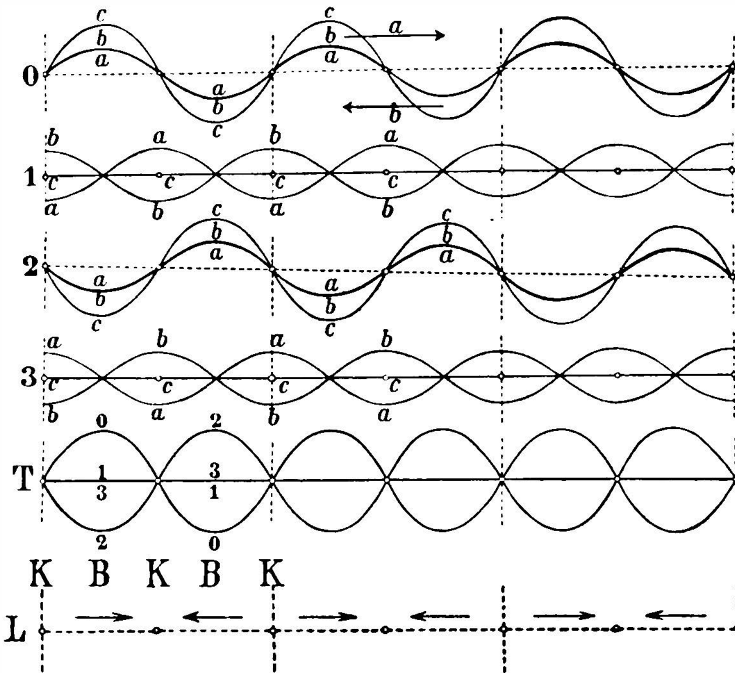


Abb. 27. Stehende Wellen.

weshalb die Welle nach O hin sich nicht fortsetzt, verdoppelte Verschiebungen in Richtung a b und b a eintreten, wie bei der Reflexion an der Grenze eines dünneren Mediums (31). Es tritt deshalb dort Reflexion beider zusammentreffender Wellen ein, und ihre Energie wird zur Quelle zurückgesandt.

78. Stehende Wellen. — Dies ist eine besonders charakteristische Interferenzerscheinung, die stets zustandekommt, wenn zwei einander gleiche Wellenzüge gegeneinander laufen.

Der Fall findet sich am einfachsten verwirklicht, wenn ein Wellenzug in sich selbst zurückgeworfen wird. Stehende Weilen sind daher in der Nähe reflektierender Wände ein sehr häufiges Vorkommnis.

Wir betrachten stehende Querwellen und Längswellen gesondert.

79. Stehende Querwellen. — In Abb. 27 sind a und b die beiden, in den Richtungen der Pfeile a und b fortschreitenden Wellen, dargestellt in 4 Augenblicksbildern zu den Zeiten 0, 1, 2, 3 nach Verlauf von je einer Viertelschwingung, womit alle bemerkenswerten Zustände erschöpft sind, die dann sich nur wiederholen. Das Ergebnis der Übereinanderlagerung beider Wellen ist überall in c dargestellt. Zur Zeit 0 fallen a und b zusammen; daher hat c überall verdoppelte Elongation. Zur Zeit 1 ist a um $\lambda/4$ nach rechts, b um ebensoviel nach links fortgeschritten; daher kommen hier überall entgegengesetzt gleiche Elongationen zusammen und das Ergebnis c ist wellenloser Zustand auf der ganzen Linie. Zur Zeit 2 fallen a und b wieder zusammen, so daß Verdoppelung erfolgt; zur Zeit 3 erfolgt wieder Vernichtung. Die Ergebnisse c sind für alle Zeiten in T zusammengetragen. Man übersieht jetzt, was die Übereinanderlagerung der zwei Wellenzüge erwarten läßt: an den mit B bezeichneten Stellen findet stete Schwingung mit verdoppelter Amplitude statt; es folgen dort die Lagen 0, 1, 2, 3 und dann wieder 0 usw. in Wiederholung aufeinander. Diese Stellen werden „Bäuche“ genannt. Je zwei benachbarte Bäuche schwingen mit entgegengesetzten Phasen. Zwischen den Bäuchen liegen die mit K bezeichneten Stellen, die „Knoten“ genannt werden, an denen überhaupt niemals Ausschwingung stattfindet; sie haben zu allen Zeiten Ruhelage. An einen Knoten kommt nie weder Berg noch Tal; sondern die abwechselnden Berge und Täler sind an die Bäuche gebunden. Die Berge und Täler laufen daher gar nicht, wie sonst bei Wellen; sie stehen an den Bäuchen; daher: „stehende Wellen“. Von Bauch zu Bauch ist je ½ Wellenlänge; ebenso von Knoten zu Knoten.

Man kann diesen Zustand leicht an einem Seil oder Schlauch verwirklichen, der am einen Ende festgebunden ist und am anderen Ende dauernd quer geschüttelt wird. Von diesem Ende aus läuft der Querwellenzug gegen das festgebundene Ende, wo er reflektiert in sich zurückläuft. Das bewegte Ende muß notwendigerweise Bauch sein, das feststehende Knoten; dazwischen können beliebig viele Bäuche und Knoten mit je $\lambda/4$ Abstand voneinander sein. Man sieht daraus, daß nicht jede Schwingungsdauer bei gegebener Seillänge dauernd stehende Wellen geben kann; sondern die Schwingungsdauer muß im betrachteten Falle sich so einrichten, daß eine ungerade Zahl von Viertelwellen auf die Seillänge kommt. Der Knoten am befestigten Ende stimmt mit der Umkehr der Phase der Bewegung bei der Reflexion am dichteren Medium (31); diese Umkehr läßt dort stets entgegengesetzte Phasen zusammenkommen, was den Knoten ergibt.

Die Energie der stehenden Querwelle ist ganz in den Bäuchen gehäuft; die Knoten sind frei von Wellenenergie. An den Bäuchen wechselt die Form der Energie zwischen potentiell (zu den Zeiten 0 und 2 der Abb. 27) und kinetisch (zu den Zeiten 1 und 3). Sind die Amplituden der beiden gegeneinander laufen-

den Einzelwellen a, so ist deren Gesamtenergie bezogen auf die Längeneinheit (oder Volumeinheit) proportional $a^2 + a^2 = 2a^2$; die Gesamtenergie der stehenden Welle, deren Amplitude 2a ist, ist ebenfalls $2a^2$, nämlich $(2a)^2/2$, weil an den Knoten keine Energie ist.

Ist eine stehende Querwelle in beiderseits von Knoten begrenztem Medium einmal zustande gekommen, so könnte sie endlos weiter bestehen bleiben, wenn die Enden wirklich ganz bewegungslos bleiben und auch sonst keine Energieabfuhr stattfindet. Eine schwingende Saite ist Beispiel einer solchen, längere Zeit vorhaltenden stehenden Querwelle (vgl. Abb. 33); die — allmählichen Stillstand bedingende — Energieabfuhr findet bei ihr als Schall statt (95).

80. Stehende Längswelle. — Ihre Druckverteilung kann unmittelbar aus den bereits betrachteten Linien der Abb. 27 entnommen werden, indem man dieselben als Drucklinien auffaßt (18) und demnach in T die resultierende Drucklinie sieht. Es gibt somit Bäuche und Knoten des Druckes in der schon betrachteten Gruppierung.

Man kann aber auch statt des Druckes die Bewegung in der stehenden Längswelle aus T ablesen, indem man die Linien jetzt wieder, wie anfänglich (79), als Linien der Verschiebungen auffaßt, nur daß die Verschiebungen jetzt nicht transversal sondern longitudinal vor sich gehen. Man erhält so das Bild L in Abb. 27. An den Bäuchen B pendeln die Mediumsteile längs hin und her, an den Knoten K ruhen sie; die Pendelung an benachbarten Bäuchen geht mit entgegengesetzter Phase vor sich (wie bei der Querwelle, nur jetzt längs), wie die Pfeile in der Abb. L es anzeigen.

Man sieht aus dieser Bewegungsart, daß die Bäuche B der Bewegung Knoten des Druckes sein müssen und die Knoten K der Bewegung Bäuche des Druckes. Denn die gegeneinander und voneinander gerichteten Bewegungen an den benachbarten Bäuchen B müssen zwischen ihnen, bei K, Verdichtungen und Verdünnungen, also Druckschwankungen hervorbringen. Es sind somit bei der Längswelle die Orte K zwar Knoten der Bewegung, d. i. Orte ohne Bewegung, wie bei der Querwelle, aber Bäuche des Drucks, d. i. Orte größter Druckschwankung, und die Orte B sind Bäuche der Bewegung, d. i. Orte stärkster Bewegung, aber Knoten des Drucks, d. i. Orte ohne Druckschwankung. Diese Gegensätzlichkeit der Phasen der Bewegung und des Druckes bei den Längswellen haben wir schon früher bemerkt (32).

Die Energie schwankt bei der stehenden Längswelle zwischen Bäuchen und Knoten hin und her; an den Bäuchen der Bewegung ist sie kinetisch, an den Knoten der Bewegung — die Bäuche des Druckes sind — ist sie potentiell[1]).

Stehende Längswellen in Luft oder anderen Gasen können leicht in horizontalen Röhren beobachtet werden, in die eine kleine Menge leichten Pulvers (Kork, Bärlappsamen, Kieselsäure) gestreut ist. Das Pulver wird an den Bäuchen der Bewegung aufgewirbelt und dadurch breit gehäuft; an den Knoten bleibt es schmal liegen. Es muß an einem Ende des Rohres eine ziemlich starke Schall-

[1]) Dieser Energieschwankung vollkommen analog ist bei den stehenden elektrischen Wellen die Schwankung zwischen den beiden Formen der elektrischen und der magnetischen Energie (E 416).

quelle sein; das andere Ende kann verschlossen oder auch offen sein. Am verschlossenen Ende, das Grenze gegen ein dichteres Medium ist, findet die Reflexion mit Umkehr der Bewegungsphase statt (31), so daß dort stets entgegengesetzte Phasen der Bewegung zusammentreffen und also ein Knoten der Bewegung sich entwickelt, der zugleich Bauch des Druckes ist. Ein offenes Ende ist Grenze gegen ein „dünneres Medium", da die äußere Luft beweglicher ist als die innere; es findet daher dort Reflexion mit gleicher Phase der Bewegung statt (31), und infolgedessen entsteht dort ein Bauch der Bewegung, zugleich Knoten des Drucks. Der Knoten des Drucks ist auch daraus verständlich, daß in der offenen Luft keine Druckschwankungen von solcher Größe wie in der Röhre möglich sind.

Abb. 28 zeigt zwei so gewonnene Bilder von stehenden Wellen (etwas verkleinert, vgl. Maßstab), deren besonderes Interesse die Unhörbarkeit der benutzten, von sehr kleinen geriebenen Stäbchen gelieferten Töne ist[1]). Die Kürze der Wellen zeigt schon die sehr hohen (bei der Abbildung angegebenen) Schwingungszahlen an. Diese Wellen sind hier zugleich der Nachweis des Vorhandenseins der durch das Ohr nicht wahrnehmbaren Töne (vgl. 48). Die Schwingungszahlen ergeben sich leicht aus den unmittelbar abmeßbaren Wellenlängen mit der bekannten Schallgeschwindigkeit (Gl. 5, 45).

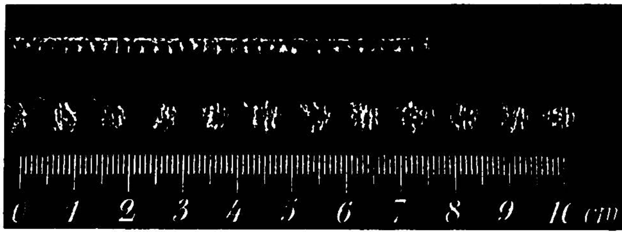


Abb. 28. Stehende Wellen sehr hoher (unhörbarer) Töne. ($n = 18\,350$/sek und $71\,000$/sek).

Man bemerkt, daß mittels der stehenden Wellen leicht unbekannte Schallgeschwindigkeiten in beliebigen Gasen gemessen werden können, mit denen man die Röhren füllt. Es ist bei bekannter Schallgeschwindigkeit in Luft nur die leicht ausführbare Messung der Wellenlängen an den stehenden Wellen im Gase und in Luft mit der gleichen Schallquelle nötig; die Schallgeschwindigkeiten sind proportional den Wellenlängen (Gl. 5). Dies ist wichtig geworden zur Ermittelung des Verhältnisses k der beiden spezifischen Wärmen von Gasen, welches aus der so gemessenen Schallgeschwindigkeit bei bekanntem Druck und bekannter Dichte des Gases oder Dampfes leicht berechnet wird (Gl. 24). Es sind hierbei nur kleine Gasmengen erforderlich, während die in der Wärmelehre zu besprechende andere Meßweise von k (W 63) ziemlich viel Gas verlangt.

81. Zusammensetzung von Schwingungen, die senkrecht aufeinander stehen.

Interferenzen der Drucke und der Bewegungen. — Bei den Interferenzen der Schallwellen vernichten gleich große Verdichtungen und Verdünnungen einander vollständig, was wir in vielen Beispielen betrachtet haben, und dies geschieht unabhängig von den Bewegungsrichtungen in der Welle; Vernichtung der Bewegungen findet dagegen nur bei Schwingungen statt, die in derselben Linie liegen, niemals wenn sie einen Winkel miteinander bilden, z. B. aufeinander senkrecht stehen. Letzterer Fall ist aber in räumlichen Medien sehr häufig, sowohl bei Quer- als auch bei Längswellen, so beispielsweise wenn zwei Schallstrahlen einander senk-

[1]) Die Abbildungen — wohl die ersten von unhörbaren Tönen — stammen von dem durch viele akustische Studien verdienstvollen ersten Verfertiger verläßlicher Stimmgabeln, Rudolph König (1832—1901).

recht durchkreuzen, und es kann nach der Bewegungsart an der Kreuzungsstelle gefragt werden. Wir beantworten hier diese Frage für einige charakteristische Fälle, die auch sonst für die Übereinanderlagerung besonders von aufeinander senkrechten Schwingungen irgendwelcher Art von Belang sind. Es genügt hierbei wieder, Sinusschwingungen zu betrachten (64).

Fall gleicher Schwingungsdauern. — In Abb. 29 dient der Kreis zur Ermittelung der Lagen sowohl des längs a b als auch des senkrecht dazu, längs c d schwingenden Punktes, wie in Abb. 33 der Mechanik (M 168). Diese Lagen sind danach für die einzelnen Zwölftel der Schwingungsdauer mit Zahlen 0 ..... 11 bezeichnet. Wenn nun ein Punkt beide Schwingungen in Übereinanderlagerung, d. i. zugleich macht, so muß er die auf der Geraden a b angegebenen, zur betreffenden Zeit gehörige Verschiebung in horizontaler Richtung und zugleich die auf c d angegebene in vertikaler Richtung haben. Welche Örter für den Punkt so sich ergeben, dies hängt von dem Phasenunterschied der beiden Einzelschwingungen ab.

Ist der Phasenunterschied Null, d. h. beginnen beide Schwingungen gleichzeitig in der äußersten Elongation, bei 0, so ergibt sich zur Zeit 0 die Lage x, zur Zeit 1 die Lage y usw. bis z und wieder zurück; es erfolgt also Schwingung in der Diagonale x z.

Ist der Phasenunterschied $^1/_{12}$ Schwingungsdauer, so ist die horizontale Schwingung bei 0 wenn die vertikale schon bei 1 ist, was zusammen die Lage l ergibt; ebenso ergeben horizontal 1 und vertikal 2 zusammen die Lage m u. s. f., woraus man die Ellipse als Bahn der übereinander gelagerten Schwingungen ersieht.

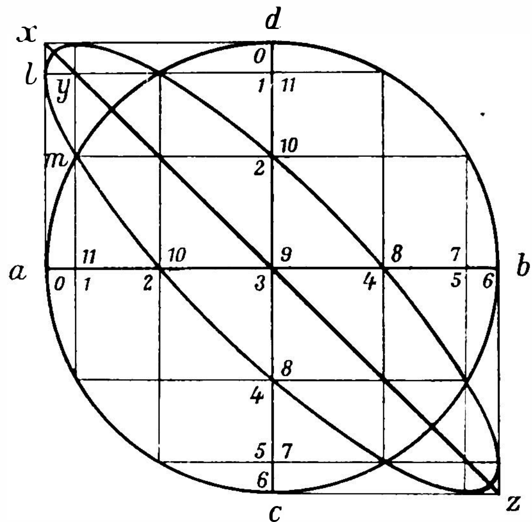
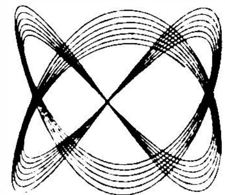


Abb. 29. Zwei aufeinander senkrechte Schwingungen, 1:1 mit verschiedenen Phasenunterschieden.

Beim besonders bemerkenswerten Phasenunterschiede von ¼ Schwingungsdauer, wobei die eine Schwingung äußerste Elongation hat, wenn die andere in der Ruhelage ist, erhält man den Kreis a c b d als Bahn der Übereinanderlagerung.

Haben die beiden aufeinander senkrechten Schwingungen nicht genau gleiche Schwingungsdauern, so daß die eine der anderen allmählich mehr und mehr vorausgeht, so machen sie der Reihe nach alle möglichen Phasenunterschiede durch. In der Gesamtschwingung geht dann die gerade Linie in eine Ellipse über, die allmählich zum Kreise wird, der dann in der anderen Richtung sich abflacht, zur Ellipse und schließlich zu einer geraden Linie wird, die senkrecht zu x z steht, womit ½ Schwingungsdauer Phasendifferenz erreicht ist. Das weitere ist Wiederholung in verkehrter Reihenfolge bis wieder zur Geraden x z.

Bei beliebigem Schwingungsdauerverhältnis sind die Bahnen in der gleichen Weise ebenfalls leicht zu erhalten; sie haben entsprechend den Schwingungsdauerverhältnissen verwickeltere Formen. Abb. 30 zeigt die mit abnehmender Amplitude in Umwandlung begriffenen Formen beim Verhältnis 2 : 3.


Abb. 30. Quint (2:3), aufeinander senkrecht.

Alle diese Bahnformen beschreibt auch eine Pendelkugel, die so aufgehängt ist, daß sie in zwei aufeinander senkrechten Richtungen zwei verschiedene Schwingungsdauern hat, z. B. wenn die Pendellänge durch eine besondere Achse geknickt ist, so daß das Pendel in der einen Richtung mit ganzer Länge, in der anderen nur mit einem Teil der Länge schwingt.

Resonanz.

82. Resonanz ist auch eine der Erscheinungen, die nur bei Wellen sich zeigen. Sie ist die Erregung von Schwingungen durch einen Wellenzug. Das zu erregende schwingungsfähige Gebilde muß dabei dieselbe Schwingungsdauer haben, die dem Wellenzug eigen ist; sonst fehlt die Resonanz.

83. Resonanz mit Schallwellen. — Ein charakteristisches Beispiel von Resonanz gibt ein Klavier mit gehobener Dämpfung, in das man einen Ton singt: es erklingt diejenige Saite, deren Ton gesungen wurde; andere Saiten, deren Töne im hineingesandten Ton nicht enthalten waren, erklingen nicht. Die erklingende Saite ist von der Welle des gesungenen Tons in Bewegung gesetzt worden.

Resonanz ist empfindlich gegen Verstimmung. Man kann auch eine Stimmgabel durch Ansingen oder durch den Ton einer zweiten Gabel zum Erklingen bringen, aber wieder nur wenn die Tonhöhen übereinstimmen. Nur zwei gleichgestimmte Gabeln können einander auf dem Wege durch die Luftwelle erregen; verstimmt man eine derselben durch Aufkleben von etwas Wachs, so versagt die Resonanz. Die Erklärung war schon Galilei bekannt. Der herankommende Wellenzug übt mit seinen Verdichtungen und Verdünnungen abwechselnd Druck- und Saugwirkung auf das schwingungsfähige Gebilde aus. Eine einzelne Welle würde ihm dabei nur eine äußerst geringe Amplitude beibringen; wenn aber das Gebilde dieselbe Schwingungsdauer hat, wie die Welle, so schwingt es mit dieser anfänglich geringen Amplitude so, daß alle nachfolgenden Wellen die Amplitude vergrößern können, indem Druck- und Saugwirkung stets rechtzeitig eintreffen, um schon vorhandene Bewegung zu unterstützen. Die Amplitude wächst daher so an, daß das Gebilde nun selbst merklich Wellen aussendet, was sich dann fortsetzt, wenn der erregende Wellenzug aufgehört hat.

Das schwingungsfähige Gebilde entnimmt dem Wellenzug Energie und speichert sie in sich auf, und dies ist charakteristisch für Resonanz. Die Energie kann in Wellen wieder verausgabt werden, wie beim Nachklingen der Saite oder Stimmgabel; sie kann aber auch durch Reibung im schwingungsfähigen Gebilde Wärmeform annehmen. Die Energieabgabe aus der Welle an das Gebilde ist dadurch bedingt, daß die vom Medium der Welle auf das Gebilde ausgeübte Kraft das letztere auf einem ihr gleichgerichteten Weg trifft; nur wenn Kraft und Weg gleiche Richtung haben, wird Arbeit von der Kraft geleistet (M 89); daher die Notwendigkeit der Übereinstimmung der Schwingungszahlen für die Resonanz. Durch solche Arbeitsaufnahme aus dem Medium wirkt ein resonierendes Gebilde stets energieentziehend auf seine Umgebung, wenn diese gleichperiodische Wellenzüge enthält. Die Amplitude des resonierenden Gebildes steigt dabei solange an, bis die mit der Amplitude wachsenden Energieverluste des Gebildes (durch Wellenaussendung oder Reibung) gleich geworden sind der Energieaufnahme aus der Umgebung. Energieaufnahme aus Wellenstrahlen — Absorption derselben — erfolgt stets durch Resonanz (vgl. O 85, E 430).

84. Andere Fälle von Resonanz. — Die resonanzerregende Welle muß nicht immer Luftwelle sein; sie kann auch durch flüssige oder feste Medien an das schwingungsfähige Gebilde kommen. Beispielsweise können zwei Pendel gleicher Schwingungsdauer an gemeinsamem Gestell aufgehängt sein; schwingt das eine Pendel, so erregt es alsbald das andere zum Mitschwingen. Es bewegt nämlich das schwingende Pendel seinen Aufhängepunkt in kleinen Am-

plituden hin und her[1]), was eine Welle ins Gestell sendet, die aufs zweite Pendel wirkt. Sind die beiden Pendel dicht beieinander aufgehängt, so ist es überflüssig eine zwischenliegende Welle zu betrachten, von der kaum ein Stück vorhanden ist. So auch in manchen anderen Fällen, wo ein schwingendes oder sonst periodische Kräfte gebendes Gebilde unmittelbar auf ein anderes, schwingungsfähiges Gebilde gleicher Periode wirkt. Marschiert z. B. Militär im Gleichschritt über eine Brücke, und haben deren Schwankungen in vertikaler Richtung eine Eigenschwingungsdauer, die gleich ist der Schrittzeit, so können die Schwankungen der Brücke durch Resonanz bis zu Amplituden von gefährlicher Größe anwachsen.

Resonanz wird auch bei vielen Tonquellen der Musik benutzt, um deren Schwingungen gut auf die Luft zu übertragen (97).

85. Resonanz von Luftmassen. — Geeignet abgegrenzte Luftmassen haben Eigenschwingungsdauern.

Dies zeigt sich beispeilsweise an einer einseitig geschlossenen Röhre, wie etwa dem Glaszylinder in Abb. 31. Schlägt man mit der flachen Hand auf das offene Ende des Zylinders, so daß Luft hineingetrieben wird, und zieht die Hand schnell wieder weg, so hört man einen kurzen Ton; es ist der Eigenton der Luftmasse in der Röhre. Er entsteht durch Aus- und Einschwingen der Luft am offenen Ende. Man kann das auch als eine im Rohr hin und her laufende Welle auffassen, die durch das kurze Hineintreiben von Luft entstanden ist und die an beiden Enden des Rohres reflektiert wird, wodurch sie zu einer stehenden Welle wird (80). Am offenen Ende befindet sich dabei ein Bauch der Bewegung (zugleich Knoten des Drucks), am geschlossenen ein Knoten der Bewegung (Bauch des Druckes); von Bauch zu Knoten ist $\frac{1}{4}$ Wellenlänge (vgl. Abb. 27), und somit muß der Eigenton der Röhre eine Wellenlänge gleich der 4-fachen Rohrlänge haben. Der Ton wird außen hörbar, weil bei der Reflexion der inneren Welle am offenen Rohrende jedesmal ein Teil der Energie nach außen abgegeben wird.

Diese Eigenschwingung der Luft im Rohre kann, wie jede Schwingung, auch durch Resonanz erregt werden. Es ist nur nötig, daß der Ton, dessen Viertelwellenlänge gleich der Rohrlänge ist, von außen herankommt, etwa inde m man eine angeschlagene Stimmgabel an das Rohr hält, wie es Abb. 31 zeigt. Man hört dann diesen Ton durch das Mitschwingen der Luft in der Röhre sehr verstärkt, weil die Energieabgabe aus der Rohrmündung an die umgebende Luft viel günstiger ist als von den Zinken der Stimmgabel. Es ist dies ein Beispiel der Energieentziehung durch Resonanz (83), verbunden mit Weitergabe der Energie wieder in Wellengestalt.

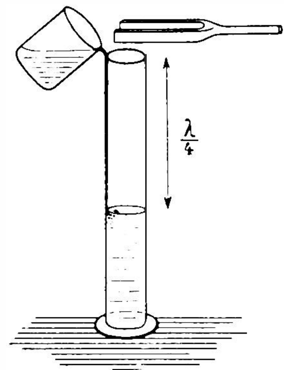


Abb. 31. Resonanz einer Luftsäule.

Ändert man die Länge der Luftsäule im Rohr, etwa durch Eingießen von Wasser (Abb. 31), so kann man sie auf einen gegebenen Ton abstimmen. Man hört den Ton der über das offene Rohrende gehaltenen Stimmgabel nur schwach, wenn das Rohr keine Resonanz gibt, weil es etwa zu lang ist; gießt man aber langsam Wasser ein, so erreicht man in bestimmter Höhenlage der Wasseroberfläche sehr auffallende Verstärkung des Tons, die sofort wieder wegfällt, wenn

[1]) Es geschieht dies durch die Kraft q, Abb. 31 der Mechanik.

man etwas zu viel Wasser eingießt. Es ist das wieder ein Beispiel des Gebundenseins der Resonanz an Gleichheit der Schwingungsdauern.

Man kann so leicht die Schwingungszahl eines gegebenen Tons ermitteln, indem man ein Rohr auf ihn abstimmt und die Viertelwellenlänge am Rohr abmißt, aus welcher mit der Schallgeschwindigkeit die Schwingungsdauer und Schwingungszahl berechnet wird (Gl. 5).

Auch beiderseits offene Röhren haben Eigenschwingungsdauern und geben daher Resonanz. Rohrlänge ist hier die halbe Wellenlänge des Eigentons; denn es befindet sich an beiden Enden ein Bauch der Bewegung (Knoten des Drucks). Die Luft schwingt an beiden Enden gleichzeitig aus und ein; dies gibt in der Mitte des Rohres einen Bauch des Drucks (Knoten der Bewegung).

Mit eben diesen Bewegungen werden Luftröhren in Gestalt der „Pfeifen" auch als Schallquellen benutzt, worauf wir zurückkommen (104, 106).

86. Luftresonatoren zur Klanganalyse. — Ist der Eigenton einer gegebenen Luftmasse in einem herankommenden Klang als Sinusbestandteil enthalten (64), so tönt die Luftmasse mit; sie verrät dadurch das Vorhandensein dieses Sinusbestandteiles. In dieser Weise kann man mittels einer Anzahl abgestimmter Luftresonatoren Klanganalysen (65) ausführen. Es ist nur nötig, daß die Resonatoren selber bloß reine Sinusschwingungen machen und daher auch nur auf solche ansprechen und also eine Analyse nach einfachen Tönen geben. Dies trifft bei zylindrischen Lufträumen nicht zu; diese können außer ihren soeben betrachteten Grundschwingungen (85) auch Oberschwingungen ausführen (107). Kugelige Luftmassen erfüllen dagegen gut die Bedingung einfacher Sinusschwingungen. Man verwendet daher als Resonatoren zur Klanganalyse Hohlkugeln aus Messing oder Glas, die an einer Stelle eine Öffnung haben, was den Bauch der Bewegung gibt, und an der diametral entgegengesetzten Stelle, wo der Bauch des Druckes ist, ein kleines, kurzes Ansatzrohr tragen, womit man sie ans Ohr setzt, um das Mitschwingen abzuhören.

Daß ein geübtes Ohr auch ohne Resonatoren mit einiger Sicherheit Sinusbestandteile aus einem Klang herauszuhören vermag, dies haben wir schon als den Anlaß für das Suchen nach Resonatoren im Ohr angegeben (65, 66).

Schalldruck.

87. Wenn eine Schallwelle auf eine feste Wand trifft, übt sie einen Druck auf dieselbe aus. Es kann dies zunächst verwunderlich erscheinen, weil die Schallwelle sowohl Verdichtung als auch Verdünnung in Abwechslung an die Wand bringt, deren gegenteilige Wirkungen einander aufheben könnten. Nähere Betrachtung zeigt indessen letzteres als unzutreffend. Es sei die Wand vollkommen reflektierend; dann bildet sich an ihr eine stehende Welle aus, so daß an der Wand der Bauch des Druckes ist und $\frac{1}{4}$ Wellenlänge davon der Bauch der Bewegung (80). Abb. 32 stellt schematisch den Zustand an der Wand w w dar, die auch Boden eines offenen Kastens sein kann, in welchen die Welle eindringt; s s ist dann eine Luftschicht, die mit starker Amplitude a von und zu der Wand schwingt (vgl. 85). Um das Wesentliche einzusehen, nehmen wir $a = \lambda/8$ an (wie in der Abb.) und rechnen ohne Rücksicht auf genaue Form der Welle und auf

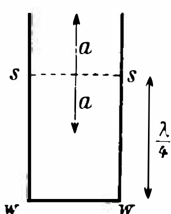


Abb. 32. Schalldruck (Asymmetrie).

Wärmewirkungen (vgl. 100 und 24). Es steigt dann der Druck an der Wand beim Hereinschwingen von s s von 1 Atm. auf 2 Atm., entsprechend dem Sinken des Volums im Verhältnis 2:1 (M 356). Beim Herausschwingen steigt das Volum im Verhältnis von 2:3; es sinkt daher der Druck von 1 Atm. auf $^2/_3$ Atm. Man sieht, daß der Überdruck an der Wand $2 - 1 = 1$ Atm., der Unterdruck aber nur $1 - ^2/_3 = ^1/_3$ Atm. beträgt; der Unterschied wird als durchschnittlicher, über die ganze Zeit der Schwingungen gerechneter Schalldruck merklich.

Man sieht, daß der Schalldruck Folge der Ungleichheit (Asymmetrie) des Hin- und Wegschwingens an einer Wand ist (vgl. auch 100), und da diese Ungleichheit notwendigerweise mit der Anwesenheit der Wand verbunden ist, kann auch der Schalldruck nie fehlen. Die eingehende Durchführung der Rechnung ergibt, daß der Druck proportional ist dem Quadrat der Amplitude der Welle und zwar gleich der diesem Quadrat ebenfalls proportionalen Energie der Welle in der Raumeinheit nächst der Wand (immer von Wärmewirkung abgesehen).

Diese Gleichheit des Schalldrucks mit der Energiedichte des Schalls ist übrigens Sonderfall einer allgemeinen Beziehung, wonach Druck überhaupt gleich ist der Dichte derjenigen Energie, welche mit der Fläche, auf die der Druck ausgeübt wird, in Wechselwirkung tritt (M 376 und E 433), wonach auch Licht einen Druck ausübt.

Der Schalldruck ist mittels Torsionswaage meßbar; er ist auch bei gut hörbarem Schall klein (44), immerhin aber bei lautem Schall das 1000-fache des Druckes von Licht gewöhnlicher Intensität. Messung des Schalldruckes ist der gegebene Weg zu absoluter Messung von Schallintensitäten; denn Intensität ist Energie (44). Dabei ist zu berücksichtigen, daß in der stehenden Welle an der reflektierenden Wand die Energie der fortlaufenden Welle verdoppelt ist, da ankommende und reflektierte Welle übereinander gelagert sind. Am geschlossenen Ende eines Luftresonators, welcher die Energie häuft (83, 85), wird der Schalldruck leicht bis zur Meßbarkeit mit Flüssigkeitssäulen vervielfacht.

Bewegte Schallquelle und bewegter Beobachter (Doppler's Prinzip).

88. Nähern sich Beobachter und Schallquelle einander, so ist der Ton erhöht, entfernen sie sich voneinander, so ist er vertieft. Jedoch kommt es dabei immer auf Geschwindigkeiten relativ zum schalltragenden Medium an, und es ist nicht gleichgültig, ob die Quelle oder ob der Beobachter bewegt ist. Alles dies ist leicht begreiflich aus der Wellennatur des Schalles und aus der Eigenschaft des Ohres, nur von den Bewegungen beeinflußt zu werden, die das Trommelfell erhält (Doppler 1847). Die Beobachtung der Tonhöhenänderungen ist bei den schnell bewegten Fahrzeugen, die oft Schallquellen sind, heute fast alltäglich: Kommt das Fahrzeug heran, so ist sein Ton erhöht; beim Vorbeifahren vertieft sich plötzlich der Ton, und er bleibt beim Weiterfahren vertieft.

89. Bewegter Beobachter. — Die Schwingungszahl des Tons, welchen der Beobachter hört, ist stets gegeben durch die Zahl der Wellen, die sein Ohr in der Sekunde passieren (45). Ruht der Beobachter in der Luft, so ist diese Zahl gleich der Schwingungszahl der ebenfalls ruhenden Quelle, nämlich $n = v/\lambda$, wenn λ die Wellenlänge ist (45). Ist aber der Beobachter mit der Geschwindigkeit b in

Richtung des Schallstrahles in der Luft bewegt, so gehen die Schallwellen mit der Geschwindigkeit $v - b$ an ihm vorbei; er hört demnach einen Ton der Schwingungszahl

$$n' = (v - b)/\lambda = n(v-b)/v\ .$$

Die Schwingungszahl erscheint also verkleinert, der Ton vertieft, wenn der Beobachter mit dem Schall, oder — was dasselbe — von der Schallquelle weg sich bewegt. Geht der Beobachter dem Schall entgegen, so ist b negativ und die Schwingungszahl also erhöht.

90. Bewegte Schallquelle. — Wenn die Schallquelle in der Luft bewegt ist, so tritt eine Änderung der Wellenlänge ein; es ist also in diesem Falle eine vom Beobachter unabhängige Wirkung vorhanden. Vorn, in Richtung der Bewegung, gibt die Quelle verkürzte Wellen aus, hinten verlängerte, weil jede Phase, die die Quelle ausgibt, mit der Geschwindigkeit v in der Luft von ihr wegläuft und weil die Quelle in der Zeit bis zur nächsten gleichen Phase auch selber einen Weg in der Luft zurückgelegt hat, um welchen daher die Wellenlänge verkürzt bzw. verlängert ist. Ist q die Geschwindigkeit der Quelle gegen Luft in Richtung des betrachteten Schallstrahles, so ist demnach die in dieser Richtung ausgesandte Wellenlänge $\lambda_1 = \lambda - q/n = (v-q)/n$. Der Beobachter, welcher, in der Luft ruhend, diesen Wellenzug empfängt, hört der veränderten Wellenlänge entsprechend eine veränderte Schwingungszahl

$$n_1 = v/\lambda_1 = nv/(v-q),$$

d. i. einen erhöhten Ton, wenn die Schallquelle sich ihm nähert, einen vertieften, wenn sie sich von ihm entfernt.

Man sieht, daß in jedem Fall, ob der Beobachter oder die Schallquelle bewegt ist, Annäherung beider Erhöhung, Entfernung Vertiefung des Tones zur Folge hat, daß aber keine genaue Gleichheit der Wirkungen in beiden Fällen besteht. Denn es kommen die Geschwindigkeiten b und q in verschiedener Weise in den Gleichungen für n' und n_1 vor.

Man sieht die Verschiedenheit auch unmittelbar aus den zu den Gleichungen gehörigen Überlegungen ein. Entfernte sich z. B. die Schallquelle mit Schallgeschwindigkeit vom Beobachter, so würde die Wellenlänge verdoppelt, der Ton also um eine Oktave vertieft; entfernte sich aber der Beobachter mit Schallgeschwindigkeit von der Quelle, so sänke die Tonhöhe bis zur Schwingungszahl Null herunter, weil der Beobachter dauernd in derselben Welle verbliebe.

91. Quelle und Beobachter in der Verbindungslinie bewegt. — Ist bei der Geschwindigkeit q der Quelle auch der Beobachter bewegt und zwar wie vorher mit der Geschwindigkeit b, alles relativ zum Medium, so hört er n_1 (90) zu n'_1 verändert mit dem oben gefundenen Faktor $(v-b)/v$ (89), wonach

$$n'_1 = n(v-b)/(v-q)\ .$$

Man sieht daraus, daß gleiche Bewegung von Quelle und Beobachter ($q = b$), wobei ihr Abstand unverändert bleibt, keine Wirkung gibt ($n'_1 = n$); es heben also Wellenlängenänderung und Schwingungszahlverschiebung in diesem Fall einander ganz auf; merkliche Wirkung ist also an Relativbewegung zwischen Quelle und Beobachter gebunden. Wird die Geschwindigkeit w dieser Be-

wegung positiv gerechnet bei Abstandsvergrößerung, so ist $w = b - q$, womit die gehörte Schwingungszahl

$$n'_1 = n(v-b)/(v-b+w) \qquad 91)$$

wird. Man sieht aus dieser Gleichung, da b nicht weggefallen ist, daß die Relativbewegung (w) von Quelle und Beobachter nicht allein maßgebend ist für die Wirkung, sondern daß es auch noch auf Bewegung des Beobachters in der Luft (b) ankommt. Es entspricht dies der vorher bemerkten Ungleichwertigkeit der Bewegungen von Quelle und Beobachter.

92. Anwendung auf Lichtwellen. — Es kann alles dies — das „Dopplersche Prinzip" — in entsprechender Bedeutung für alle Wellen gültig erwartet werden, so auch für die Wellen des Lichtes. Es tritt hier anstelle der Schallgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit c, anstelle der Luft der Äther (O 2, 4) oder Uräther (O 26), in welchem die Wellen zwischen Quelle und Beobachter mit der Geschwindigkeit c laufen[1]), und die Schwingungszahl ist bestimmend für die beobachtbare Farbe, genauer Spektralstelle, des Lichtes (O 52).

In dieser Weise ist Dopplers Prinzip schon vielfach zur Ermittelung der sonst nicht wahrnehmbaren Geschwindigkeiten von Gestirnen in der Gesichtslinie — „Radialgeschwindigkeiten" — benutzt worden. Insofern die Spektrallinien der leuchtenden Stoffe der Gestirne bekannte Schwingungszahlen n haben (O 91), kann Beobachtung veränderter Schwingungszahlen n'_1 als Bewegung des Gestirns relativ zur Erde gedeutet werden. Für die Geschwindigkeit w dieser Bewegung ergibt sich nach Gl. 91 $w = (c-b)(n - n'_1)/n'_1$. Hierin kommt noch die Geschwindigkeit b der Erde relativ zu dem zwischen Erde und Gestirn befindlichen Uräther vor[2]); sie ist unbekannt. Ist diese unbekannte Geschwindigkeit klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c — was man annimmt —, so macht ihre Weglassung ($b = 0$) nicht mehr aus für w, als die vorhandenen Unsicherheiten in der schwierigen Ermittelung von $n - n'_1$[3]), und mit dieser Annahme, d. i. nach der Gleichung $w = c(n-n'_1)/n'_1$, sind die schon reichlich zusammengestellten Radialgeschwindigkeiten der Gestirne berechnet. Dieselben wurden zum Teil sehr groß gefunden besonders für Nebelflecke; für Fixsterne ist 50 km/sek keine seltene Geschwindigkeit.

Allerdings käme es darauf an zu wissen, ob nicht andere, unbekannte Ursachen bei den beobachteten Schwingungszahlenverschiedenheiten mitwirken, in welchem Falle der Schluß auf die Geschwindigkeit gefälscht wäre. Man kann darüber in den entlegensten Gegenden des Himmelsraumes am wenigsten sicher sein[4]).

---

[1]) Übergänge von einem Äther in einen anderen Äther zwischen dem leuchtenden Gestirn und der Erde (O 23, 26) würden Stellen von Wellenlängenänderungen sein, entsprechend den oben für den Schall durchgeführten Rechnungen, ohne aber die Schwingungszahlen zu ändern.

[2]) Man könnte diese Geschwindigkeit „Absolutgeschwindigkeit" der Erde nennen wollen. Dies setzte jedoch voraus, daß der Uräther des ganzen Himmelsraumes einheitlich, nicht in verschiedenen Teilen verschieden bewegt sei, wofür kein Anhaltspunkt vorhanden ist (O 26, M 46).

[3]) Diese Differenz ist immer sehr klein; ein Schwingungszahlenunterschied wie der der beiden D-Linien des Sonnenspektrums (O 91) würde schon einer Geschwindigkeit $w = 300$ km/sek entsprechen.

[4]) Wenn, wie es wohl der Fall ist, mit zunehmendem Abstand der Gestirne zunehmende Linienverschiebungen (im Sinne von Abstandsvergrößerung) sich zeigen, so kann vermutet

Am sichersten ist die Berechnung von Radialgeschwindigkeiten nach Dopplers Prinzip, wenn verschiedene Teile desselben Himmelskörpers verschieden gelegene Spektrallinien zeigen, so daß man auf innere Bewegungen, z. B. Drehung bei großen Nebeln, schließen kann, oder wenn die Linien im Gesamtspektrum verdoppelt erscheinen, wie bei Doppelsonnen, deren Kreisen um einen gemeinsamen Schwerpunkt (M 221) hierdurch angezeigt ist. Es ist in solchen Fällen die Gleichheit der lichtaussendenden Atome und die Gleichheit etwaiger Änderungen der Schwingungszahlen auf dem Lichtwege am besten verbürgt. In dieser Weise, durch Beobachtung periodischer Verdoppelungen oder auch periodischer Verschiebungen der Spektrallinien, sind schon viele Doppelsonnen aufgefunden worden, die wegen zu großer Entfernung auch mit besten Fernrohren nur als einfache Sterne erscheinen; man nennt sie „*spektroskopische*“ *Doppelsterne*. Die Messungen der Linienverschiebungen geben dabei nach Dopplers Prinzip auch die Möglichkeit, die Bahnen der um einander kreisenden Sonnen zu berechnen, in manchen Fällen auch widerspruchsfreie Schlüsse auf die Massen solcher Gestirne zu ziehen.

Wichtig ist, daß bei getrennt mit dem Fernrohr sichtbaren Doppelsternen die nach Dopplers Prinzip gezogenen Schlüsse durch unmittelbare Beobachtung der Bewegungen der Sterne bestätigt sind, was einen unmittelbaren Nachweis der *Gültigkeit des Prinzips für Lichtwellen* darstellt. Andere Nachweise liegen an den Spektren der Planeten vor, deren Bewegungen relativ zur Erde gut bekannt sind. Die *Planeten wirken dabei wie selbstleuchtend* mit Sonnenlicht.

Geschwindigkeiten irdischer Lichtquellen, die groß genug sind, um merkliche Linienverschiebungen zu geben, hat man bei den leuchtenden Atomen der Kanalstrahlen gefunden (E 519); auch hierbei ist Dopplers Prinzip bewährt.

Die Bewährung des Prinzips für Lichtwellen ist in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die *Lichtwellen ebenso unabhängig von Bewegungen der Quelle und des Beobachters im Äther sich ausbreiten* (O 25, 26), wie die Schallwellen in der Luft. Denn dieses Verhalten ist Voraussetzung für die Gültigkeit des Prinzips.

---

werden, daß die Ursache vielleicht doch nicht Bewegung der Gestirne sei (Alles von Allem sich entfernend). Es können auch andere, noch unbekannte Ursachen vorliegen, die irgendwie mit den großen Längen der Lichtwege zusammenhängen. Jedenfalls liegen in diesen „*Rotverschiebungen*“ Geheimnisse verborgen.

IV. Schallquellen.

93. Hier behandeln wir einige Tonquellen, besonders der Musik, die grundsätzlich Bemerkenswertes zeigen.

Man kann eine Einteilung treffen nach dem Aggregatzustand der benutzten schwingenden Massen; wir betrachten zuerst die tönenden festen, dann die gasförmigen Körper.

Die Tonquellen festen Aggregatzustandes können linear oder flächenhaft sein.

Die tönenden linearen festen Körper unterscheiden sich in „Saiten" und „Stäbe". Eine Saite schwingt infolge äußeren Zuges; sie muß durch äußere Kräfte gespannt sein. Ein Stab schwingt infolge seiner eigenen, inneren, elastischen Kräfte.

a) Saiten.

94. Grundschwingung. — Abb. 33 zeigt bei $n = 1$ die einfachste Schwingungsweise einer Saite, ihre Grundschwingung, eine Pendelbewegung zwischen den beiden abgebildeten Grenzlagen.

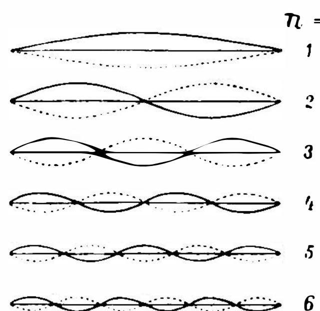


Abb. 33. Saiten-Schwingungen.

Ihre Schwingungszahl n, welche auch die des Grundtons der Saite ist, muß, wie bei jeder Schwingung, aus den wirkenden Kräften und den Massen mittels des Grundgesetzes (M 115) berechenbar sein. Am einfachsten kommt man zum Ziele, wenn man die Bewegung der Saite als stehende Querwelle an ihr auffaßt, zustandekommend durch das Hin- und Herlaufen einer an ihr erregten, an beiden Enden stets reflektierten Sinuswelle (79). Dabei ist die schon bekannte, aus Kraft und Masse nach dem Grundgesetz berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer Querwelle an gespanntem Seil benutzbar (Gl. 8a). Für die Schwingungszahl gilt stets $n = v/\lambda$ (45), und die Wellenlänge λ ist hier gleich der halben Saitenlänge L, weil ihre Endpunkte zwei benachbarte Knoten der stehenden Welle sind. Somit ist die Schwingungszahl des Grundtons der Saite

$$n = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{\text{spannende Kraft}}{\text{Längeneinheitsmasse}}}\,. \qquad 94)$$

Die Gleichung kann leicht mit der Wirklichkeit verglichen werden, wenn man die Saite durch Gewichte spannt (etwa über eine Rolle), die in dyn (M 192) einzusetzen sind und die Masse durch Wägung in gr bestimmt (M 124).

Die Erregung der Schwingung kann durch Zupfen, wie bei der Zither, durch Schlagen mit weichem Hammer, wie beim Klavier, oder durch Streichen mit dem Violinbogen geschehen. Im letzteren Falle kann die Saite mit unveränder-

licher Amplitude fortschwingen; der Bogen nimmt sie abwechselnd mit und läßt sie los, ersteres durch die große Reibung der Ruhe (M 287), letzteres wegen der verringerten Reibung der Bewegung, sobald bei wachsender Elongation Gleiten am Bogen eingetreten ist.

Die in Gl. 94 gegebene dreifache Abhängigkeit der Tonhöhe einer Saite, von Länge, Spannung und Masse, war bereits Galilei bekannt. Sie wird reichlich benutzt bei allen Saiteninstrumenten der Musik, um alle erwünschten Tonhöhen herzustellen. Die Violine und die ihr ähnlichen Instrumente können mit wenig Saiten durch bloße Längenänderung viele Töne geben und die Tonhöhen auch stetig sich ändern lassen. Daß Längen einer Saite, die im Verhältnis einfacher ganzer Zahlen zu einander stehen, wohlklingende Intervalle geben, wußte schon Pythagoras.

95. Oberschwingungen der Saiten. — Die soeben betrachtete, in Abb. 33 bei n = 1 dargestellte Grundschwingung einer Saite ist nicht die einzig mögliche Schwingungsweise. Der Bedingung, daß an den festen Enden der Saite Knoten der Bewegung der stehenden Welle sein müssen, genügen auch alle die anderen in der Abbildung dargestellten Schwingungsweisen mit Ausbildung einer steigenden Anzahl von Knoten in der Saitenlänge (79, 80). Da dann die Wellenlängen an der Saite $\frac{1}{2}$, $^1/_3$, ... von der Wellenlänge der Grundschwingung sind, müssen die Schwingungszahlen n das 2-, 3-, ... fache der Schwingungszahl des Grundtons sein, wie es in der Abbildung angegeben ist. Dies sind die möglichen Töne der Querschwingungen einer gegebenen Saite; sie bilden zusammen mit dem Grundton eine harmonische Tonreihe (56, Tab. 14).

Man kann alle diese Schwingungsformen und ihre Töne leicht an einer Saite hervorbringen, wenn man ihre Ausbildung geeignet unterstützt. Dies geschieht durch sanfte Berührung der Saite mit dem Finger an der Stelle, wo ein Knoten entstehen soll, und durch Streichen mit dem Bogen, wo der Bauch entstehen soll. So gibt die Saite S S (Abb. 34), gespannt zwischen zwei Metallkanten an dem

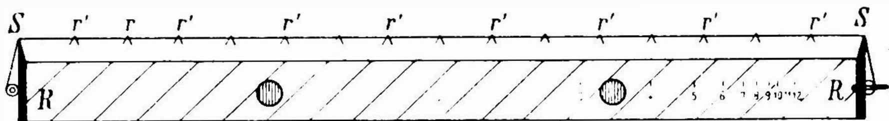


Abb. 34. Nachweis der Obertöne einer Saite.

„Resonanzkasten" R R (mit zunächst wegzudenkenden Papierreitern r r') ihren Grundton, den tiefsten möglichen, wenn sie in der Mitte gestrichen wird; bei 2 berührt und bei 4 gestrichen gibt sie die Oktave, bei 3 berührt und bei 6 gestrichen die Duodezime usw. Die Saite schwingt dabei in Abteilungen, jede derselben ebenso, wie die Saite entsprechend verkürzt schwingen würde. In dieser Weise, durch Erregung der Oberschwingungen einer einzigen Saite, wurden wohl schon zu sehr früher Zeit die Intervalle der Oktave, Quint und Terz als einfachste Möglichkeiten für Musik verfügbar.

Zum Nachweis, daß bei solcher Erregung nicht nur etwa die gestrichenen Teile der Saite schwingen, sondern daß alle der Abb. 33 entsprechenden Knoten und Bäuche entstehen, dienen die kleinen, auf die Saite zu setzenden Papierreiter r r' (Abb. 34). Sind alle 15 Reiter aufgesetzt, die die Saite in 16 gleiche

Teile teilen, und berührt man bei $^1/_8$ Länge und streicht bei $^1/_{16}$, wo der letzte Reiter r′ sitzt, wobei die Saite den Ton 8, d. i. die 3. Oktave ihres Grundtons gibt, so fällt nicht nur dieser letztere r′ ab, sondern auch alle übrigen Reiter r′ an der ganzen Saitenlänge, da sie an Bäuchen der Schwingung sind; die dazwischen liegenden Reiter dagegen, die an Knoten sind (einer davon mit r bezeichnet), bleiben sitzen. Man kann dann bei $^1/_4$ berühren und bei $^1/_8$ streichen; es fällt jetzt wieder jeder zweite Reiter ab, und nur mehr 3 bleiben sitzen. Bei $^1/_2$ Länge berührt und bei $^1/_4$ gestrichen fällt endlich mit dem Reiter dort der andere auf der Gegenseite ebenfalls ab, so daß nur mehr der Reiter in der Mitte sitzt, den schließlich eine Erregung des Grundtons (oder eines ungradzahligen Obertons) auch noch abwirft.

96. Klangfarben der Saitentöne. — Diese in Abb. 33 veranschaulichten Schwingungsweisen erschöpfen schon alle möglichen Querschwingungsweisen einer Saite; denn alle anderen Anfangsformen, aus denen das Schwingen einer Saite losgelassen werden könnte, sind nach dem früher erwähnten Satze (64) darstellbar als Summen von Sinusformen, die alle, wie in Abb. 33, das Gemeinsame haben, an den Enden der Saite die durch die Befestigung bedingten Knoten zu geben.

Die Saite macht demnach, aus beliebiger Anfangsform losgelassen, in Übereinanderlagerung eine Auswahl der bisher betrachteten Schwingungen, und sie gibt demnach ein Gemisch der entsprechenden Sinustöne. Dieses Gemisch bedingt die Klangfarbe des Tons der Saite (vgl. 63, 65, 67). Da somit alle ins Gemisch eingehenden Töne nur der harmonischen Tonreihe angehören, ist die Klangfarbe der Saitentöne stets, bei ganz beliebiger Erregung, durch das Fehlen aller unharmonischen Obertöne charakterisiert. Welche der harmonischen Obertöne vorzugsweise vorhanden sein, welche dagegen fehlen werden, dies hängt von der Anfangsform der Saite ab, die ihrerseits durch die Art der Erregung bedingt ist.

Wird die Saite in der Mitte mit dem Bogen gestrichen, so muß sie vorwiegend den Grundton geben; Oktave und auch die übrigen gradzahligen Obertöne werden nicht erregt, weil sie in der Mitte Knoten haben. Der Ton wird daher etwas dumpf sein, nur verziert durch Duodezime und etwa noch höhere ungradzahlige Obertöne.

Erregt man dagegen die Saite auf $^1/_4$ ihrer Länge, wo die Oktave den Bauch hat, so wird dieser Oberton bestens vertreten sein. Man kann dies auch leicht nachweisen, indem man die so erregte Saite in ihrer Mitte kurz mit dem Finger berührt, was den Grundton auslöschen muß; man hört dann die Oktave, die ungestört bleibt, weil sie in der Mitte den Knoten hat, für sich allein nachklingen. Ebenso kann bei Erregung auf $^1/_6$ der Länge und Berührung bei $^1/_3$ die Duodezime nachgewiesen werden.

Je ferner der Mitte die Saite gestrichen, gehämmert oder gezupft wird, desto mehr Obertöne werden neben dem Grundton erregt, desto „voller" wird der Klang. Die Klavierhämmer treffen die Saiten auf $^1/_7$ der Länge oder noch näher dem Ende. Erregung ganz nahe dem Ende läßt den Grundton zurücktreten und gibt fast nur das Gemisch der Obertöne.

Gezupfte Saiten klingen „schärfer" als gestrichene oder mit stumpfem, weichem Hammer erregte, weil das Zupfen, besonders mit hartem Stift, wie bei der Zither, eine Ecke an der Saite hervorbringt, was dem Beisein allerkürzester

Querwellen als Summanden in der Anfangsform der Saite gleichkommt (vgl. 64, Abb. 21) und somit auch höchster Obertöne im Klang der Saite.

Bei Metallsaiten klingen die hohen Obertöne auch lange nach; gezupfte Darmsaiten klingen dagegen weniger „scharf", weil die schnellen Bewegungen der hohen Oberschwingungen durch die beträchtliche innere Reibung der Darmsaite schnell weggedämpft werden, so daß bald der Grundton allein übrigbleibt.

In dieser Weise erklären sich die besonderen Klangfarben der verschiedenen Saiteninstrumente der Musik und ihrer Erregungsweisen aus der Auswahl der mitwirkenden, stets aber nur harmonischen Obertöne.

97. Übertragung der Saitenschwingungen an die Luft. — Saiten haben so wenig Berührungsfläche mit der Luft, daß sie für sich allein kaum hörbar sind; sie bedürfen der Resonanzböden, wie beim Klavier, oder der Resonanzkästen, wie bei der Violine. Die Übertragung der Schwingungen an diese resonanzfähigen (82), in guter Berührung mit der Luft stehenden Gebilde erfolgt durch die Stellen der Auflagerung — „Stege" genannt —, welche die wirksame Länge der Saite begrenzen (S S in Abb. 34)[1]). Diese Stege erfahren Kräfte von der schwingenden Saite, die nach deren Eigenperiode veränderlich sind; es sind das die Gegenkräfte zu den Kräften, welche von den Stegen auf die Saitenenden ausgeübt werden müssen, um diese festzuhalten. Durch diese Gegenkräfte werden die Stege und von diesen aus die mit ihnen oder mit einem derselben verbundene große Fläche des Resonanzbodens in dieselben schwingenden Bewegungen gesetzt, die die Saite ausführt[2]). Die Amplituden dieser Schwingungen sind im allgemeinen klein; jedoch die große Fläche des Resonanzbodens überträgt sie gut an die Luft. Die Amplituden werden um so größer, der Ton also um so lauter hörbar, je kleiner die Masse des Resonanzbodens ist — der deshalb gewöhnlich aus leichtem, dünnem Holz besteht — und je besser er resonanzfähig ist. Das letztere setzt voraus, daß der Boden die Eigenschwingungsdauer des Saitentons besitzt; ein guter Resonanzboden eines Musikinstruments müßte daher die Eigenschwingungsdauern sämtlicher Töne haben können, die dessen Saiten geben. Dies ist angenähert möglich, weil schwingungsfähige Platten, besonders bei geeigneter Begrenzung, eine sehr große Zahl von Eigentönen in ihren Oberschwingungen besitzen (103). Die eigentümliche Form des Geigenkastens, dessen Deckel Resonanzboden ist, dürfte der Vielfältigkeit seiner Schwingungszahlen günstig sein.

Ist der Resonanzboden zugleich Begrenzung einer Luftmasse, die ebenfalls resonanzfähig sein kann (85) und zwar bei verwickelter Form auf viele Töne, wie beim Geigenkasten, so hat man den Resonanzkasten. Die Luftmasse in demselben erhält ihre Schwingungsenergie vom Resonanzboden und gibt dieselbe aus den Öffnungen des Kastens an die äußere Luft ab. Wir betrachten dies weiter unten näher am einfachen Fall der Stimmgabel (99).

Der Resonanzboden wirkt übrigens auch dann in gewissem Maße luftübertragend, wenn er mangels richtiger Eigenschwingungsdauer ohne die gesteigerten Amplituden einer Resonanz mitschwingt; denn er hat immer eine große Berührungsfläche mit der Luft.

Je mehr Resonanz der Boden oder Kasten einer Saite gibt, desto lauter wird ihr Ton hörbar, desto schneller muß sie aber auch nach einmaliger Erregung durch Schlag oder Zupfen abklingen.

Ist für bestimmte Oberschwingungen einer Saite vorzugsweise Resonanz vorhanden, so werden diese auch vorzugsweise in die Luft übertragen. Man begreift so, daß die Klangfarbe eines Saiteninstruments nicht nur von der Schwingungsfähigkeit der Saiten und von der Erregungsweise abhängen muß, sondern auch von der Beschaffenheit der Resonanzmittel. Dies ist z. B. beim Klavier merkbar: Wenn dessen Resonanzboden mehr für die Obertöne der Saiten mitschwingungsfähig ist als für den Grundton, wie es bei den tiefen Oktaven leicht der Fall sein kann, so können die Obertöne — Oktave, Duodezime — im Klang fast so stark oder auch sogar stärker vertreten sein als der Grundton, was eine eigentümlich reiche, volle Klangfarbe gibt.

---

[1]) Die spannenden Kräfte werden auf die überstehenden Enden der Saite ausgeübt.

[2]) Dies ist am besten möglich, wenn der Steg am beweglichsten Teil des Resonanzbodens aufliegt, d. i. — falls der Boden am Rande befestigt ist — nahe der Mitte, wie bei der Geige. Die in Abb. 34 gezeichnete Lage der Stege einer Saite ist für Resonanzwirkung des Bodens und Kastens ungünstig.

b) Stäbe.

98. Querschwingungen dieser durch die inneren Kräfte ihrer Elastizität bewegten, linearen festen Körper sind für zwei wesentliche Fälle a und b in Abb. 35 dargestellt, nämlich bei einseitig festgeklemmtem Stabe und bei ganz freiem Stabe. In ersterem Fall wird der Stab durch seitliches Zupfen oder Schlagen erregt, dort wo ein Bauch sich bilden soll. Der zweite Fall kann verwirklicht werden, wenn der Stab horizontal durch Fäden unterstützt wird, ungefähr dort, wo Knoten zu erwarten sind; die Erregung erfolgt auch hier durch Schlagen an der Stelle eines Bauches.

Man sieht in der Abbildung die möglichen Schwingungsformen kleinster Schwingungszahlen. Diese Formen mit den Lagen ihrer Knoten und den in der Abbildung angegebenen Schwingungszahlen (die der Grundschwingung des ein-

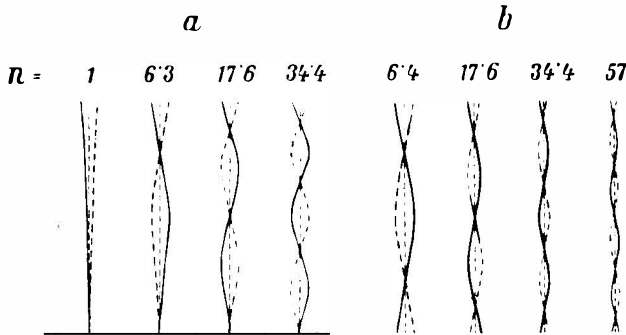


Abb. 35. Schwingungen von Stäben
einseitig fest. beiderseitig frei.

seitig festen Stabes zur Einheit genommen) sind nach den Gleichungen der Elastizitätstheorie (M 272) berechenbar. Da hier Biegung in Betracht kommt, die eine nicht ganz einfache elastische Verformung ist (M 263), so ist die Rechnung etwas umständlich; neue Gedanken kommen aber nicht hinzu.

Die Grundschwingung des einseitig festen Stabes haben wir schon in der Mechanik als Beispiel einer elastischen Schwingung betrachtet (M 165, Abb. 35 dort); sie hat nur den einen, durch die Befestigung gegebenen Knoten. Die Oberschwingungen haben zunehmende Knotenzahlen; ihre Schwingungszahlen stehen in keinem einfachen Verhältnis zu der der Grundschwingung und nehmen mit zunehmenden Knotenzahlen sehr schnell zu.

Die Grundschwingung des freien Stabes hat 2 Knoten. Die Formen müssen hier nach dem Schwerpunktsatz (M 217) derart sein, daß der Schwerpunkt des Stabes in Ruhe bleibt. Denn es wirken nur innere Kräfte; der Schwere ist durch die Aufhängung Gleichgewicht geleistet. Auch hier steigen die Schwingungszahlen mit der Knotenzahl schnell an.

Die Gleichheit der Schwingungszahlen bei gleichviel Knoten in beiden Fällen a und b ist nur angenähert (die Abbildung gibt abgerundete Zahlen); es besteht der Unterschied, daß im Falle b der Stab an beiden Enden beliebige Richtungen annehmen kann, während im Fall a sein unteres, eingeklemmtes Ende feste Richtung behalten muß. Je mehr Knoten im ganzen da sind, desto weniger macht diese Besonderheit des einen Endes aus, desto genauer werden deshalb die Schwingungszahlen bei gleicher Knotenzahl gleich. Übrigens sind dieselben stets verkehrt pro-

portional der dritten Potenz der Stablänge. Flache Stäbe geben beim Anschlagen an einer schmalen Seite viel höhere Töne als an der breiten Seite, was aus der Verschiedenheit der bei Biegung in diesen beiden Fällen wirksamen Kräfte unmittelbar verständlich ist (M Gl. 263).

Das besonders Charakteristische für die Querschwingungen der Stäbe ist bei jeder Unterstützungs- oder Befestigungsweise das Unharmonische ihrer Obertöne; die Schwingungszahlen der Obertöne sind keine ganzzahligen Vielfachen der Schwingungszahl des Grundtons. Die Obertöne klingen daher schlecht zusammen mit dem Grundton (54), und das Tongemisch, welches bei gemischter Erregung der Querschwingungen von Stäben entsteht, z. B. beim Beklopfen mit hartem Hammer, ist eine Dissonanz, ein Beispiel eines aus unmittelbar angebbaren Tönen zusammengesetzten Geräusches (67).

99. Stimmgabel. — Stäbe sind sehr geeignet zur Aufbewahrung einmal an ihnen festgestellter Schwingungszahlen; selbst die Temperatur hat nur wenig und leicht kontrollierbaren Einfluß. Man benutzt die bequeme Form des in der Mitte zusammengebogenen und mit Stiel versehenen Stabes, „Stimmgabel" genannt.

Abb. 36 zeigt eine Gabel mit Resonanzkasten; sie kann aber auch davon abgenommen und frei am Stiel in der Hand gehalten benutzt werden. Wird dann eine der Zinken angeschlagen, so schwingt die Gabel nach der Grundschwingung des freien Stabes, wie in Abb. 35b. Der Stiel schwingt mit: Während die Zinken auseinander- und zusammenschwingen, geht der Stiel auf und ab; die haltende Hand wird mit bewegt; der Schwerpunkt der schwingenden Gesamtmasse muß unverrückt bleiben, weil äußere Kräfte fehlen (M 217), indem die nachgiebige haltende Hand keine solchen ausübt und nur die Schwerkraft unwirksam macht. Die beiden Knoten (K K in Abb. 36) sind bei der Gabelform infolge der Masse des Stiels nahe zusammengerückt.

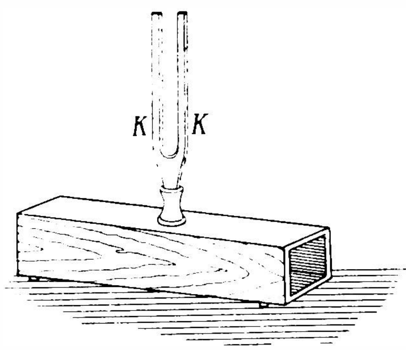


Abb. 36. Stimmgabel mit Resonanzkasten.

Sitzt die Gabel am Kasten, so wird dessen obere Wand mit dem Stiele auf und ab bewegt, was die Luft des Kastens an dessen Öffnung ein- und austreibt. Diese sehr geringe Bewegung wird zur Resonanz gesteigert, wenn die Luftsäule im Kasten auf den Ton der Gabel abgestimmt ist (85), d. h. wenn ihre Länge bei einseitig offenem Kasten ¼ Wellenlänge, bei beiderseitig offenem Kasten ½ Wellenlänge des Tons beträgt. Es wirkt dann die Kastenöffnung als Schallquelle für die Umgebung; ohne Kasten ist der Ton der Gabel nur wenig in die Ferne hörbar nicht nur wegen geringer Berührung der Zinken mit der Luft, sondern auch weil die Wirkung der beiden Zinken für große Raumteile durch Interferenz verloren geht (75).

Kommt es auf äußerst genaue Einhaltung der Schwingungszahl an, so darf die Gabel nicht willkürlich mit oder ohne Kasten benützt werden, weil unbestimmte, mit dem Stiel schwingende Massen die Schwingungszahl in entsprechend unbestimmter Weise abändern, wenn auch bei der überwiegenden Masse der Gabel nur wenig.

100. Asymmetrietöne. — Die Stimmgabel ist leicht frei von Obertönen zu erregen, besonders gut durch Streichen eines Zinkenendes mit kräf-

tigem Bogen bei Festhaltung des Kastens; die Gabelform mit dem Stiel erschwert das Schwingen mit mehr als 2 Knoten, das übrigens, wenn es bei ungeschickter Erregung eintritt, als auffallend hoher und unharmonischer Oberton sogleich stark merklich wird. Die reinen Sinusschwingungen des Stimmgabelzinken, wie sie von elastischen Pendeln auch zu erwarten sind (M 165), sind durch Schreiben auf der Rußtrommel (M 34) selbst bei hart angeschlagener Stimmgabel auch unzweifelhaft nachweisbar; man erhält eine einfache Sinuslinie. Danach ist die Stimmgabel diejenige Schallquelle, von welcher man in hervorragender Weise *einfache Töne* (63) erwarten könnte.

Erregt man aber die Gabel zu einiger Intensität, so klingt ihr Ton durchaus nicht so hohl, wie es einem einfachen Ton entspräche, sondern ziemlich voll. Man hört mit einem Resonator (86) auch leicht die Oktave, den harmonischen Oberton 2 heraus. Es genügt auch, eine angeschlagene Stimmgabel (ohne Kasten) über einen auf ihre Oktave gestimmten Resonator zu halten, wie in Abb. 31, um die Oktave für sich allein aufs deutlichste erklingen zu hören. Eine solche Oberschwingung macht die Gabel selber aber überhaupt nicht; es muß also die Oberschwingung *erst in der Luft hinzukommen.*

Es ist auch verständlich, wie dies möglich ist. Es zeigt sich nämlich, daß in einer sinusförmig schwingenden Längswelle bei nicht kleiner Amplitude immer eine *Verschiedenheit der Verdichtungen von den Verdünnungen* vorhanden ist, und eine solche Verschiedenheit ist gleichbedeutend mit dem Vorhandensein von Obertönen. Das Vorhandensein der Verschiedenheit erkennt man unmittelbar in der Abb. 4c der sinusförmig schwingenden Punktreihe (10). Man sieht, daß die Verdichtungen viel kleinere Strecken einnehmen als die Verdünnungen; die Verdichtung reicht vom 0-ten bis zum 10-ten, die Verdünnung vom 10-ten bis zum 20-ten Punkt, und die Verschiedenheit dieser Strecken (trotz gleichen Punktzahlen) wird um so größer, je größer die Amplitude im Verhältnis zur Wellenlänge ist. Dementsprechend sind auch die Überdrucke an den Verdichtungsstellen größer als die Unterdrucke an den Verdünnungsstellen, ja es würde schon bei Amplitudengrößen unter $\lambda/4$ in einer Längswelle mit Sinusbewegung sogar der Überdruck ∞ erreicht[1]). Solcher Überdruck kann sich aber gar nicht ausbilden, weil er unendlich große Kräfte erforderte, woraus man sieht, daß *bei wachsender Amplitude die Bewegung in einer Längswelle notwendigerweise von der Sinusform abweichen muß* auch dann, wenn sie am Ursprung der Welle sinusförmig ist, wie bei der Stimmgabel. Diese Abweichung von der Sinusform nicht nur der Druckverteilung, sondern auch der Bewegung der Mediumsteile bei unveränderter Wellenlänge ist aber gleichbedeutend mit dem Hinzukommen harmonischer Obertöne zum Grundton (64, 65) und wird vom Ohr auch so empfunden und durch Resonatoren noch besonders verdeutlicht[2]).

Dies ist der *Ursprung der harmonischen Obertöne der Stimmgabel*; man kann Obertöne dieses Ursprungs „*Asymmetrietöne*" nennen, weil ihre

---

[1]) Genau ist dies bei der Amplitude $\lambda/2\pi$ der Fall. Daß die im Anhang VII zur Akustik durchgeführte einfache Druckberechnung nur bei verschwindend kleinen Amplituden gilt, ist dort ersichtlich. Die Asymmetrie der Drucke wurde in anderer Weise bereits früher bei der stehenden Welle klar (87).

[2]) Daß die nach dem Vorhergehenden zu erwartende Hauptabweichung von der Sinusform, nämlich schmälere und spitzere Berge (Verdichtungen) und breitere und flachere Täler (Ver-

Hauptbesonderheit in der ungleichen, asymmetrischen Beschaffenheit der Verdichtungen und der Verdünnungen liegt.

Man sieht aus dieser Überlegung, daß einfache Sinustöne mit großer Amplitude überhaupt bei keiner Schallquelle möglich sind, daß harmonische Obertöne als Asymmetrietöne notwendige Begleiterscheinung aller Töne großer Amplitude sein müssen. Reine Töne, genaue Sinuswellen, sind auch von der Stimmgabel nur als Grenzfall bei verschwindenden Amplituden zu erhalten.

101. Differenztöne (Kombinationstöne). — Eine andere Erscheinung, die mit großen Amplituden verbunden ist, zeigt sich beim Zusammenklingen zweier Töne ungleicher Höhe: es können dann neue Töne auftreten, die in der Klangfarbe keines der beiden Töne enthalten sind, „Kombinationstöne" benannt. Weitaus der hervortretendste Fall dieser Art ist das Auftreten des „Differenztons" beim Zusammenklingen zweier hoher Töne von großer Intensität, wie sie z. B. Pfeifen geben. Sind die Schwingungszahlen der beiden Töne n_1 und n_2, so hat der Differenzton die Schwingungszahl $n_2 - n_1$. Ist anfangs $n_2 = n_1$ und verstimmt man allmählich eine der beiden Pfeifen, so daß $n_2 - n_1$ wächst, so hört man zuerst die Schwebungen (69), und diese gehen dann in den sehr tiefen Differenzton über, dessen Höhe bei weiter wachsendem $n_2 - n_1$ entsprechend aufsteigt[1]). Schwache Tonquellen, wie Saiten, lassen nicht so gut Kombinationstöne hören; am besten treten sie bei den Tonquellen auf, die mit Luftströmen arbeiten, wie bei Pfeifen, beim Harmonium und besonders bei der Sirene.

Da $n_2 - n_1$ auch die Zahl der Schwebungen in der Sekunde angibt, so kann gedacht werden, daß das Ohr bei zu hoher, nicht mehr verfolgbarer Zahl der Schwebungen (etwa mehr als 40 in der Sekunde), diese als Ton, den Differenzton, hört (weshalb er auch „Schwebungston" oder „Stoßton" genannt wurde). Wie die Schwebungen, die doch nur das zeitweilige Unterbrochenwerden einer Reihe von Schwingungen sind (vgl. Abb. 23), als Schwingungen wirken sollen, wäre nicht ersichtlich, wenn nicht Einseitigkeit in den unterbrochenen Schwingungen vorhanden ist, so daß das Ausschwingen nach einer Seite hin bevorzugt ist. Das Neuauftreten einseitig gerichteter Kräfte nach jeder Unterbrechung kann tatsächlich als neues Ausschwingen wirken, so wie es jeder Luftstoß aus den Löchern einer Sirene tut. Man kann Schwebungen und deren Übergang in den Differenzton in der Tat nachahmen mit einer Sirene, deren Löcherkreis periodisch in der Weite wechselnde Löcher enthält; man hört dann bei genügend schneller Drehung neben dem der Löcherzahl entsprechenden Ton auch noch den tieferen Ton, der der Periodenzahl der Löcherweiten entspricht: Es wirken hier außer den Luftstößen der einzelnen Löcher auch noch die an den Stellen der weiteren Löcher besonders hinzukommenden Luftstöße wellenerzeugend. So scheint Einseitigkeit bei der Schwingungserregung in den zusammenwirkenden Schallquellen wesentlich zu sein für das Auftreten der Kombinationstöne. Solche Einseitigkeit ist nicht nur bei Sirene und Pfeifen im einseitig gerichteten Luftstrom stets vorhanden, sondern sie kann auch bei schwingenden festen Körpern als Schallquellen vorkommen, weil die Luftbewegung zu einem festen Körper hin immer anders verläuft als von ihm weg, ähnlich wie Ein- und Ausströmen an einer Rohrmündung verschieden verlaufen (vgl. M 393, Abb. 102)[2]).

102. Längsschwingungen von Stäben. — Durch Längsstreichen (Reiben) eines in der Mitte festgehaltenen, sonst freien Stabes am einen Ende gerät er in Längsschwingungen derart, daß die Mitte ein Knoten, beide Enden aber Bäuche der Bewegung sind. Er ist dann im Zustand des Stückes von B zu B der in Abb. 27 L dargestellten stehenden Längswelle. Seine Länge L beträgt daher ½ der Wellenlänge eines fortschreitenden Längswellenzuges der betreffenden Schwingungszahl im Stab (10). Da die Geschwindigkeit von Längswellen

---

dünnungen), dem Hinzukommen der Oktave entspricht, dies ist aus Abb. 22b ersichtlich. Es würde dort nur die Amplitude der Oktave zu verringern sein, um den Nebenberg im flachen Tal verschwinden zu lassen.

[1]) Außer dem Differenzton und Differenztönen von Obertönen ist schwach auch ein „Summationston" mit der Schwingungszahl $n_1 + n_2$ beobachtbar.

[2]) Es sind Rechnungen über das Entstehen von Differenz- und Summationstönen bei Einseitigkeit ausgeführt; sie lehren aber nichts über die zugrunde liegenden Vorgänge.

im Stab $v = \sqrt{E/D}$ ist (Gl. 8 und 11), wird leicht in derselben Weise wie für die Saiten (94) die Schwingungszahl $n = \sqrt{E/D}/2L$ berechnet. Es ist danach möglich, Elastizitätsmoduln E bei bekannter Dichte D durch Beobachtung von Schwingungszahlen n zu ermitteln.

Da hier nur die sehr einfache elastische Verformung der Dehnung (M 259) zur Wirkung kommt, ist auch die Berechnung von Obertönen einfach; man findet sie harmonisch zum soeben berechneten Grundton.

Da die Kräfte bei der Dehnung viel größer sind als die bei der Biegung eines Stabes, sind Längstöne von Stäben viel höher als ihre Quertöne.

Längsschwingende Stäbe geben auch leicht die allerhöchsten unhörbaren Töne. Man nimmt dazu die Stäbe kurz und dick, d. h. man benutzt Platten, die Dickenschwingungen ausführen. Kristallplatten (Quarz, Turmalin) lassen sich leicht auf elektrischem Wege zu solchen Schwingungen bringen (E 113), die bei Benutzung ungedämpfter elektrischer Schwingungen (E 477) andauernd sind. Man hat so mit Zuhilfenahme der Oberschwingungen Schwingungszahlen bis zu $100 \cdot 10^6$/sek und darüber erreicht; die Wellenlängen in Luft betragen dann nur kleine Bruchteile eines Millimeters.

Die elektrisch unterhaltenen Längsschwingungen von Quarzen sind (bei konstant gehaltener Temperatur) von großer Periodenkonstanz, so daß sie vorteilhaft zu feinsten Zeitmessungen benutzt werden können („Quarzuhren", E 477).

c) Membranen (Häute) und Platten.

103. Diese beiden flächenhaften, schwingungsfähigen Gebilde unterscheiden sich so voneinander wie die Saiten von den Stäben: „Membranen" schwingen durch äußere spannende Kräfte, „Platten" durch ihre inneren elastischen Kräfte. Beide machen Querschwingungen und geben Obertöne, die unharmonisch zum Grundton sind. Es sind dabei die Knotenpunkte der Saiten und Stäbe durch Knotenlinien ersetzt, welche die Fläche durchziehen und ihre schwingenden Teile begrenzen.

Anwendung als Schallquellen finden die Membranen hauptsächlich in den Trommeln und Pauken, die Platten in den Glocken. Die Obertöne fallen bei ersteren durch innere Reibung in den Häuten schnell weg, wie bei den Darmsaiten (96); bei den Glocken ist ihre Ausbildung durch die zusammengebogene Form teilweise verhindert, wie bei den Stimmgabeln (99), außerdem auch durch einen verdickten Rand erschwert.

Bei den Membranen ist der (fast immer kreisförmige) Rand, an welchem die äußere spannende Kraft angreift, stets von selber Knotenlinie, und die einfachste Schwingungsform hat nur den Bauch in der Mitte; bei den Oberschwingungen bilden sich noch andere Knotenlinien aus, z. B. bei kreisförmigen Membranen mit dem Rand konzentrische Kreise, auch Durchmesser.

Bei Platten, die nur an einem Punkt, z. B. in der Mitte, befestigt zu sein brauchen, ist die Mannigfaltigkeit der möglichen Knotenlinien und also auch der Obertöne außerordentlich groß. Man kann die Knotenlinien durch Aufstreuen von Sand auf die schwingende, horizontale Platte leicht sichtbar machen; der Sand wird von den schwingenden Teilen der Platte, den Bäuchen, abgeworfen und sammelt sich an den Knotenlinien. Abb. 37 zeigt einen Beispielsfall an einer quadratischen, in der Mitte befestigten Metallplatte; die Platte ist schwarz, der Sand weiß; die Erregung geschah durch Streichen in vertikaler Richtung mit dem Bogen bei s, während bei f (allenfalls gleichzeitig auch an einer Ecke b) Berührung mit dem Finger stattfand. Je nach der Wahl des Ortes zum Streichen

und der Berührungspunkte zur Veranlassung von Knotenlinien können fast unzählige verschiedene Knotenlinienanordnungen, jede einer anderen Tonhöhe entsprechend, an derselben Platte hervorgebracht werden, besonders wenn sie sehr dünn ist. Je zwei benachbarte, durch eine Knotenlinie getrennte Teile der Platte schwingen in entgegengesetzter Phase, weil keine Knickungen der Platte vorkommen. Die einfachste mögliche Schwingungsform einer solchen mitten befestigten Platte ist die mit zwei senkrecht aufeinanderstehenden Knotenlinien a a oder b b (Abb. 37). Der tiefste mögliche Ton, die Grundschwingung, hat nur die Knotenlinien a; die Linien b allein geben den nächsthöheren Ton; a und b zusammen einen noch höheren, und je mehr weitere Linien noch dazukommen, wie in der Abb. 37, um so höher wird der Ton.

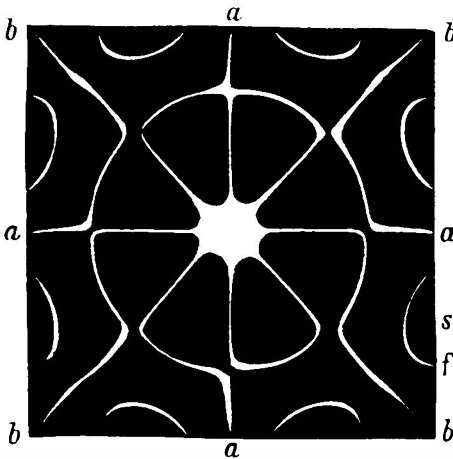


Abb. 37. Knotenlinien auf Platte (Mitte befestigt).

Glocken schwingen mit zwei Knotenlinien, die durch den Aufhängungspunkt gehen und am Rande um 90° voneinander abstehen. Ebenso schwingt auch jedes angeschlagene Bechergefäß. Ist die Glocke nicht genau rings gleichförmig beschaffen in Material oder Dicke, so gibt sie zweierlei Töne: an der massigeren Stelle oder an den um 90° davon abstehenden Stellen angeschlagen den tieferen, an den 45°-Stellen den höheren, weil im ersteren Falle die größere Masse am Bauch ist, also mitschwingt, im zweiten am Knoten, wo sie unwirksam ist. An anderen Stellen angeschlagen gibt eine solche Glocke beide Töne gleichzeitig, was je nach deren Verschiedenheit Schwebungen oder Dissonanz liefert. Man kann dies alles an jeder Tasse mit Henkel bemerken, der als Massenzufügung an einer Randstelle wirkt.

Besondere Anwendung finden Membranen und Platten als Schallquellen im Telefon (Fernsprecher) und im Lautsprecher. Hier soll die bewegliche Fläche keine Eigenschwingungen zeigen, sondern sie soll allen durch die elektrische Einrichtung gegebenen periodischen Kräften[1]) gleichmäßig folgen, damit Schall aller Schwingungszahlen gleichmäßig wiedergegeben, keine Schwingungszahl durch Resonanz bevorzugt wird. Dies kann geschehen, wenn die Grundschwingung der Membran oder Platte tiefer liegt als alle wiederzugebenden Töne und wenn die Erregung von Oberschwingungen durch Verteilung der Kraft möglichst über die ganze Fläche ausgeschaltet wird.

d) Pfeifen.

104. Pfeifen sind schwingungsfähige Luftmassen; sie kommen in sehr verschiedenen Formen vor, weil die Erregung zum Schwingen in sehr verschiedener Weise stattfinden kann.

[1]) Diese Kräfte werden vom schallübertragenden Strom gewöhnlich in Drahtspulen ausgeübt (E 301 u. f.), die magnetisch auf die (Eisen-)Membran wirken, oder auch (beim Lautsprecher) an der Membran befestigt und in starkem Felde eines Magneten befindlich, samt der Membran schwingen.

Als ein besonderes Beispiel sei die **Erregung durch Wärme** erwähnt. In Abb. 38 brennt eine kleine Leuchtgasflamme in einem Glasrohr G G; sie erzeugt darin einen aufsteigenden Luftstrom (W 41). Die Geschwindigkeit dieses Luftstromes wird leicht periodisch veränderlich; denn starkes Aufsteigen der heißen Luft bringt viel neue, kühlende Luft an die Flamme, und dies vermindert die Geschwindigkeit des Aufsteigens, worauf die so länger an der Flamme verweilende Luft wieder stärker erhitzt wird und entsprechend wieder schneller aufsteigt, was alles dauernd sich wiederholen kann. Der Takt, in welchem das geschieht, richtet sich nach der dem Rohrinhalt eigenen Schwingungsdauer (85). Denn das periodisch veränderliche Aufsteigen ist gleich der Übereinanderlagerung von gleichförmigem Aufsteigen mit einer Längsschwingung, und letztere muß im Rohr durch die Reflexionen an den Enden stehend werden (80), was Bäuche der Bewegung an den Enden G G und einen Knoten in der Mitte des Rohres gibt. Das Rohr mit der Flamme gibt daher, rings hörbar, den Ton, dessen halbe Wellenlänge gleich der Rohrlänge ist. Der Knoten der Bewegung in der Mitte ist zugleich Bauch des Druckes; dem entspricht das abwechselnde Groß- und Kleinwerden der unter dem wechselnden Druck brennenden Flamme im Takte der Rohrschwingung, was mittels Drehspiegel untersucht werden kann. Mit freiem Auge sieht man die größte und die kleinste Form der Flamme scheinbar gleichzeitig im Rohr als Verdoppelung der Flammenspitze, wie es die Abbildung zeigt.

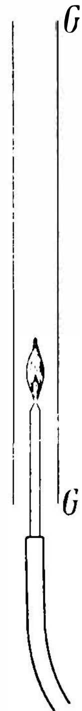


Abb. 38. Durch Flamme erregte Luftsäule.

Die Musik verwendet Pfeifen mit zweierlei anderen Erregungsarten, nämlich die **Lippenpfeifen** und die **Zungenpfeifen**.

Lippenpfeifen.

105. Hier wird Luft aus dem unteren Teil u der Pfeife (Abb. 39 und 40) durch eine Spalte s gegen eine Kante k geblasen, die das untere Ende des Pfeifenrohres R bildet. Die Kante heißt die „Lippe" am „Maul" m der Pfeife. Das obere Ende des Rohres kann offen oder verschlossen sein, und dies unterscheidet die **offenen** Lippenpfeifen (Abb. 39) von den **gedeckten oder gedackten** (Abb. 40).

Die **Erregung** der Schwingung findet beim Anblasen der Kante statt. Ein schneller Luftstrahl in ruhender Luft bildet an seinen Rändern Wirbel (M 395), so auch die aus der Luftspalte der Pfeife kommende Luftschicht; zugleich nimmt dieselbe Wellenform an, so daß sie seitlich pendelnd fortströmt.[1]) Trifft sie dabei eine Kante, wie die Lippe der Pfeife, so wird das Pendeln unterstützt, weil die an der Kante abströmende Luft abwechselnd an der einen und der anderen Seite der Kante sich staut und Überdruck bildet, der das Abströmen jedesmal an die andere Seite lenkt. Dies gibt abwechselnde Luftstöße und damit einen Ton, Kantenton oder „**Schneidenton**" zu nennen. Er ist infolge der im ganzen sehr verwickelten Luftbewegung nicht rein, sondern ist ein Geräusch mit einer sehr bevorzugten Schwingungszahl. Dieselbe ist um so höher, je schneller der Luftstrom ist und je dichter die Kante an der Luftspalte, je kleiner die „Maulweite" ist. Aus diesem Tongemisch des Schneidentons nimmt das Pfeifenrohr die ihm eigene Schwingungsdauer durch Resonanz verstärkend heraus (85); es gibt dann die Pfeife diesen durch die Rohrlänge bedingten Ton und zwar um so lauter und reiner, je näher der Schneidenton schon diesem Ton gleich war; die Schwingungsdauer des Luftstrahls richtet sich dann ganz auf das Pfeifenrohr ein, und das Gemisch der anderen Schneidentöne, das „Blasegeräusch" verschwindet. Eine gute Pfeife, wie sie

[1]) Die Wellenbildung an Grenzflächen verschiedener Geschwindigkeit haben wir schon bei Entstehung der Wasserwellen betrachtet (14); die gleichzeitige Wirbelbildung ist ebenfalls nach den Grundgleichungen der Hydrodynamik (M 386) verfolgbar.

für die Orgel nötig ist, muß daher eine der Rohrlänge angepaßte Beschaffenheit des Mauls haben und geeigneten Luftdruck erhalten.

106. Schwingungszahlen der Pfeifen. — Die Grundschwingung von offenen, sowie von einseitig geschlossenen Röhren, wie es die Pfeifen sind, haben wir bereits betrachtet (85). Abb. 39 und 40 zeigen bei $n = 1$ die zugehörigen Druckverteilungen.

Die offene Pfeife hat demnach Bäuche der Bewegung, also Knoten des Druckes, an beiden Enden und einen Bauch des Druckes in der Mitte; ihre Länge L ist daher $^1/_2$ Wellenlänge ihres Grundtons. Dies war bereits Newton

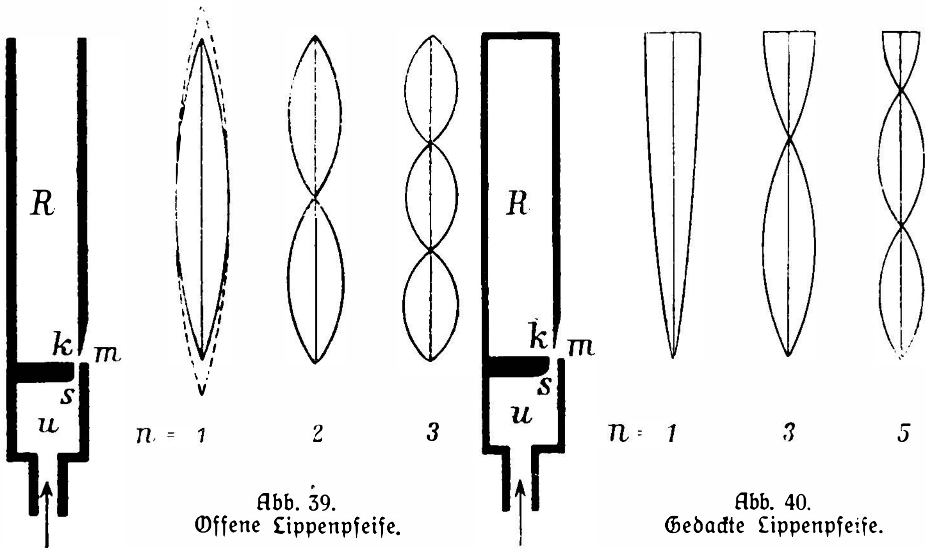


Abb. 39. Offene Lippenpfeife.

Abb. 40. Gedackte Lippenpfeife.

bekannt. Die zugehörige Schwingungszahl n wird leicht mit der bekannten Schallgeschwindigkeit $\sqrt{kp/D}$ (Gl. 24) nach dem gleichen Gedankengang wie bei den Saiten (94) zu

$$n = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{k\frac{p}{D}} \qquad 106)$$

berechnet.

Man sieht aus der Gleichung, was allgemein für Pfeifen und alle Blasinstrumente der Musik gilt, daß die Tonhöhe mit der Temperatur veränderlich ist, weil die Dichte D der Luft sich ändert, und zwar steigt danach die Schwingungszahl wie die Wurzel der absoluten Temperatur (W 37). Der Luftdruck p hat dagegen keinen Einfluß, weil D proportional p sich ändert (M 356). k ist in den gewöhnlichen Temperatur- und Druckgrenzen sehr nahe unabhängig von Temperatur und Druck.

Die Pfeifenlänge L ist übrigens in der Gleichung für n genau genommen etwas vergrößert einzusetzen, weil an den Rohrenden stets noch kleine Druckschwankungen stattfinden, die zur stehenden Welle gehören, so daß deren Knoten etwas jenseits der Rohrenden liegen, wie es die punktierten Linien in Abb. 39 zeigen.

Bei der gedackten Pfeife ist am verschlossenen Ende ein Bauch des Druckes, am unteren, offenen Ende der Knoten (Abb. 40), daher ist hier die Rohrlänge

nur 1/4 Wellenlänge. Die Wellenlänge des Grundtons ist also vierfache Pfeifenlänge, doppelt so groß als bei der gleichlangen offenen Pfeife, die Schwingungszahl also halb so groß, d. h. die Tonhöhe geht durch das Decken um eine Oktave herunter.

Pfeifen sind sehr geeignet, Töne aller Höhen mit großer Intensität in die Luft zu bringen; daher hat auch das Hauptpfeifeninstrument, die Orgel, allein den ganzen Tonumfang der Musik. Die dazu nötigen Längen offener Pfeifen gehen von rund 10 m bis zu rund 5 cm (vgl. Tab. 12); gedackt sind sie nur halb so lang.

107. Obertöne der Pfeifen. — Für die verschiedenen Schwingungsmöglichkeiten von Luftsäulen ist nach gewonnener Erkenntnis (80) maßgebend, daß an jedem offenen Ende ein Knoten, am verschlossenen Ende ein Bauch des Druckes sein muß und daß zwischenliegende Knoten und Bäuche nur abwechselnd in gleichen Abständen voneinander bestehen können, wie es Abb. 27 L an der stehenden Welle ersichtlich machte. Danach zeigen sich die in den Abb. 39 und 40 für die offenen und gedackten Pfeifen angegebenen Schwingungsweisen mit 1, 2 und mehr inneren Knoten des Druckes als möglich. Man sieht daraus, welches die möglichen Wellenlängen und danach auch die Schwingungszahlen sind: Offene Pfeifen können die ganze Reihe der harmonischen Obertöne geben, wie Saiten; gedackte Pfeifen aber können nur die ungradzahligen Obertöne geben, Duodezime, Quint der Oktave usw. (vgl. Tab. 15), nicht aber die Oktave.

Im allgemeinen kommt ein Gemisch dieser möglichen Schwingungsweisen zustande, und dies charakterisiert die Klangfarbe der Pfeifen: Die offenen Pfeifen geben volle Töne wie die Saiten; die gedackten Pfeifen klingen dagegen dumpf, besonders mangels der Oktave, die hier nur als Asymmetrieton mitkommen kann (100).

In welchem Maße die verschiedenen Obertöne zur Ausbildung kommen, dies hängt ganz von der Erregung, d. i. von der Maulbeschaffenheit der Pfeife und vom Blasedruck, sowie aber auch von der Rohrweite, Formung des Rohres (ob zylindrisch, konisch usw.), ja auch vom Stoff der Rohrwände ab. Hiernach kann die Klangfarbe der Pfeifen innerhalb des für Offen und Gedackt Möglichen noch weitgehend variiert werden, und dies kommt in den verschiedenen „Registern" der Orgel zur Anwendung. Jedes Register ist eine vollständige Reihe von Pfeifen bestimmter Art, die nach Belieben an die Tasten geschaltet werden kann. Pfeifen mit engem Rohr sind besonders geeignet, reichlich auch höchste Obertöne zum Grundton zu geben, besonders wenn enges Maul und hoher Blasedruck dies unterstützen; Metallrohre geben mehr hohe Obertöne (hellere Klänge) als Holzrohre, weil die Rohrwand unter dem Einfluß der Druckbäuche mitschwingt und Metall die schnelleren Schwingungen weniger dämpft als Holz; die Rohrform gestattet auch die Bevorzugung einzelner bestimmter Obertöne.

108. Überblasen der Pfeifen. — Pfeifen mit engen Rohren können durch geeignetes Anblasen leicht dazu gebracht werden, einen der Obertöne allein zu geben ohne den Grundton und die anderen, tieferen Obertöne; man nennt das „Überblasen". So kann eine offene Pfeife von einigen dm Länge und 1.5 cm Weite bei allmählich gesteigertem Anblasedruck den Grundton und dann der Reihe nach die Obertöne 2, 3, 4, 5, 6 geben, eine gedackte die Töne 3, 5, 7, 9, 11. Ist die Pfeife sehr eng, so gibt sie den Grundton überhaupt nur schwer; es kommen nur Obertöne.

Die Flöte ist eine offene Lippenpfeife, bei welcher die höheren Töne sämtlich durch geeignetes Überblasen hervorgebracht werden. Der Bläser formt den Luftstrom zwischen seinen Lippen und bläst ihn gegen die Kante des Mundloches, die hier als „Lippe" wirkt (105). Nur etwa die tiefere Hälfte des Tonumfangs von 3 Oktaven (vgl. Tab. 12) ergibt sich durch Veränderung der wirksamen Rohrlänge mittels Öffnen von Fingerlöchern oder Klappen. Für die Pikelflöte gilt dasselbe; sie ist jedoch nur von halber Größe und daher in allen Tönen um eine Oktave höher als die gewöhnliche Flöte.

Zungenpfeifen.

109. Zungen sind einseitig befestigte flache Stäbe oder Blättchen, die eine Luftöffnung lose verschließen, so daß sie durch die mit Überdruck austretende Luft in Schwingung versetzt werden. In Abb. 41 ist z die Zunge, die den Luftraum u verschließt. Sie wird durch Überdruck in u nach außen gebogen, weicht dann wegen Nachlassen des Überdrucks infolge des Entweichens von Luft zurück, erschwert dadurch wieder den Luftaustritt, wird wegen dann steigendem Druck wieder nach außen gebogen und so fort, so daß sie in Schwingungen kommt und durch Luftzufuhr dauernd fortschwingend gehalten wird. Ihre Schwingungszahl ist durch ihre eigene Elastizität und Masse bestimmt wie die Grundschwingung eines einseitig befestigten Stabes (98). Mit derselben Periodenzahl erfolgen aber auch die Luftstöße nach außen und dies ergibt einen Ton von sehr guter Intensität, während die Schwingungen der Zunge an sich kaum hörbar wären. Auch die Klangfarbe ist gut; es sind viel harmonische Obertöne da. Bei den großen Amplituden der Luftstöße sind dieselben als Asymmetrietöne auch zu erwarten (100); den schwingenden Zungen als Stäben selber sind sie nicht eigen (98). Das Vorhandensein dieser Obertöne macht sich besonders auch durch ihre Schwebungen bei unreinen Intervallen bemerkbar (72).

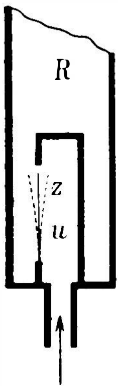


Abb. 41. Zungenpfeife.

Solche Zungen können wegen ihrer guten Klangfarbe schon für sich allein ohne schwingende Luftsäulen als Tonquellen der Musik dienen, wie in der Harmonika und im Harmonium.

110. Hinzufügung einer Luftsäule zur Zunge durch ein Ansatzrohr (R, in Abb. 41 abgebrochen gezeichnet) ergibt die Zungenpfeife. Hierbei wird die Tonhöhe sehr stark durch die Eigenschwingungsdauer der Luftsäule beeinflußt, besonders wenn die Zunge weich (nicht aus Metall) ist; auch wird die Klangfarbe stark variierbar durch Form und Wandstoff der Luftsäule mit ihren Obertönen, wie es schon bei den Lippenpfeifen bemerkt wurde (107). Außerdem können Zungen sehr verschiedener Beschaffenheit verwendet werden, was alles eine große Fülle von Möglichkeiten für die „Blasinstrumente" der Musik und für die verschiedenen Zungenregister der Orgel ergibt.

Klarinette, Fagott, Oboe sind Zungenpfeifen, deren Töne durch die Länge der Luftsäule bestimmt sind, wie bei der Flöte, wobei die Zungen nur zur Erregung der Schwingungen der Luftsäule dienen, wie der pendelnde Luftstrom bei den Lippenpfeifen (105). Ein Unterschied gegen die Lippenpfeifen besteht insofern, als bei der Klarinette das Anblase-Ende als geschlossenes Ende der Luftsäule wirkt, so daß dort ein Bauch des Druckes ist und die Anblaseluft nur

die Druckschwankungen aufrecht zu erhalten hat und keinen überschüssigen Luftstrom erzeugt, weshalb dieses Instrument auch weniger Luft braucht als die Flöte. Beim Überblasen entsteht dementsprechend auch nicht die Oktave, sondern die Duodezime. Fagott und Oboe haben zwei Zungen, die von- und zueinander schwingen und so eine Luftspalte öffnen und schließen.

Zungenpfeifen sind auch alle die „Hörner" und Trompeten mit ihrem Urbild der Lure (112), sowie die Posaune. Dies sind Luftsäulen, die mit den Lippen des Bläsers angeblasen werden, wobei diese über die Öffnung des Mundstückes gespannt sind, so daß sie eine Spalte zwischen sich lassen und als „Zungen" schwingen, ähnlich den beiden Zungen von Fagott und Oboe. Alle diese Hörner werden aus Metall gemacht. Ihre Klangfarbe ist heller, viel mehr hohe Obertöne enthaltend (107) als die der vorgenannten Holzblasinstrumente, was auch mit der vom Mundstück an engen und erst gegen das Ende hin trichterig erweiterten Rohrform zusammenhängt. Sie wirken alle als offene Pfeifen, entwickeln also sämtliche harmonische Obertöne. Der Grundton ist wegen des engen Rohres meist überhaupt nicht anblasbar; dagegen ist eine lange Reihe von Obertönen je nach der Lippenspannung und dem Luftdruck des Bläsers nach Wahl erregbar. Dies ermöglicht kunstvolles Spiel mit vielen Tönen ohne daß Klappen vorhanden wären; so bei den alten Luren, metallischen, S-förmig gebogenen großen Hörnern, die in den Tönen 4, 5, 6 der harmonischen Reihe (Tab. 15) den Durdreiklang geben; ebenso bei der Trompete, die mit den Tönen 8 bis 16 die Durtonleiter geben kann, wenn die nicht stimmenden Töne 11, 13 und 14 durch „Treiben" oder „Stopfen" zurecht gebracht werden. Das Treiben besteht in verstärkter Lippenspannung und Luftpressung, was den Ton erhöht; beim Stopfen wird die Hand an das trichterige Rohrende gebracht, was den Knoten des Druckes weiter weg bringt (vgl. 106) und damit den Ton vertieft. Die Rohrlängen werden sehr groß, wenn so hohe Obertöne in mittlere Lage kommen sollen; deshalb sind diese Hörner alle gekrümmt und sogar teils sehr vielfach gewunden. Für noch reichere Tonfolgen müssen Klappen angebracht oder besser Zusatzrohre einschaltbar gemacht werden („Ventiltrompete", „Tuba", „Bombardon"). Die Posaune hat ein ausziehbares Rohr, das auf jede gewünschte Tonhöhe eingestellt werden kann; sie teilt so mit der Geige die Möglichkeit stetiger Veränderung der Tonhöhe.

111. Zungenpfeifen sind auch die Stimmorgane der höheren Tiere und des Menschen. „Zungen" sind hier die Stimmbänder: zwei über den Knorpelring des Kehlkopfes gespannte Bänder, die die Stimmritze zwischen sich lassen und beim Anblasen aus der Luftröhre in Schwingungen geraten wie die gespannten Lippen des Trompetenbläsers. Die Tonhöhe wird aber hier ganz durch die Spannung der Stimmbänder bestimmt, die wie Saiten schwingen; Mund-, Nasen- und Rachenhöhlen wirken nur auf die Klangfarbe, indem sie je nach der Einstellung ihrer Form und Größe bestimmte Obertöne der Stimmbänder und Asymmetrietöne (100) verstärken. Dies gibt die verschiedenen Vokale (Selbstlaute) der Sprache (62). Die Kunst des Sängers besteht darin, den Stimmbändern schon vor dem Anblasen die richtige, der beabsichtigten Tonhöhe entsprechende Spannung zu erteilen und die Höhlungen auf die gewünschte, schön wirkende Klangfarbe einzustellen.

---

112. Musik. — Nach allen Kenntnissen der Akustik läßt sich überlegen, was der Grund sei für die Empfindung des Schönen — d. i. der Veredelung, der Erfreuung und Befreiung, der Erhebung über Not, Leid, Widrigkeit und Beschränktheit — beim Hören der Werke der großen deutschen Tondichter.

Alle Empfindung des Schönen, dieses alleinigen Gegenstandes aller echten Kunst, ist rein Sache des inneren Gefühls. Das echte Kunstwerk ergreift das Gefühl unmittelbar durch bloße Einwirkung auf die Sinnesorgane, ohne Zwischenschaltung des Verstandes. Der gesuchte Grund jener Wirkung der Musik muß also in der Beschaffenheit des Sinnesorgans, des Ohres, samt der mit ihm verbundenen körperlichen Träger des Geistes liegen. Diese Beschaffenheit ist ererbt als Ergebnis einer sehr langfristigen Entwickelung in den Lebenszeiten unserer Vorfahren. Die Ursache der Beschaffenheit ist daher — soweit überhaupt ergründbar — in unserer Vorgeschichte zu suchen. Die Entwickelung des Hörens überhaupt hat im Laufe der vielen Jahrtausende unter dem Einfluß der von der Natur und von den Menschen selbst gebotenen Schalleindrücke stattgefunden, und im Laufe dieser Entwickelung konnte es auch zur Verbindung besonderer Empfindungen mit bestimmten Gehöreindrücken gekommen sein. Die Entwickelung des Gehörorgans selbst muß wohl in der Richtung wachsender Geeignetheit zur Wahrnehmung und feineren Unterscheidung von Tönen — im Gegensatz zu den Geräuschen — stattgefunden haben, so daß die Eigentümlichkeit des Ohres, unbewußt die Einfachheit von Wellenzügen als etwas Besonderes zu erkennen (54) und mit der Empfindung des Befriedigenden — des Wohlklangs — zu verbinden, entstehen konnte, womit gleichzeitig wohl auch die Entwickelung des menschlichen Stimmorgans in der Richtung des Wohlklangs voranschritt. Eine weitergehende, durch das Ohr vermittelte Empfindung von Erhebung, Veredelung, sittlicher Kräftigung kann unseren Vorfahren am meisten bei ihren festlichen, volksverbindenden Zusammenkünften geworden sein, und diese waren in der Tat, soviel bekannt, von Musik begleitet. Ohne Zweifel wurden dabei die bei Ausgrabungen gefundenen, aus der Bronzezeit (1000 und mehr Jahre vor unserer Zeitrechnung) stammenden Luren benutzt (110, vorher wohl Hörner tierischen oder pflanzlichen Ursprungs), außerdem Saiten, deren frühe Kenntnis auch nicht zu bezweifeln ist. Es sind das Schallquellen, die einem Verlangen des Ohres nach einfachen Wellenformen besonders entgegenkommen; denn ihre Klänge haben nur harmonische Obertöne (96, 107). Diesen Schallquellen sind aber auch gerade jene Töne als am leichtesten und einfachsten in beliebiger Abwechslung hervorbringbar eigen, die die Grundlage aller, auch der fortgeschrittensten Tondichtungen germanischer Art bilden, nämlich die Töne des Durdreiklangs und zwar von selber in reiner Stimmung, mit ihren einfachen Schwingungszahlverhältnissen (110, 95). Es ist daher wohl möglich, daß der Eindruck des Schönen in der Musik, der noch heute den Durdreiklang zum Mittelpunkt hat, ererbt ist aus den Zeiten der jahrtausendelangen, von Fremdblut unbeeinflußten Aufwärtsentwicklung, in denen unsere Voreltern an den einfachsten Klängen der Luren und Saiten sich erfreuten und erbauten.

Wärmelehre.

1. Die **Wärme** — die Ursache des Warmseins — ist auch als zur Mechanik gehörig erkennbar geworden, nämlich als Bewegung von Materie. Wir stellen der Deutlichkeit halber diese Erkenntnis voran und werden sie, um Wiederholungen zu vermeiden, auch teilweise schon vor Eingehen auf ihre Begründung benutzen: **Wärme ist Bewegung der Moleküle** (78, vgl. M 18 u. f., 246 u. f.).

Es kann danach die Lehre von der Wärme als die Mechanik der Bewegungen der einzeln nicht wahrnehmbaren Moleküle und Atome der Körper bezeichnet werden. Es ist **ungeordnete Bewegung** der Moleküle, auf die es hier ankommt, Bewegung von uneinheitlicher Richtung und Größe der Geschwindigkeiten. Würden alle Moleküle eines Körpers mit Geschwindigkeiten von gleicher Richtung und Größe sich bewegen, so wäre er nicht warm, sondern er würde als Ganzes mit dieser Geschwindigkeit sichtbar in Bewegung sein.

2. Wir haben wunderbarerweise einen besonderen Sinn für die Wahrnehmung solcher ungeordneter Bewegung der Moleküle; es ist der an der ganzen Körperoberfläche verbreitete **Wärmesinn**. Er ist verschieden vom ebendort verbreiteten Tastsinn, so daß wir im ganzen sechs Sinne haben. Fühlen wir einen Körper an, so können wir nicht nur entscheiden ob er glatt oder rauh, hart oder weich ist, sondern wir erkennen außerdem etwas davon gänzlich Verschiedenes: ob er warm oder kalt ist.

Wie dunkel ist doch solche Wahrnehmung eines Bewegungsvorganges der inneren, den Sinnen überhaupt nicht unmittelbar zugänglichen Teile der Körper! So ist es immer mit unseren Sinnen; sie geben uns zwar Anzeigen von den äußeren Dingen — ja alles was wir haben von Kenntnis der materiellen Welt ist nur durch diese sechs Eingangspforten der Sinne zu uns gelangt —; aber weit ist meist der Weg von den Sinnesempfindungen bis zu richtiger Deutung derselben.

So war auch bei Ergründung des Wesens der Wärme ein weiter Weg zurückzulegen. Wir müssen ihn in seinen Hauptteilen ganz durchschreiten, um die Grundlagen der vorhandenen Erkenntnis verstehen und richtig einschätzen zu können. Wir kommen auf diesem Wege auch an Zwischenvorstellungen vorbei, die — weil aus der Erfahrung genommen — ihren Wert dauernd behalten, wenn sie auch den Dingen nur mit heute eng erscheinender Einschränkung oder mit Übergehung von Einzelheiten entsprechen. Solche Zwischenvorstellungen wie die, daß die Wärme ein in seiner Menge unveränderlicher, besonderer Stoff sei, sind — wenn die Grenzen ihres Zutreffens nicht übersehen werden — zur quantitativen Verfolgung vieler Wärme-Vorgänge brauchbar gewesen und auch jetzt noch brauchbar.

I. Temperaturmessung (Thermometrie).

Ursprüngliche Hilfsmittel und einfachste Erfahrungen.

3. Temperatur. — Der erste, grundlegende Schritt auf dem Wege ins Unbekannte der Wärme-Erscheinungen war Meßbarmachung des „warm" und „kalt", des Wärmezustandes der Körper oder — mit dem gebräuchlich gewordenen Namen — der „Temperatur".

Der Wärmesinn ist dazu nicht tauglich; er ist überhaupt kein so guter, Einzelheiten zeigender Sinn wie z. B. der Gehörssinn, er ist fast ganz geblieben, was ursprünglich wohl alle Sinne vorwiegend waren: schützendes Warnungsmittel vor Schaden des Lebewesens. Der Wärmesinn trügt sogar leicht. Haben wir die Hand in warmes Wasser getaucht, so wird uns laues Wasser, das vorher „warm" schien, jetzt „kalt" scheinen. Man sieht, daß es bei den verschiedenen Empfindungen des Wärmesinns auf die jeweilige Temperatur der Haut ankommt; wir fühlen einen Körper „kalt", der weniger warm ist, als augenblicklich unsere eigene Haut, „heiß", der mehr warm ist.

4. Kälte. — Wir sehen daraus auch, daß es einen Gegensatz zwischen Warm und Kalt, als zwei entgegengesetzten Zuständen, die der Anwesenheit zweier verschiedener Dinge, „Wärme" und „Kälte", entsprächen, nicht gibt. Es gibt in Wirklichkeit nur Unterschiede von mehr oder weniger warm, und „Kälte" ist kein besonderes Etwas; oder: Alle Temperaturen, die es gibt, sind auf einer einzigen geraden Linie auftragbar, und jede Wahl eines Nullpunktes innerhalb der Reihe der Temperaturen, der „kalt" und „warm" von einander trennen sollte, ist willkürlich, nicht durch die Natur der Dinge begründet. Alles dies ist in weiterer Erfahrung auch fortlaufend bestätigt (137, 152).

Ein natürliches einseitiges Ende der Temperaturskale, ein „absoluter Nullpunkt", war allerdings zu finden (37), jenseits dessen es keine Fortsetzung gibt.

5. Das Quecksilberthermometer. — Es war vor allem notwendig, vom undeutlichen und trügerischen Wärmesinn sich unabhängig zu machen und den Wärmezustand, die Temperatur, mittels eines anderen Sinnes meßbar zu machen. Es bot sich der fast immer am meisten dienliche Gesichtssinn dazu: man sieht, daß die Körper mit Änderung ihrer Temperatur ihre Volume ändern, so daß Temperaturen durch Volume gemessen werden können. Gase und Flüssigkeiten zeigen diese Volumänderung am auffallendsten und auch quantitativer Verfolgung gut zugänglich. Die Gase sind allerdings auch dem nicht so früh verfolgbar gewesenen Druckeinfluß unterworfen (M 355 u. f.); daher wurden zuerst Flüssigkeiten in Glasgefäßen mit engem Rohransatz mit Erfolg in Gebrauch genommen (Galilei). Dies ist der Ursprung der Temperaturmeßmittel, der „Thermometer".

Allmählich kam man dazu, das Quecksilber als im allgemeinen geeignetste Flüssigkeit zu finden; es benetzt das Glasrohr nicht, so daß es keine Täuschungen durch Hängenbleiben an der Rohrwand gibt; es verdampft und gefriert auch schwer und ist daher bis zu recht hohen und tiefen Temperaturen brauchbar.

Etwas spät erst kam es zu gesicherten Thermometerskalen, die stets und überall in gleicher Weise herstellbar sein sollen, so daß Übereinstimmung der Anzeigen zweier, an beliebigem Ort und zu beliebiger Zeit hergestellter Thermometer verbürgt ist, wenn sie gleiche Temperatur haben, d. h. wenn sie beide dicht nebeneinander in einem Flüssigkeitsbade sich befinden, dessen einheitliche Temperatur durch Rühren gesichert ist.

Die Herstellung solcher Skalen erfordert die Wahl von „Fixpunkten", d. i. von immer und überall wieder herstellbaren Temperaturen, die man das Thermometer annehmen läßt, um dann am Ende seines Flüssigkeitsfadens eine Marke zu machen, die eine bestimmte Temperaturangabe bedeutet. Außerdem ist eine Festsetzung über die zu wählende Temperaturgradlänge nötig. Abb. 42 faßt einige historische Stufen des Fortschreitens zu solchem Ziele zusammen.

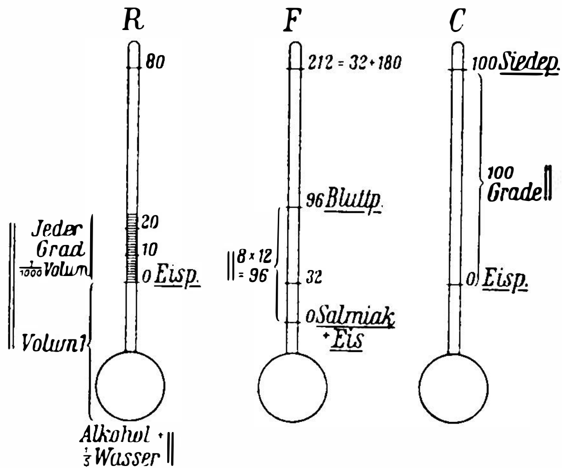


Abb. 42. Ursprünge der Thermometer-Skalen. Fixpunkte unterstrichen. Bestimmungsstücke der Gradlängen seitlich angestrichen ||.

Als ein guter Fixpunkt wurde bald der Eispunkt, die Temperatur des schmelzenden Eises erkannt (195). Der zweite, heute gebräuchliche Fixpunkt, der Siedepunkt des Wassers, machte einige Schwierigkeiten, weil erst erkannt werden mußte, daß nur die Temperatur des Dampfes von siedendem Wasser, und zwar bei festgesetztem Barometerstand, die Anforderung zuverlässiger, jederzeitiger Gleichheit erfüllt (221, 219). Die Gradlänge ist dann durch Einschaltung einer bestimmten Anzahl von Graden zwischen Eispunkt und Siedepunkt festgelegt, wofür man jetzt stets 100 nimmt. Dies gibt die jetzt allgemein gebräuchliche Temperaturskale, die man unter den mit 0 bezeichneten Eispunkt und über den mit 100 bezeichneten Siedepunkt mit gleich großen Graden beliebig fortsetzt und deren Grade mit ° oder, zu besonderer Unterscheidung, mit °C bezeichnet werden. Die anderen in Abb. 42 ersichtlichen Temperaturskalen (R und F) sind dort erläutert.[1])

[1]) R hatte nur den Eispunkt als Fixpunkt und die Gradlänge nach Volummessung festgesetzt; F scheint in einer Kältemischung einen wahren Nullpunkt der Temperaturen vermutet zu haben und nahm als zweiten Fixpunkt die gesunde Bluttemperatur an, die Gradlänge auf Grund eines Duodezimalsystems. Will man die so erhaltenen Skalen heute noch herstellen, so werden doch Eis- und Siedepunkt zu Hilfe genommen und für R mit 0 und 80, für F mit 32 und 212 bezeichnet.

Der Raum über dem Quecksilber im Thermometer ist gewöhnlich luftleer. Er kann aber auch mit trockenem Stickstoff oder Kohlensäuregas gefüllt sein; jedenfalls muß in feuchter Luft eintretende langsame Oxydation des Quecksilbers vermieden sein.

Man bemerkt, daß die mit dem °C festgelegte Einheit der Temperaturstufe eine durchaus willkürliche Einheit ist, die mit den Grundeinheiten cm, gr, sek (M 12) nichts zu tun hat; die Willkürlichkeit liegt vor allem in der Wahl des Wassers für die Fixpunkte. Diese Einheit der Temperaturstufe bleibt auch nach Einführung der absoluten Temperatur bestehen (37).[1])

6. Einfachste Erfahrungssätze über die Wärme. — Mit Hilfe des Thermometers ist die schon mit dem Wärmesinn gemachte Beobachtung verfeinert bestätigt, daß zwei Körper, die lange genug ohne besondere gegenseitige Einwirkung einander berühren, gleiche Temperatur annehmen. Darauf beruht auch die Temperaturmessung selber, insofern als das Thermometer nur diejenige Temperatur angeben kann, die es selbst besitzt; es muß also lange genug mit dem Körper in Berührung gewesen sein, dessen Temperatur gemessen werden soll. Schnell veränderliche Temperaturen können mit dem Quecksilberthermometer schlecht verfolgt werden; es müssen dazu andere Hilfsmittel (44, vgl. auch 62) benutzt werden.

Sind Körper ungleicher Temperaturen miteinander in Berührung, so geht „Wärme", jenes Etwas, das kalte Körper warm macht, vom heißeren Körper in den kälteren über, und der Temperaturausgleich erscheint als Folge dieses Übergangs. Es ist eine allgemeine Erfahrung der Temperaturmessung, daß Temperaturen nach Ausgleich streben; niemals wird von zwei einander berührenden Körpern der kältere von selber noch kälter und der wärmere noch wärmer, sondern immer umgekehrt. Oder: Wärme geht von selber stets nur von Körpern höherer Temperatur zu Körpern niedrigerer Temperatur über. Dieser Erfahrungssatz hat eine umfassende, tiefe Bedeutung, auf die wir noch kommen (111, 112); er gilt auch, wie gleich bemerkt sei, für alle Arten von Wärmeaustausch, nicht nur bei Berührung von Körpern (135, 138), sondern auch bei der in die Ferne wirkenden Wärmestrahlung (152).

7. Feine Temperaturmessung mit dem Quecksilberthermometer erfordert viele Vorsichten gegen Fehler.

Das Rohr des Thermometers muß überall gleich weit sein, sonst hat es „Kaliberfehler"; die Längengleichheit der Grade ist dann wertlos. Man bemerkt Kaliberfehler durch Hin- und Herschieben eines abgetrennten Quecksilberfadens im Rohr, der dann seine Länge ändert.

Die Fixpunkte müssen öfters in schmelzendem Eis und im Dampf siedenden Wassers nachgeprüft werden; denn sie erleiden je nach dem Gebrauch des Thermometers, besonders bei extremen Temperaturen, kleine Verschiebungen (11). Damit die Nachprüfung möglich ist, muß die Skale von 0° bis 100° reichen; man nennt das Thermometer dann „Normalthermometer". Abgekürzte Thermometer für kleinere Temperaturbereiche sind durch Vergleichung mit Normalthermometern zu graduieren bzw. nachzuprüfen.

Ist die zu messende Temperatur nur in so kleinem Raum vorhanden, daß nur das Gefäß, nicht auch das Rohr des Thermometers hineingebracht werden kann, so hat man den „Fehler des vorstehenden Fadens", der durch Rechnung nach dem bekannten Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers (20) korrigierbar ist.

---

[1]) Eine absolute Einheit der Temperaturstufe, abgeleitet aus den allgemeinen Grundeinheiten, ist nach der Bedeutung der Temperatur (33) gegeben als Stufe der kinetischen Energie der Moleküle.

Im ganzen ist gesicherte Temperaturmessung auf Zehntelgrade als schwierig zu bezeichnen, und Angaben in Hundertelgraden ohne besondere Rechtfertigung sind mit Mißtrauen zu betrachten. Kleine Temperaturunterschiede, ohne Bezugnahme auf die Fixpunkte, können allerdings mit sehr gesteigerter Genauigkeit gemessen werden, besonders auch durch die später zu erwähnenden elektrischen Methoden (44).

Die Anwendung des Quecksilberthermometers und der sonstigen Flüssigkeitsthermometer hat die Kenntnis von der Wärme weitgehend gefördert, wie die folgenden Abschnitte zeigen. Dabei hat sich allerdings bald ergeben, daß einwandfreie Meßmittel der Temperatur mit diesen Thermometern noch nicht gewonnen sind (24). Das wahre Maß der Temperatur zu finden, das im Quecksilberthermometer nur angenähert gegeben ist, war erst nach Erlangung genügender Einsicht in das Wesen der Wärme möglich (33).

Die ersten Fortschritte ergaben sich durch Untersuchung der Änderungen der Abmessungen der Körper verschiedenen Aggregatzustandes bei Temperaturänderungen (8—43), wobei das Quecksilberthermometer als Temperaturmaß zunächst vollkommen genügte.

Wärmeausdehnung fester Körper.

8. Längenausdehnungskoeffizient. — An festen Körpern wird nicht so sehr die Volumänderung bei Erwärmung als vielmehr die Längenänderung bei Stäben oder Drähten unmittelbar merklich. Erhitzt man einen Eisendraht von 3 m Länge, frei herabhängend und unten beschwert, zu Rotglut, d. i. um etwa 700° über die Zimmertemperatur, was mittels elektrischen Stromes leicht ausführbar ist, so wird er um 3 cm länger. Nach Abkühlung hat er seine alte Länge wieder. Die Dicke des Drahtes ist dabei gleichgültig. Wenn alle 300 cm des Drahtes die gleiche Temperaturerhöhung erlitten haben, so ist kein Zweifel, daß die beobachtete Gesamtausdehnung auf die ganze Drahtlänge gleichmäßig verteilt ist, daß somit jedes cm um 0·01 cm verlängert worden ist. Dies geschah bei der Temperaturerhöhung um 700°, und da beim allmählichen Eintreten dieser Erhitzung allmähliche Verlängerung des Drahtes zu sehen ist, so kann man für jeden Grad des Temperaturanstieges 1/700 der Verlängerung rechnen, d. i. 0·01 cm/700 = 0·000014 cm. Diese Angabe, bedeutend daß jede beliebige Länge von Eisen bei Temperatursteigerung um 1° um den Bruchteil 0·000014 zunimmt, wird der thermische Längenausdehnungskoeffizient oder lineare Wärmeausdehnungskoeffizient des Eisens genannt.

Die dabei noch offene Frage, ob wirklich jeder einzelne Grad der Temperatursteigerung die gleiche Verlängerung gibt, kann nur durch Untersuchung in kleineren Temperaturstufen entschieden werden. Große Unterschiede wurden dabei nicht gefunden, außer bei extremen Temperaturen (12).

Tab. 17 gibt eine Zusammenstellung der Ausdehnungskoeffizienten verschiedener Stoffe. Man kann dieselben auch an kleinen Stücken und auch bei kleinen Temperaturstufen ermitteln, wenn man die dann kleinen Längenänderungen mit Hebel- oder Mikroskopvergrößerung oder am feinsten mittels optischer Interferenzbeobachtung (O 123 u. f.) mißt. Die Zahlen der Tabelle beziehen sich auf Temperaturstufen in der Nähe der Zimmertemperatur, wo nicht anderes angegeben ist. Man sieht, daß die Ausdehnungskoeffizienten im allgemeinen klein, aber doch je nach dem Stoff recht verschieden sind. Der geschmolzene und

Tab. 17. **Lineare Wärmeausdehnungskoeffizienten.**

Quarz geschmolzen	0·00000054
Diamant.	0·000001
Hölzer längs der Faser	·000005
Platin, Gläser	·000009
Eisen	·000012
Messing	·000019
Zink, Blei	·000029
Hartgummi	·00008
Schwefel bei 30°	·00007
„ „ 90°	·0002
„ „ 100°	·001

wiedererstarrte Quarz (SiO_2) —„Quarzglas" — zeigt den kleinsten bekannten Koeffizienten. Unter den Metallen haben Platin und die Platinmetalle besonders kleine, Zink und Blei besonders große Ausdehnung. Unter den Legierungen, die immer Besonderes geben, ist Stahl mit 36 v. H. Nickel („Invar" genannt) bemerkenswert durch einen sehr kleinen, dem des Quarzglases nahekommenden Ausdehnungskoeffizienten. Kristalle zeigen in verschiedenen Richtungen verschiedene Ausdehnung, und es kommen dabei auch negative Ausdehnungskoeffizienten vor, so bei Kalkspat, der in Richtung der Achse Ausdehnung, senkrecht dazu Zusammenziehung bei Temperatursteigerung zeigt.

9. Die Kenntnis des Ausdehnungskoeffizienten α erlaubt Umrechnung einer Länge l_0 auf die nach Erwärmung um t^0 zu erwartende Länge l, was z. B. bei Maßstäben wichtig ist, die nur bei einer bestimmten Temperatur richtig sein können. Nach der Bedeutung des Längenausdehnungskoeffizienten (8) ist der bei der Erwärmung um t^0 eintretende Längenzuwachs $l_0\alpha t$, und es gilt also

$$l = l_0(1+\alpha t) \quad . \qquad 9)$$

10. Anwendungen der Ausdehnungsverschiedenheiten. — Bei Uhrpendeln und Unruhen bedingt die Wärmeausdehnung eine unerwünschte Veränderlichkeit der Schwingungsdauern mit der Temperatur. Man kann dem auf mancherlei Art begegnen. Es sei als Beispiel nur die „kompensierte" Unruhe Abb. 43 erwähnt. Ihr Kranz ist bei a a aufgeschnitten, und jeder Halbkreisbogen besteht aus 2 Metallen von ungleichen Ausdehnungskoeffizienten, z. B. Eisen und Messing. Ist Messing außen, so wird sich der Bogen bei Erwärmung verstärkt krümmen, wie es die Abbildung punktiert zeigt, und dies wirkt der Ausdehnung der Speiche s insofern entgegen, als die Masse des Schraubenkopfes k der Achse nähergebracht wird, so daß das Trägheitsmoment (M 181) unverändert bleiben kann. Es kann die Einrichtung auch so ausprobiert sein, daß eine Änderung der elastischen Kraft der Unruhespirale mitkompensiert wird, so daß die durch Trägheit und Kraft bestimmte Schwingungsdauer ungeändert bleibt.

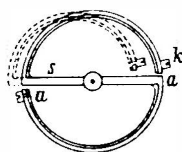


Abb. 43. Kompensierte Uhr-Unruhe.

Solche Streifen aus Doppelmetall können auch als Metallthermometer benutzt werden; sie können auch elektrische Ströme bei bestimmten Temperaturen ein- oder ausschalten und dadurch z. B. Heizungen regulieren.

11. Thermische Nachwirkung. — Bei starken Temperaturänderungen wird es bei manchen Stoffen merklich, daß die Längenänderungen hinter der Temperaturänderung zurückbleiben, so daß Zeit erforderlich ist, bis bei gleichbleibender Temperatur eine neue, gleichbleibende Länge erreicht wird. Diese thermische Nachwirkung ist analog der elastischen Nachwirkung (M 254). Bei den Quecksilberthermometern und anderen Flüssigkeitsthermometern treten nach Gebrauch

bei extremen Temperaturen Verschiebungen der Fixpunkte als Folge der Nachwirkung im Glasgefäße auf (vgl. 7, 19).

12. Ungleichmäßigkeiten der Ausdehnung. — Untersuchung der Ausdehnung in kleinen Temperaturstufen, z. B. 0°—50°, 50°—100°, 100°—150° usw., zeigte, daß die Ausdehnungskoeffizienten im allgemeinen mit steigender Temperatur ein wenig zunehmen, d. h. daß die Längenänderungen nicht genau proportional den Temperaturstufen sind, wie es Gl. 9 voraussetzt, sondern um so größer je höher die Temperatur ist. Beispielsweise wird für Eisen in der Nähe der Zimmertemperatur 0·000012, in der Nähe der Rotglut aber 0·000016 als Ausdehnungskoeffizient gefunden.[1]) In gewöhnlichen Temperaturstufen sind die Ungleichheiten der Ausdehnung nicht groß, wie es das Beispiel des Eisens zeigt; mit Annäherung an den Schmelzpunkt des Stoffes kann aber der Ausdehnungskoeffizient sehr groß werden, wofür in der Tabelle Schwefel als Beispiel verzeichnet ist (Schmelzpunkt 115°). Bei tiefsten Temperaturen (in der Nähe des absoluten Nullpunkts, 37) werden alle Ausdehnungskoeffizienten sehr klein.

Das Anwachsen der Ausdehnung bei steigenden Temperaturen ist verständlich; denn wenn infolge erhöhter Temperatur die Moleküle schon weiter auseinander sind, ziehen sie einander weniger an (M 248) und sind sie infolgedessen durch weitere Erhitzung auch leichter noch weiter zu trennen.

13. Die Änderungen der Körperabmessungen bei Temperaturänderung gehen mit denselben **großen Kräften** vor sich, die auch den elastischen Änderungen zugehören (M 253). Es halten sich in einem festen (oder flüssigen) Körper zwei große Kräfte das Gleichgewicht: die Molekularkräfte, welche die Moleküle zusammenziehen, und die Kräfte der Wärmebewegung, welche sie auseinandertreiben (vgl. M 256). Ist ein Körper durch Erhitzen gedehnt und mindert man durch Abkühlen die Wärmebewegung, so wird die Größe der nun nicht mehr im Gleichgewicht gehaltenen Kraft offenbar. Dies kann an der Vorrichtung Abb. 44 gezeigt werden, in welcher ein dicker Eisenstab E E in ein sehr starkes Eisengestell gespannt werden kann, wenn man die Schraubenmutter an seinem einen Ende anzieht, während sein anderes Ende durch den kleinen Bolzen b b (aus Gußeisen) festgehalten ist, der quer in einer Bohrung von E E steckt. Erhitzt man den Stab durch die in der Abbildung ersichtlichen Flammen (etwa bis zum blauen Anlaufen), zieht dann die Mutter fest und löscht die Flammen, so wird alsbald beim Abkühlen des Stabes der Bolzen b b zerbrochen zum Zeichen, daß größere Kräfte frei wurden als man durch Anziehen der Mutter auszuüben vermochte.

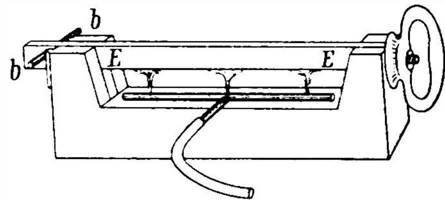


Abb. 44.
Ersichtlichmachung der Ausdehnungsarbeit.

Wird ein fester Körper ungleichmäßig erhitzt oder gekühlt, so treten Drucke oder Zuge in seinem Inneren auf, die bei spröden Körpern Springen zur Folge haben können. Ein erhitzter Teil, umgeben von einem kälteren, sprengt den letzteren durch seine Ausdehnung[2]). So bei Gläsern. Geschmolzener Quarz (Quarzglas) verträgt dagegen vollkommen schadlos die ungleichmäßigsten Temperaturverteilungen, weil sowohl der Ausdehnungskoeffizient sehr klein, als auch die Zugfestigkeit sehr groß ist. Es werden auch Silikatgläser mit besonders kleinen

---

[1]) Bei Erhitzung von Zimmertemperatur bis Rotglut muß daher der Ausdehnungskoeffizient 0·000014 gelten, wie in 8.

[2]) Die meisten Ausdehnungskoeffizienten entsprechen schon bei mäßigen Erhitzungen Längenänderungen, die bei unveränderter Temperatur über die Elastizitätsgrenze (M 253) gingen.

Ausdehnungskoeffizienten für Gefäße hergestellt, die beliebige Erhitzung vertragen sollen.

14. Eine bemerkenswerte Bewegungserscheinung an festen Körpern durch Wärme erhält man manchmal, wenn ein heißes Metallstück auf eine kalte Unterlage gelegt wird. Es kann das Metallstück dann hin und her wackeln und zwar so schnell, daß es einen Ton von entsprechender Schwingungszahl gibt, der eine ganze Weile anhält. Es erfolgt dies, wenn das heiße Metallstück M (Abb. 45 im Querschnitt) in fast labilem Gleichgewicht zwei benachbarte Unterstützungspunkte a und b zur Wahl hat, während es an einem dritten Punkt (vor oder hinter der Zeichnungsebene der Abbildung) dauernd unterstützt bleibt. Liegt es auf dem einen, a, auf, so erwärmt es dort die Unterlage P, die dadurch Dehnung in Gestalt eines kleinen Auswuchses erhält, der M auf den anderen Unterstützungspunkt b wirft, wo dann dasselbe erfolgt, so daß M wieder auf a zurückfällt, wo unterdessen der Auswuchs wegen Wärmeableitung schon verschwunden ist, aber nun neu entsteht, und so fort. Als Unterlage P ist ein Bleiprisma mit scharfer Kante k k sehr geeignet; Blei hat einen großen Ausdehnungskoeffizienten und dabei kleine spezifische Wärme (55, Tab. 21) und nicht zu gute Wärmeleitfähigkeit, so daß es leicht örtlich sehr heiß wird und den Auswuchs gut geben kann.

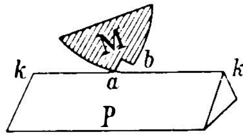


Abb. 45. Wärme-Wackler.

15. Eine Eigentümlichkeit der Wärmemotoren. — Der „Wackler" (14) stellt einen kleinen, durch Wärme getriebenen Motor dar, wenn auch seine Arbeitsleistung nur in der Schallerzeugung besteht. Es wird uns noch eine Reihe verschiedener Vorgänge von Arbeitsleistung durch Wärme begegnen; sie zeigen alle eine gemeinsame Eigentümlichkeit, die schon hier bemerkt sei: Der Wackler kann nur in Bewegung sein und bleiben solange ein Temperaturunterschied seiner Teile M und P (Abb. 45) vorhanden ist, und die Bewegung ist in der erklärten Weise durch Wärmeübergang von M zu P bedingt; ohne diesen Wärmeübergang kann die Bewegung nicht stattfinden. Es gilt allgemein der Satz, daß Arbeit durch Wärme fortlaufend nur dann geleistet werden kann, wenn gleichzeitig Wärme von einem heißen Körper in einen kälteren übergeht.

Auch bei der vorher betrachteten Vorrichtung (13, Abb. 44), die ebenfalls durch Wärme Arbeit leistet, nämlich die des Zerbrechens des Bolzens, genügt die Zufuhr von Wärme nicht, sondern es muß auch Wärmeentziehung stattfinden, nämlich Wiederabkühlung des Stabes, wenn die Arbeitsleistung fortlaufend wiederholbar sein soll.

Auch bei Mitwirkung flüssiger und gasförmiger Körper (25, 43) gilt der Satz.

Wir werden schließlich an dem hervorragendsten Fall der Wärmemotoren, an der Dampfmaschine, die besondere Bedeutung des Satzes, seine verfeinerte und quantitative Fassung und die wichtigen, aus ihm zu ziehenden Folgerungen darlegen (246 u. f.).

16. Volumausdehnung. — Es ist kein Zweifel, daß bei Erwärmung eines nicht kristallisierten (amorphen) Körpers seine Abmessungen in allen 3 Raumrichtungen die durch den Längenausdehnungskoeffizienten α gegebene Änderung erleiden. Für das Volum des Körpers ist stets das Produkt der 3 Abmessungen maßgebend, und daher kommt für die Volumausdehnung der Längenausdehnungskoeffizient 3-mal zur Geltung[1]). Der Bruchteil des Volums, der bei Er-

[1]) Es gilt hier dieselbe Rechnung wie in der Fußnote zu M 260, weil auch hier die Änderungen sehr klein sind.

wärmung um 1^0 hinzutritt, der Volumausdehnungskoeffizient oder kubische Ausdehnungskoeffizient β, ist somit das 3-fache des Längenausdehnungskoeffizienten; $\beta = 3\alpha$, und es gilt für Volumumrechnungen von einer Temperatur auf eine um t^0 höhere (vgl. 9).

$$V = V_0(1+\beta t) = V_0(1+3\alpha t) \quad . \qquad 16)$$

Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten.

17. Flüssigkeiten befinden sich in Gefäßen; dies macht unmittelbar ihr Volum beurteilbar, am besten wenn das Gefäß in eine enge zylindrische Röhre ausmündet. Ein Längenausdehnungskoeffizient kommt für Flüssigkeiten nicht in Betracht, sondern nur der Volumausdehnungskoeffizient β.

18. Mitwirkung der Gefäßausdehnung. — Eine Schwierigkeit bei Beurteilung der Volumausdehnung der Flüssigkeiten liegt darin, daß bei Temperaturänderung auch das Gefäß sein Volum ändert.

Dabei ist zu beachten, daß der Hohlraum des Gefäßes im selben Maße sich ändert, als wäre er ein mit dem Stoffe der Gefäßwand erfüllter Raum. Daß dem so sein muß, ist aus der Überlegung klar, daß die Abmessungen des Hohlraums stets durch die Gefäßwände gegeben sind, die wie ein aus deren Stoff bestehendes Meßwerkzeug ihn umgeben.

19. Was an der im Gefäß befindlichen Flüssigkeit beobachtet wird, ist daher nur der Unterschied zwischen Flüssigkeitsausdehnung und Gefäßausdehnung. Wären die beiden Volumausdehnungen gleich, so würde gar keine Ausdehnung beobachtbar werden. In Wirklichkeit bemerkt man in fast allen Fällen ganz starke Ausdehnung der Flüssigkeit, worauf in der Tat die Flüssigkeitsthermometer beruhen; es haben also die Flüssigkeiten im allgemeinen viel größere Ausdehnungskoeffizienten als die festen Körper. Beispielsweise ist der Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers 0·00018 (Tab. 18), während der kubische Ausdehnungskoeffizient selbst eines stark sich dehnenden festen Metalles, wie Blei, nur 3 · 0·000029 = 0·000087 ist.

Diese stärkere Ausdehnung der Flüssigkeiten im Vergleich zu den festen Körpern ist aus dem größeren Abstand ihrer Moleküle und den dadurch bedingten geringeren Molekularkräften verständlich (vgl. 12).

20. Scheinbare Ausdehnung. — Die in Gefäßen meßbare Differenz der beiden kubischen Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeit β und des Gefäßes $\beta_g = 3\alpha_g$ (16) wird der scheinbare Ausdehnungskoeffizient β' der Flüssigkeit im Gefäß genannt; es ist

$$\beta' = \beta - 3\alpha_g \quad . \qquad 20)$$

Um den scheinbaren Ausdehnungskoeffizienten zu ermitteln, muß man das Gesamtvolum des Gefäßes sowie das Volum der Längeneinheit des zylindrischen Rohres, in welches es mündet, durch Wägungen ermittelt haben (M 14). Dies ist das Volumverfahren.

Man kann aber auch ein Gewichtsverfahren benutzen, das größerer Genauigkeit zugänglich ist. Es verhalten sich die Gewichte gleicher Volume und damit auch die spezifischen Gewichte (M 70) derselben Flüssigkeit bei zwei um t^0 verschiedenen Temperaturen umgekehrt wie die Volume gleicher Gewichte; das Verhältnis der beiden spezifischen Gewichte ist daher $1+\beta t$. Stünde ein Pyknometer von unveränderlichem Volum zur Verfügung, so hätte man also durch das Verhältnis der zwei Gewichte seines Flüssigkeitsinhaltes bei den zwei Temperaturen unmittelbar $1+\beta t$ (Gl. 16) und somit bei bekannter Temperaturstufe t auch β. Da aber das Volum des Pyknometers bei den zwei Temperaturen wegen der Ausdehnung des Gefäßstoffes nicht gleich bleibt, erhält man auch hier nicht den wahren Ausdehnungskoeffizienten β der Flüssigkeit, sondern wieder nur den scheinbaren β'.

21. Ermittelung des wahren Ausdehnungskoeffizienten. — Aus dem scheinbaren Ausdehnungskoeffizienten $\beta' = \beta - 3\alpha_g$ (20) berechnet man den wahren β, wenn der Ausdehnungskoeffizient α_g des Gefäßstoffes bekannt ist. Zur Ermittelung von α_g kann ein Stück des Gefäßstoffes in Stabform benutzt werden; es ist aber dabei immer der Zweifel offen, ob der benutzte Stab genau den gleichen Ausdehnungskoeffizienten besitzt wie der zum Gefäß verarbeitete Stoff.

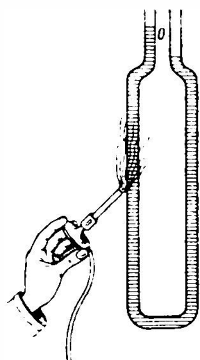


Abb. 46. Flüssigkeitssäulen mit Temperatur-Unterschied.

Von dieser Unsicherheit frei ist eine direkte Ermittelung des wahren Ausdehnungskoeffizienten durch eine von Gefäßausdehnung unabhängige spezifische Gewichtsbestimmung der Flüssigkeit bei zwei verschiedenen Temperaturen. Das Verhältnis der beiden spezifischen Gewichte ist als Verhältnis der Gewichte gleicher Volume alsdann $1+\beta t$ (20), woraus bei bekannter Temperaturstufe t β folgt.

Solche spezifische Gewichtsbestimmung ist mittels U-förmig verbundener Röhren möglich, in welchen die Flüssigkeitssäulenhöhen umgekehrt wie die spezifischen Gewichte sich verhalten (M 306), wobei das Rohrvolum und seine Änderungen einflußlos sind.

Ein einfacher Versuch zeigt, daß leicht sehr merkliche Höhenunterschiede infolge von Temperaturungleichheit in verbundenen Röhren auftreten können. Erhitzt man den einen Schenkel des 1 m hohen, mit Alkohol gefüllten U-Rohres Abb. 46 durch Bestreichen mit der Flamme auf etwa 50° über Zimmertemperatur, so entsteht ein Höhenunterschied von 5 cm an den beiden Alkoholsäulen. Man hat danach $105:100 = 1+\beta \cdot 50$, woraus $\beta = 0{\cdot}001$ als Ausdehnungskoeffizient des Alkohols folgt.

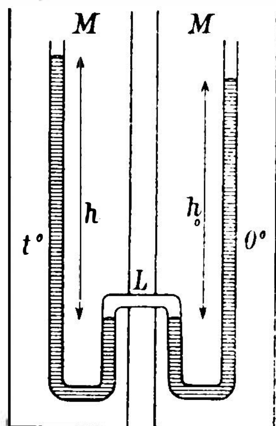


Abb. 47. Ermittelung wahrer Volumausdehnung.

Eine Schwierigkeit für genaue Messung scheint in der schlechten Abgrenzung der warmen von der kalten Säule unten im Rohre zu liegen; man vermeidet die Schwierigkeit durch Zwischenschaltung eines Luftraumes. Abb. 47 zeigt dies für die sehr fein durchgeführte Ermittelung der Ausdehnung des Quecksilbers. Die beiden, mit Kathetometer (M 10) meßbaren Quecksilbersäulen h und h_0 befinden sich in zwei vollkommen voneinander getrennten Mänteln M M, welche die Temperaturbäder von t° und 0° enthalten. Das verbindende Luftrohr L kann beliebig lang und auch eng sein.

22. Nachdem der wahre Ausdehnungskoeffizient einer Flüssigkeit — des Quecksilbers — einwandfrei direkt gemessen war (21), wurde auch das einfache Gewichtsverfahren (20) einwandfrei benutzbar, indem man die fragliche Volumausdehnung des Pyknometers durch Eichung desselben mit Quecksilber zweifelsfrei ermitteln konnte. Letzteres ist die Umkehrung des vorher beschriebenen Weges, indem nun aus beobachteter scheinbarer und bekannter wahrer Ausdehnung, β' und β, die Gefäßausdehnung $3\alpha_g$ berechnet wird (Gl. 20).

In dieser Weise sind die Ausdehnungskoeffizienten vieler Flüssigkeiten ermittelt worden, wovon Tab. 18 Beispiele gibt.

Tab. 18. **Kubische Ausdehnungskoeffizienten.**

Quecksilber	0·00018
Alkohol bei 0°.	0·0010
„ „ 70°.	0·0012
Äther „ 0°.	0·0015
Alle Gase	$\frac{1}{273} = 0{\cdot}00366$

Unmittelbar erhält man mit dem Pyknometer, nachdem sein Volum für beliebige Temperaturen in der angegebenen Weise ermittelt ist, auch die spezifischen Gewichte von Flüssigkeiten bei beliebigen Temperaturen. Hierfür gibt Tab. 19 ein Beispiel für den wichtigen Fall des Wassers, auf den wir zurückkommen (23). Eine solche Tabelle des Wassers ist dann weiter ein einfaches Mittel zu Volumbestimmungen mit der Waage (M 14).

Tab. 19. **Spezifische Gewichte des Wassers (und Eises),** gr/cm³.

Eis	0°	0·917
Wasser	0°	0·9999
„	4°	1·0000
„	10°	0·9997
„	20°	0·9982
„	30°	0·9957
„	40°	0·9922
„	50°	0·9881
„	60°	0·9832
„	70°	0·9778
„	80°	0·9718
„	90°	0·9653
„	100°	0·9584

23. Besonderheiten der Volumausdehnung; Verhalten des Wassers: — Im allgemeinen ist der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeiten um so größer, je näher sie ihrer Siedetemperatur sind. Man sieht das an der Reihenfolge Quecksilber, Alkohol, Äther in der Tab. 18 (Siedepunkte 357°, 78°, 35°, s. Tab. 33). Das Verhalten ist verständlich, da bei Übergang in die Dampfgestalt die Moleküle ganz außerhalb ihrer Anziehungsweiten kommen (M 346). Dem entspricht auch das Steigen des Ausdehnungskoeffizienten bei einer und derselben Flüssigkeit mit steigender Temperatur, wofür die Tab. 18 Alkohol als Beispiel gibt. Es ist das dieselbe Ungleichheit der Ausdehnung, die auch bei den festen Körpern sich zeigte (12).

Es kommt aber auch vor, daß der Ausdehnungskoeffizient in ganz anderer, abnormer Weise mit der Temperatur zusammenhängt. Ein hervorragendes Beispiel hierfür bietet das Wasser. Es hat von 0° bis 4° einen negativen Ausdehnungskoeffizienten, d. i. es zieht sich zusammen; erst über 4° beginnt Ausdehnung und zwar dann mit steigender Temperatur in steigendem Maße, wie gewöhnlich. Wasser von 4° ist demnach dichter als alles andere Wasser bei gewöhnlichem Druck. Man sieht dies an den spezifischen Gewichten in Tab. 19.

Es ist dies eine der Wärme-Merkwürdigkeiten des Wassers, wozu auch seine große spezifische Wärme (56), seine sehr große Verdampfungswärme (226), sowie das Besondere

seiner Kompressibilität gehört (M 314). Die Erklärung dieser Eigentümlichkeiten liegt wohl richtig im Vorhandensein komplexer (polymerisierter) Moleküle, wie H_4O_2 oder H_6O_3 im flüssigen Wasser[1]). Diese Moleküle zerfallen bei Temperaturerhöhung (vgl. 124); im Dampf sind fast allein die durch die Molekulargewichtsbestimmung aus der Dampfdichte (85) unzweifelhaft nachgewiesenen einfachen Moleküle H_2O vorhanden, vermischt mit nur sehr wenigen komplexen Molekülen (237). Bei Temperaturerniedrigung bilden sich die komplexen Moleküle wieder zurück; im flüssigen Wasser von Zimmertemperatur scheint H_4O_2 überwiegend zu sein; bei Abkühlung gegen 4° und darunter ist das Hinzutreten noch komplexerer Moleküle anzunehmen, wohl H_6O_3, die sperrig, stark raumbeanspruchend sind und die zusammengelagert das Eis bilden. Die Raumbeanspruchung wird durch die starke Dehnung angezeigt, die beim Erstarren des Wassers von 0° zu Eis eintritt (199), ersichtlich auch am geringen spezifischen Gewicht des Eises (Tab. 19); sie erscheint als Fortsetzung der Dehnung beim Abkühlen unter 4°.

24. Bemerkung zum Temperaturmaß. — Die Ungleichmäßigkeiten von Wärmeausdehnung, wie bei Alkohol und noch mehr die Abnormitäten, wie bei Wasser (23), mußten früh Zweifel erwecken an der Berechtigung der Temperaturmessung mit dem Quecksilberthermometer. Denn es ist bei diesem Thermometer die Ausdehnung des Quecksilbers, und zwar sogar die scheinbare Ausdehnung desselben (19, 20) im Glase, zum Temperaturmaß gemacht, wobei Quecksilber und Glas nur aus rein äußerlichen, praktischen Gründen gewählte Stoffe (5) sind, die ebensogut Ungleichmäßigkeiten der Ausdehnung besitzen könnten, wie Alkohol, Eisen und andere Stoffe sie zeigten, als sie mit dem Quecksilberthermometer untersucht wurden (12). Alle diese Untersuchungen waren überhaupt nur Vergleichungen der Ausdehnung der anderen Stoffe mit der des Quecksilbers im Glase; eine Entscheidung über die Berechtigung der Wahl irgendeines Körpers zur Temperaturmessung ist dabei nicht erfolgt.

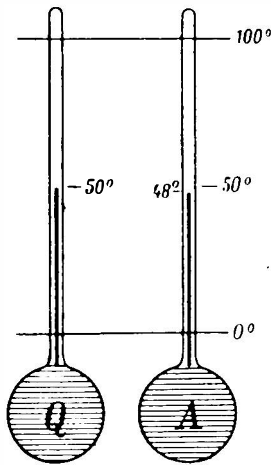


Abb. 48. Willkürlichkeit der Flüssigkeits-Thermometer.

Die Zweifel betreffen daher alle Thermometer mit Flüssigkeiten und ebenso die Metallthermometer (10). Bei 0° und 100°[2]) müssen sie alle übereinstimmen, da sie darauf geeicht werden (7); bei allen anderen Temperaturen ist nur zu erwarten, daß sie Unterschiede zeigen, wenn jedes mit seiner Teilung in gleich große Grade versehen ist. Als Beispiel zeigt Abb. 48 ein Quecksilber- und ein Alkoholthermometer, wie sie in einem gemeinsamen Bade sich einstellen würden. Zeigt das Quecksilberthermometer 50°, so würde das Alkoholthermometer nur etwa 48° zeigen, weil der Alkohol im Vergleich zum Quecksilber eine so ungleichmäßige Ausdehnung besitzt (23). Bei Temperaturen unter 0° und über 100° werden die Unterschiede in den Anzeigen der Thermometer verschiedenen Stoffes noch viel größer als bei 50°.

Man sieht daraus, daß einheitlich gesicherte Temperaturmessung erst möglich

[1]) Die Zusammenlagerungsfähigkeit des Moleküls H_2O, auch mit anderen Molekülen, macht das Wasser auch zu einem so guten Lösungsmittel für viele Stoffe. Die gelösten Moleküle, auch Ionen, haben Anlagerungen der Moleküle des Lösungsmittels (223, E 199).

[2]) Die Benutzung von Flüssigkeitsthermometern bis über den gewöhnlichen Siedepunkt der Flüssigkeit hinaus, z. B. eines Alkoholthermometers bis 100°, ist möglich, wenn Gas unter Druck über der Flüssigkeit im Thermometerrohr ist.

wurde, nachdem ein anderes, der Natur der Dinge entsprechendes, nicht durch willkürlich gewählte Körper bedingtes Temperaturmaß eingeführt werden konnte. Ein solches Temperaturmaß ist im Gasthermometer gegeben, auf das wir alsbald eingehen (36). Es sei nur bemerkt, daß bei Wahl passenden Glases zum Quecksilberthermometer sehr gute Übereinstimmung desselben mindestens von 0° bis 100° mit dem Gasthermometer, dem wahren Temperaturmaß, erreicht werden kann. Dementsprechend behalten die schon betrachteten allgemeinen Ergebnisse über die Ausdehnung trotz Benutzung des Quecksilberthermometers ihre Gültigkeit.

25. Bewegungserscheinungen an Flüssigkeiten durch Wärme. — Temperaturunterschiede in einer Flüssigkeitsmasse bringen leicht Bewegungsvorgänge in ihr hervor.

In Abb. 46 haben wir zwei Flüssigkeitssäulen verschiedener Temperatur im Gleichgewicht betrachtet (21). Man denke nun oben bei o eine kleine Öffnung im linken Rohr angebracht, die Flüssigkeit ins rechte Rohr hinüberfließen läßt. Dieses Fließen wird fortdauern, solange der Temperaturunterschied in den beiden Rohren besteht[1]).

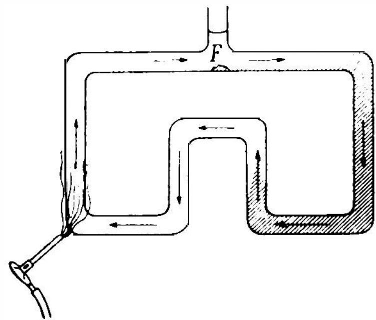


Abb. 49. Warmwasser-Heizung.

Man kann auch einen geschlossenen, ganz flüssigkeitgefüllten Rohrkreis beliebiger Krümmung, wie in Abb. 49, mit Temperaturunterschieden versehen, etwa durch Heizung mit der Flamme an der einen Seite. Es setzt dann eine Strömung in Richtung der Pfeile ein, die durch ein Stück löslichen Farbstoffs F, von oben hereingeworfen, sichtbar wird. Die Strömung dauert an, solange der Temperaturunterschied an beiden Rohrseiten vorhanden ist. Man kann dies als Modell einer Warmwasserheizung ansehen, die aus einer im Hause herumlaufenden, in sich geschlossenen Rohrleitung besteht, in welche an der einen Stelle, die tief liegen muß (26), der Heizkessel, an den anderen Stellen die Heizkörper eingeschaltet sind. Die Wärme besorgt hier selbsttätig, an Stelle einer Pumpe, die Beförderung des warmen Wassers an die Stellen hin, wo geheizt werden soll. Ein wärmegetriebener Motor liegt hier vor. Auch bei ihm bemerken wir, wie an den mit festen Körpern arbeitenden Wärmemotoren (15), daß er nur wirken kann solange Temperaturunterschiede da sind, die Übergang von Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Körper unterhalten. Verschwinden diese Temperaturunterschiede, so kann der Motor nicht arbeiten.

26. Strömungen, die auf den Unterschieden der spezifischen Gewichte verschieden warmer Flüssigkeit infolge der Volumausdehnung beruhen, entstehen auch in jedem von unten geheizten Flüssigkeitsgefäß; die Pfeile in Abb. 50 zeigen ihre Richtung. Der Auftrieb nach Archimedes Satz bringt die über der Flamme erwärmten Flüssigkeitsteile von selber von der Stelle, so daß kältere hinkommen, die dann ebenfalls erwärmt werden und fortströmen. Es ist das eine besondere Ausbreitungsart der Wärme in Flüssigkeiten, durch Strö-

[1]) Manche heiße Brunnen, die erbohrt werden und dauernd fließen, sogar mit Druck springbrunnenartig hervorbrechen, obgleich weit entfernt von Bergen, die drucklieferende Wassersäulen enthalten könnten, mögen solcher Art sein („artesische Brunnen"), soweit nicht Dampfdruck in Betracht kommt, der allerdings meist periodische Erscheinungen gibt (Geyser). Unterirdische hohlverbundene Räume von großer vertikaler und auch horizontaler Ausdehnung mit Temperaturunterschieden aus der Erdwärme wären anzunehmen; der Überdruck an der heißen Seite ist proportional dem Temperaturunterschied und der Säulenhöhe (21).

mung (Mitführung), die bei Durchwärmung von Flüssigkeiten stets wesentlich ist (135). Abb. 51 zeigt solche Strömungen im Schlierenbild (O 73) in Wasser von Zimmertemperatur, ausgehend von einer elektrisch geheizten Platindrahtschlinge p und von einem Eisstückchen e.

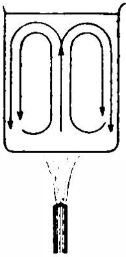


Abb. 50. Wärmeverbreitung in einer Flüssigkeit durch Strömung.

Besonders zu bemerken ist, daß diese Art von Wärmeausbreitung nur bei Erhitzung von unten wirkt, nicht von oben[1]); denn oben befindliche warme Flüssigkeit bleibt schwimmen und geht nicht von der Stelle. Von oben kann nur Kühlung wirken, wie beim Eisstückchen in Abb. 51.

27. Meeresströmungen. — Solche Wärmeverbreitung durch Strömung findet auch in den Meeren der Erde statt. In Abb. 52 ist die Erde ganz von Wasser bedeckt dargestellt, was nicht sehr fern der Wirklichkeit ist, und die Pfeile zeigen die Richtungen der im großen zu erwartenden Meeresströmungen schematisch an. An den Polen ist durch steten Wärmeverlust infolge der überwiegenden Ausstrahlung in den Himmelsraum stets tiefe Temperatur (161); das im Polareis gekühlte Wasser muß absinken zum Meeresboden, weil es schwerer ist als alles andere Wasser des Meeres. Es ist nämlich wegen des Salzgehaltes das Dichtemaximum bei 4°, das dem reinen Wasser zugehört (23), beim Meereswasser nicht vorhanden[2]), sondern das kälteste Meerwasser ist das schwerste. Am Meeresboden verbreitet sich dieses kalte Wasser bis zum Äquator hin; Temperaturmessungen haben gezeigt, daß der Meeresboden überall ungefähr die Temperatur 0° hat. Aufsteigen kann das Wasser vom Meeresboden nur insofern, als es vom Erdinneren her erwärmt wird, was ein sehr langsamer Vorgang ist (146); es wird dann wieder durch nachsinkendes Wasser von den Polen her ersetzt, welches seinerseits durch das oben schwimmende, von der Sonne vorzüglich am Äquator erhitzte Wasser Ersatz erhält, das dann am Polareis wieder kalt wird. So muß es zu dem in der Abb. 52 angedeuteten Kreislauf kommen.

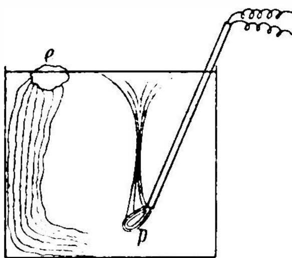


Abb. 51. Wasser unten elektrisch geheizt, oben durch Eis gekühlt.

Von diesem Kreislauf merkt man an der Oberfläche des Meeres wenig; er ist offenbar so langsam als die Zufuhr von Wärme aus dem Erdinneren langsam ist. Die Erhitzung von oben allein, wie sie durch die Sonne stattfindet, deren Gesamtstrahlung schon in wenig Metern Wassertiefe nahe absorbiert ist (157, 158), würde überhaupt keine Strömungen machen (26). Die den Seefahrern wohlbekannten Meeresströmungen an der Oberfläche gehen meist anders als es die Oberflächenpfeile der Abb. 52 angeben; sie erscheinen stark von den Winden abhängig. Die von der Sonne erwärmte Oberflächenschicht des Meeres, welche allein für die Schiffe in Betracht kommt, ist verhältnismäßig sehr dünn, und sie schwimmt ziemlich wirr, mit den Jahreszeiten wechselnd, umher; die meist befolgten Bahnen sind auf Seekarten festgelegt.

---

[1]) Ausgenommen selbstverständlich bei Wasser unter 4° (23).

[2]) Auch bei reinem Wasser verschwindet das Dichtemaximum unter hohem Druck (150 Atm.).

Eine der Oberflächenströmungen, wohl die ausgeprägteste, fast schon seit Kolumbus Zeiten aufgefallene, hat deutlich die der Abb. 52 entsprechende südnördliche Richtung: Es ist das der „Golfstrom", der aus dem Golf von Mexiko kommend um Florida herumbiegt, dann der nordamerikanischen Küste entlang nach Nordosten zieht und bis zu den nördlichen Küsten von Europa und zu Islands Südküste hin merklich wird. Das warme Wasser (54), das er von Äquatornähe her an diese Küsten bringt, verleiht Nordwesteuropa das der Kulturentwickelung günstig gewesene Klima, das sonst so hohen Breiten nirgends auf Erden zukommt.

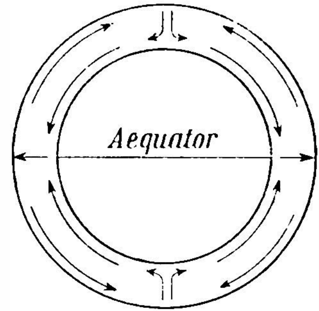


Abb. 52. Strömungen im Wasser- und Luftmeer der Erde.

Wärmeausdehnung der Gase.

28. Die sehr starke Ausdehnung der Luft beim Erwärmen wurde früh bemerkt, seit man Luft in Glasgefäßen durch leicht bewegliche Flüssigkeitssäulen absperrte. Man bedarf sogar keiner bauchigen und enghalsigen Gefäße, sondern die Ausdehnung wird schon in zylindrischen Röhren leicht merklich.

Man versehe ein solches, am einen Ende R geschlossenes, nicht zu weites Rohr R R_1 (Abb. 53) mit einem kurzen Flüssigkeitsfaden, der eine von R bis a reichende Luftstrecke bei a abschließt, und zwar liege das Rohr in schmelzendem Eis, so daß diese Luftstrecke die Temperatur von 0^0 hat. Nimmt man nun das Rohr aus dem Eise, so daß die Luft Zimmertemperatur annimmt, so sieht man den Flüssigkeitsfaden merklich schnell vorangehen; in ein Bad von 100^0

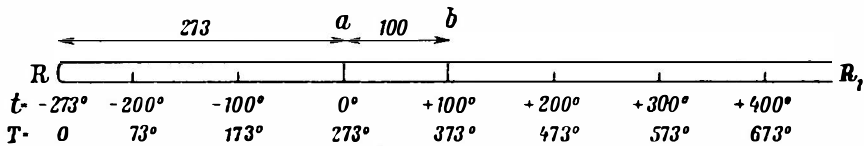


Abb. 53. Gas-Volumthermometer (schematisch) mit absoluter Temperaturskala.

gelegt, erreicht sein absperrendes Ende die Lage b, wie es in der Abbildung maßstäblich richtig gezeichnet ist. Ist R a 273 mm lang, so beträgt der Zuwachs a b 100 mm. Ebenso verhalten sich die Volume, so daß das Volum 273 von 0^0 bei Temperatursteigerung um 100^0 um das Volum 100 zugenommen hat, d. i. um $^{100}/_{273}$ des ursprünglichen Volums, bei 1^0 Erhitzung also um $^1/_{273}$. Damit ist der Ausdehnungskoeffizient der Luft gefunden zu $^1/_{273} =$ 0·00366. Dies ist ein großer Ausdehnungskoeffizient, wie er bei festen und auch flüssigen Körpern nicht vorkommt (vgl. Tab. 17 und 18). Der Volumausdehnungskoeffizient des Glasrohres, etwa 0·000027, ist weniger als $^1/_{100}$ davon; er konnte also zunächst unberücksichtigt bleiben (vgl. 18, 19).

Man kann auch den Apparat der Abb. 54 benutzen, wo das Luftvolum R a durch Öl abgesperrt ist, das den Schlauch S bis ins äußere Rohr Q erfüllt und durch Heben oder Senken von Q innen und außen gleich hoch gestellt werden kann, um die abgesperrte Luft stets unter gleichem Atmosphärendruck zu haben.

Ist die Luft vom Eismantel umgeben, wie in der Abbildung, und hat sie dabei das Volum von 273 cm^3, so wächst wieder ihr Volum um 100 cm^3, wenn nach Wegnahme des Eismantels das Dampfrohr D übergestülpt wird.

29. Statt bei unverändertem Druck Volume zu messen, kann man auch bei unverändertem Volum Drucke messen. Man steigert dazu bei 100° den Druck durch Hebung des Rohres Q mit der Flüssigkeitssäule so weit, daß wieder dasselbe Volum hergestellt wird wie bei 0°. Der dazu bei 100° nötige Druck muß nach Boyles und Mariottes Gesetz (M 356) zum Druck bei 0° sich verhalten umgekehrt wie die Volume, also wie das Volum bei 0° zu dem bei 100°. Man sieht daraus, daß die Messung der beiden Drucke die Volummessung ersetzen kann. Dabei ist die Druckmessung, die nur Höhenmessung von Flüssigkeitssäulen erfordert, einfacher als die Volummessung; man wendet daher zu genauester Verfolgung der Gasausdehnung mit Vorliebe dieses Verfahren der Druckmessung bei unverändert gehaltenem Volum an, wozu das später (36) zu betrachtende „Gasthermometer", Abb. 55, besonders eingerichtet ist.

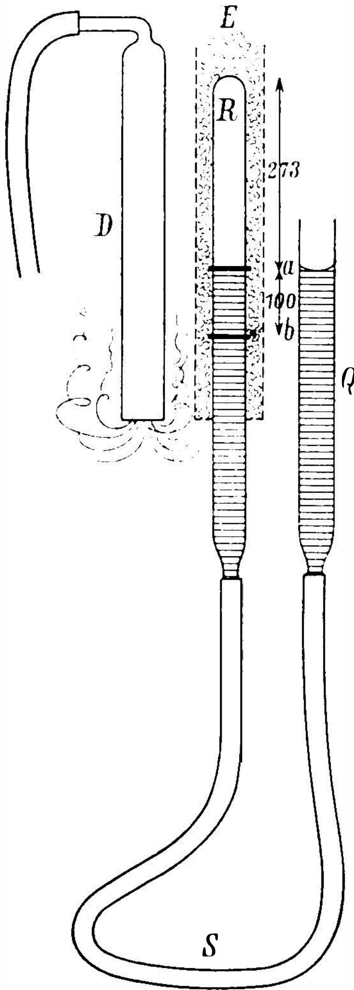


Abb. 54. Gasausdehnung.

30. Andere Gase. — Als eine Reihe von Gasen allmählich entdeckt und festgestellt worden war, begann man auch deren Wärmeausdehnung zu untersuchen. Da man aber die Gase über Wasser abschloß, das bei Erhitzung Dämpfe entwickelt, die den Gasen sich beimischen, und das auch die Gase in verschiedenem Maße absorbiert, waren die Versuche unrein und die Ergebnisse unbrauchbar. Erst Trocknung der Gase und die Anwendung des Quecksilbers als Sperrflüssigkeit zeigte, daß hier ein merkwürdiges Verhalten vorliegt: Alle Gase haben den gleichen Ausdehnungskoeffizienten wie die Luft (Gay-Lussac, Dalton 1802); er ist, wie schon angegeben, $^1/_{273}$ = 0·00366.

31. Dieses Ergebnis des Gleichverhaltens aller Gase bei der Wärmeausdehnung ist für die Temperaturmessung von höchster Wichtigkeit geworden. Man sieht zunächst unmittelbar, daß die Ausdehnung der Gase ein Mittel gäbe, Temperaturen unabhängig von der Willkür zu messen, die in der Wahl eines besonderen Stoffes bei den Flüssigkeitsthermometern liegt (24). Alle Gasthermometer würden miteinander übereinstimmen.

Die Frage, ob mit dem Gasthermometer auch schon ein ganz auf die Natur

der Dinge gegründetes Temperaturmaß gewonnen sei, war freilich damit nicht beantwortet. Sie war auch nicht zu beantworten ohne zu wissen, was „Temperatur" sei, was es an oder in den Körpern ist, das sie unserem Hautsinn warm oder kalt erscheinen läßt.

Wenn Wärme Molekularbewegung ist, was wir bereits voranstellten und später beweisen (66 u. f.), so muß Temperatur etwas an dieser Bewegung sein, eine von der Geschwindigkeit der ungeordnet bewegten Moleküle abhängige Größe. Die hier nötige eingehende Untersuchung der Molekularbewegung ist bei genügend verdünnten Gasen mit vollkommener Sicherheit durchführbar gewesen, worauf wir im Folgenden zunächst so weit eingehen, daß die Erledigung der Frage nach der Temperaturmessung erfolgen kann (32—37).

32. Gasmoleküle stoßen wie vollkommen elastische Kugeln. — Bei nicht zu dichten Gasen sind, wegen der großen mittleren Abstände der Moleküle, die stets verwickelten Molekularkräfte fast ganz ausgeschaltet; sie treten nur bei den Zusammenstößen der sonst kräftefrei und daher gradlinig bewegten Moleküle in Wirksamkeit. Dies geht schon aus dem allgemeinen Verhalten der Gase hervor (M 346), ist aber auch im einzelnen in weitgehender quantitativer Durchführung bestätigt (M 360, W 78 u. f.).

Wenn eine Gasmenge, bestehend aus beliebigen, unverändert bleibenden Molekülen, sich selbst überlassen ist, ohne daß sie Wärme an die Umgebung abgibt oder von dieser empfängt, so bleibt nach vorhandener Erfahrung ihre Temperatur unverändert, trotz der fortwährend stattfindenden Zusammenstöße der Moleküle untereinander. Daraus folgt, daß bei diesen Zusammenstößen eine Verlangsamung der Molekularbewegung nicht eintritt. Die Stöße der Moleküle sind also von derselben Art, wie bei vollkommen elastischen Körpern (M 277).

Man kann dabei die Moleküle wie vollkommen elastische Kugeln betrachten. Denn wenn sie das auch nicht sind[1]), müssen sie im Durchschnitt über sehr viele Stöße doch so sich verhalten, weil sie in allen möglichen gegenseitigen Orientierungen aufeinander treffen, so daß die Wirkungen ihrer Einseitigkeiten im Endergebnis der vielen Stöße verschwinden.

Es ist das Besondere und Vereinfachende bei der Betrachtung der Molekularbewegungen, daß es immer nur auf Durchschnittswerte ankommt, weil selbst in sehr kleinen Gasräumen nur das Zusammenwirken sehr vieler Moleküle zur Beobachtung kommt.

Noch ein anderer, bei den Stößen zu bedenkender Umstand kann im Durchschnitt außer Betracht bleiben, falls die Temperatur ungeändert bleibt. Die Moleküle, bestehend aus Atomen, können infolge der Beweglichkeit ihrer Teile „innermolekulare Bewegungen" bei den Stößen erhalten (Gl. 121), und es kann daher vorkommen, daß die lebendige Kraft zusammenstoßender Moleküle — berechnet nach den Geschwindigkeiten ihrer Schwerpunkte — vermindert wird, weil sie zum Teil in die innermolekulare Bewegung übergegangen ist. Solcher Verlust wird aber bei anderen Stößen durchschnittlich wieder ersetzt, indem ebensogut Energie der innermolekularen Bewegung in lebendige Kraft

[1]) Im flüssigen Zustand hat man langgestreckte Moleküle in besonderen Weisen untersuchen gelernt (vgl. E 113); im Gaszustand zerfallen solche Moleküle meist (124).

der ganzen Moleküle übergehen kann, als umgekehrt. Es genügt daher bei gleichbleibender Temperatur nur einfach mit den (mittleren) *Geschwindigkeiten der Schwerpunkte der Moleküle* zu rechnen, die wir stets kurz als *Geschwindigkeiten der Moleküle* bezeichnen.

33. *Naturgemäße Temperaturmessung.* — Körper verschiedener Temperaturen, die einander genügend lange ohne weitere Einwirkungen berühren, gleichen ihre Temperaturen erfahrungsgemäß aus (6). Man kann hiernach die *Temperatur als dasjenige definieren, was bei Berührung sich ausgleicht.* Dieser Ausgleich findet bei den Gasen, bei nicht zu großer Dichte, nur durch die Zusammenstöße der Moleküle statt, weil sonstige Kraftwirkungen fehlen (M 346), und man weiß, was bei elastischen Zusammenstößen (32) sich ausgleicht (M 280): es ist die mittlere lebendige Kraft der stoßenden Teile. Danach *ist die Temperatur eines Gases gegeben durch die mittlere kinetische Energie seiner Moleküle.*

Gilt dies auch nur für genügend verdünnte Gase, so ist damit doch die *naturgemäße Temperaturmessung begründet.* Denn es ist nur nötig, die zu messende Temperatur durch genügend lange Berührung einem genügend verdünnten Gase mitzuteilen — wie man sie bei Messung mit dem Quecksilberthermometer dem Quecksilber mitteilt — und dann die mittlere lebendige Kraft der Moleküle des Gases zu messen. Letzteres ist sehr einfach auszuführen, wie die folgende Überlegung zeigt: Die mittlere lebendige Kraft der Gasmoleküle wird durch den *Druck des Gases* gemessen.

34. *Gasdruck.* — Der Druck, welchen jedes Gasvolum dauernd auf seine Nachbarschaft ausübt, sei es auf Gefäßwände oder auf benachbarte Gasmassen (M 346), läßt sich als bloße *Folge der Bewegung der Gasmoleküle* richtig berechnen, wie es dem vorher Betrachteten (32) entspricht und weiter sich bewährt (35), nämlich als ausgeübt durch die elastischen Stöße der Moleküle gegen die Umgebung:

Es wurde solcher Druck eines Hagels von vielen Kugeln, die senkrecht gegen eine Ebene elastisch stoßen, gleich der doppelten Bewegungsgröße der in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit treffenden Kugelmasse gefunden (M 282). Bei den Gasmolekülen finden auch schiefe Stöße statt, da deren Bewegungen nach allen Richtungen hin gleichmäßig verteilt sind. Man kann die dadurch bedingte umständliche Rechnung (welche durchgeführt ist) sich sparen, wenn man die Bewegungen nur nach den 3 Raumdimensionen verteilt annimmt und zwar beiderseitig gerichtet, so daß $\frac{1}{6}$ der zu betrachtenden, bei der getroffenen Ebene befindlichen Moleküle senkrecht gegen die Ebene stößt und die anderen $\frac{5}{6}$ die Ebene überhaupt nicht treffen[1]). Da die gewählte Ebene beliebig ist, ist keine Raumrichtung dabei bevorzugt und daher die allseitig gleichförmige Richtungsverteilung der Bewegungen genügend berücksichtigt. Die in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der Ebene treffende Molekülmasse ist dann enthalten in einem prismatischen, senkrecht zur betrachteten Ebene stehenden Raum von 1 cm^2 Querschnitt und von der Länge w cm, wenn w cm/sek die Geschwindigkeit der Moleküle relativ zur Ebene ist; denn w cm ist der in 1 sek von den

[1]) Es ist dabei auch Rauhigkeit der Ebene berücksichtigt, insofern als allseitig zerstreute Reflexion von der Ebene richtig durch senkrechte Reflexion des betrachteten Sechstels der Moleküle ersetzt ist.

Molekülen gegen die Ebene hin zurückgelegte Weg. Es seien N Moleküle im cm^3 enthalten, jedes von der Masse m, so daß die Masse im cm^3 Nm ist, wovon $\frac{1}{6}$ zu rechnen ist. In dem betrachteten prismatischen Raum von w cm^3 Volum ist dann die Masse $\frac{1}{6}$Nmw enthalten, und das doppelte Produkt aus dieser Masse und ihrer Geschwindigkeit w ist somit die gesuchte doppelte Bewegungsgröße und damit auch der gesuchte Druck:

$$p = \tfrac{1}{3}Nmw^2. \qquad 34)$$

Die Geschwindigkeit w der Moleküle ist dabei, wie alle die Wärme bedingenden Molekulargeschwindigkeiten, relativ zum Raumelement des Körpers gemessen, dem die Moleküle angehören, da die gedrückte Fläche bei der Rechnung am Gas ruhend angenommen wurde.

35. Dieser aus der bloßen Stoßwirkung der Moleküle berechnete Druck p hat die tatsächlichen Eigenschaften des Gasdrucks: er folgt Boyles und Mariottes Gesetz. Denn es ist N, die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, verkehrt proportional dem Volum einer gegebenen Gasmenge, und danach gibt Gl. 34 bei gleichbleibender Temperatur, d. i. gleichbleibendem mw^2 (33), auch p verkehrt proportional dem Volum. Dies zeigt, daß in der Tat der Gasdruck bloße Stoßwirkung der Moleküle ist, ohne Mitwirkung anderer Ursachen wie etwa abstoßender Kräfte der Moleküle, und dies ist der besondere Nachweis dafür, daß solche Kräfte bei genügend verdünnten Gasen, für welche das Gesetz gilt, nicht vorhanden sind (vgl. M 346). Daß auf große Dichte gebrachte Gase geringere Drucke zeigen als der Gleichung 34 und dem Gesetz entspräche, und bei noch weiterer Volumverkleinerung größere Drucke, dies ist dem Merklichwerden der Molekularkräfte bei großer Annäherung der Moleküle zuzuschreiben, wie bereits früher erläutert (M 359).

Gleichzeitig zeigt die Gl. 34, daß der Druck p einer unveränderten Gasmenge bei unverändert gehaltenem Volum, was zusammen Unveränderlichbleiben von N bedeutet, proportional der Temperatur sein muß; denn es ist dann p proportional mw^2 und also proportional der mittleren lebendigen Kraft der Moleküle, die wir als richtiges Maß der Temperatur erkannt haben (33). Mißt man also den Gasdruck, so hat man damit diese lebendige Kraft, d. i. die Temperatur gemessen.

36. Gasthermometer. — Um mittels Gasdruckes Temperaturen zu messen, bedient man sich des in Abb. 55 im wesentlichen dargestellten Gasthermometers, dessen Grundgedanken wir bereits betrachteten (29). Man mißt die Drucke, welche eine abgesperrte und auf unverändertem Volum gehaltene Gasmenge bei verschiedenen Temperaturen annimmt. Das Gas ist im Gefäß G enthalten. Sein Volum ist durch die nach unten gerichtete Spitze s eines kleinen Glasstiftes begrenzt, der im Inneren des Glasrohres aus dessen Wand hervorragt. Bis an die Spitze wird die Oberfläche des das Gas absperrenden Quecksilbers durch Heben des Rohres Q gebracht, so daß das Spiegelbild der Spitze in der Quecksilberoberfläche eben die Spitze berührt; man ist dann sicher, immer das gleiche Gasvolum zu haben, bis auf die Ausdehnung des Gefäßes G, welche aber — weil sehr klein im Verhältnis zur Gasausdehnung (28) — vollkommen genügend durch eine kleine Nebenrechnung berücksichtigt werden kann. Der Druck des Gases wird durch den Höhenunterschied der Quecksilberoberflächen in den beiden Rohren gemessen.

Hat man das Gefäß G in schmelzendes Eis gebracht und den Druck gemessen,

der hiernach bei 0° sich einstellt, so bedeutet nach der schon bekannten — übrigens mit demselben Gasthermometer auch fein zu messenden — Gasausdehnung (28, 29) je $1/_{273}$ Änderung dieses Druckes 1° Temperaturänderung des Gefäßes G.

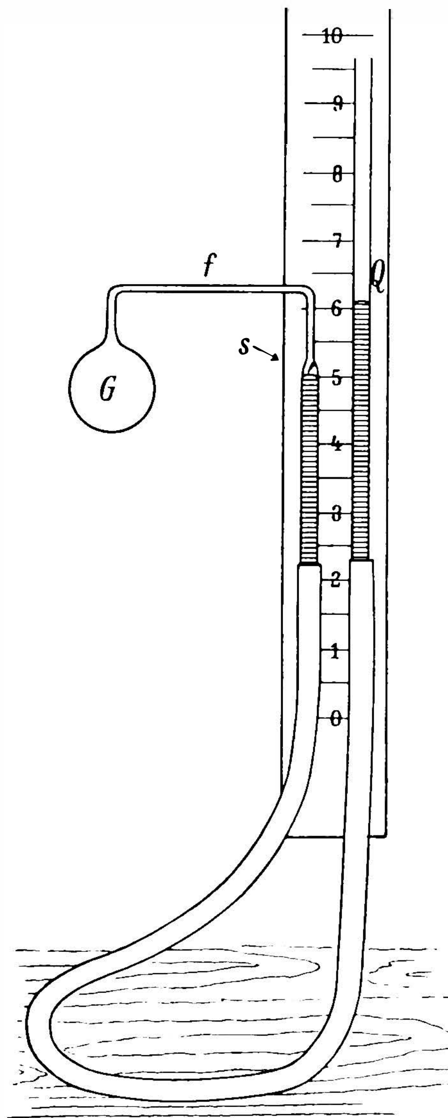


Abb. 55. Gasthermometer.

Dies ist die Art der Temperaturmessung mit dem Gasthermometer.

Eine Korrektion macht noch der Fehler des vorstehenden Fadens (7) nötig. Die Korrektion bleibt klein und daher leicht durch eine besondere Nebenrechnung genügend ermittelbar, wenn das Volum des vorstehenden Fadens f einschließlich des Gasraums bei s im Verhältnis zum Volum von G klein ist, wozu f äußerst eng und der Stift s äußerst kurz gemacht wird. Dieses Volumverhältnis muß für die Korrektion ermittelt und die Temperatur von f jeweils gemessen sein, wozu ein Quecksilberthermometer genügt.

37. Absolute Temperaturskale[1]). — Da die Temperatur durch den Gasdruck gegeben ist (35), ist auch zu ersehen, daß es einen wahren Nullpunkt der Temperatur gibt, ein natürliches Ende der Temperaturskale; es wird erreicht, wenn der Gasdruck Null wird. Es ist dann auch die Geschwindigkeit der Moleküle Null geworden. Dies wird der absolute Nullpunkt der Temperatur genannt. Von ihm aus zählen die Grade der „absoluten Temperatur“, deren Länge übrigens ungeändert je einer Gasdruckänderung von $1/_{273}$ des zum Eisschmelzpunkt gehörenden Druckes entspricht (36), so daß vom Eispunkt bis zum Siedepunkt des Wassers immer noch 100 Grade sind[2]). Es ist daraus ersichtlich, daß der absolute Nullpunkt 273 Grade unter dem Eisschmelzpunkt liegen muß, weil dann bei ihm alle 273 273-tel des Druckes verschwunden sind.

Anschaulich stellt sich die absolute Temperaturskale, zusammen mit der gewöhnlichen Skale, am Gasvolum-Thermometer Abb. 53 dar, das wir schon vorher betrachtet hatten (28). Zu beachten ist dabei allerdings, daß die Volumdarstellung bei den tiefsten Temperaturen nur schematisch zu nehmen ist, weil wohl

---

[1]) Auch „thermodynamische Skale“ genannt.

[2]) Die Einheit der Temperaturstufe (°C) bleibt demnach als willkürliche Einheit bestehen (vgl. 5).

der Druck, niemals aber das Volum des Gases Null werden kann, da immer noch das Eigenvolum der Moleküle übrig bleiben muß (M 359). Von a bis b, vom Eis- bis zum Siedepunkt, hat man 100 gleich große Volumgrade, die dann nach steigenden, sowie sinkenden Temperaturen in gleicher Größe weiter aufgetragen sind. Damit kommt man nach aufwärts zu beliebig hohen Temperaturen, nach abwärts aber nur bis -273^0. Dort hat das Volum (in Wirklichkeit der Druck) ein Ende und damit auch die Temperatur; -273^0 ist der absolute Nullpunkt. Diese Skale ist mit t bezeichnet. Behält man dieselben Grade bei, zählt sie aber vom absoluten Nullpunkt aus und somit stets nur nach steigenden Temperaturen, so erhält man die absolute Skale, deren Grade mit T bezeichnet sind.

Die Angaben absoluter Temperatur T und gewöhnlicher Temperatur t sind somit stets durch die Gleichung verbunden

$$T = t + 273 \ . \qquad 37)$$

Die Grade der gewöhnlichen Temperatur werden unterschiedshalber mit ^{0}C, die der absoluten Temperatur mit ^{0}abs. bezeichnet.

Die Benutzung der absoluten Temperaturskale statt der gewöhnlichen erleichtert und vereinfacht alle aufs Wesentliche gehenden Überlegungen und zugehörigen Rechnungen über Wärme, wie es bei der naturgemäßen Wahl dieser Skale nur zu erwarten ist. Schon das Folgende (38) zeigt ein Beispiel hiervon.

38. Zustandsgleichung verdünnter Gase. — Der Zustand einer gegebenen Gasmenge ist durch die drei Größen: Druck p, Volum V und Temperatur T festgelegt. Diese drei Größen hängen durch die „Zustandsgleichung" zusammen; sind zwei davon gegeben, so ist die dritte stets berechenbar.

Der Zusammenhang zwischen Druck p und Volum V ist bereits durch das Gesetz von Boyle und Mariotte festgelegt (M Gl. 357):

$$pV = \text{Konst.}$$

Die Unveränderlichkeit der Konstanten setzt hierbei Unveränderlichkeit der Gasmenge und der Temperatur voraus.

Ist dagegen die Temperatur T veränderlich, so tritt der im Vorhergehenden begründete Zusammenhang zwischen Druck p und Temperatur T in Geltung, wonach bei unverändertem Volum V — und unveränderter Gasmenge — p und T einander proportional sind, was auch als Gesetz von Gay-Lussac und Dalton bezeichnet wird. Es sind danach auch pV und T einander proportional solange die Gasmenge unverändert ist:

$$pV = R \cdot T \ , \qquad 38)$$

wobei R eine Konstante ist, die nur mehr Unveränderlichkeit der Gasmenge voraussetzt.

Diese Konstante R kann in jedem Falle bei gegebener Gasmenge nach der Gleichung $R = p_1 V_1 / T_1$ berechnet werden, wo p_1, V_1 und T_1 zu beliebigem Zustand der Gasmenge gehörige Angaben sind. Ist die Gasmenge 1 gr, so ist $1/V_1$ die Dichte[1]) des Gases beim Druck p_1 und der Temperatur T_1.

Gleichung 38 ist die Zustandsgleichung der genügend verdünnten

[1]) Die Dichte ist nach Avogadros Satz proportional dem Molekulargewicht des Gases (82); nimmt man als Gasmenge so viele Gramm an, als das Molekulargewicht angibt, so wird daher R für alle Gase gleich groß. R für 1 gr des Gases ist auch gegeben durch $c_p - c_v$ (siehe Anhang W II, 2).

Gase. Sie ist, wie gezeigt, eine Vereinigung der Gesetze von Boyle und Mariotte und von Gay-Lussac und Dalton.

39. Erweiterte Zustandsgleichung. — Das Gültigkeitsbereich der Zustandsgleichung 38 ist durch den Zusatz „genügend verdünnt" gegeben. Dichte Gase, die der Verflüssigung nicht fern sind, zeigen die Abweichungen, welche wir schon bei Betrachtung von Boyles und Mariottes Gesetz gefunden hatten (M 359): Es tritt dann, mit erweitertem Giltigkeitsbereich und nur wenig eingeschränkter Genauigkeit, an Stelle von pV van der Waals' Zusammenhang (M 360), so daß wird:

$$(V - b)\,(p + \frac{a}{V^2}) = RT. \qquad 39)$$

Wir kommen auf diese erweiterte Zustandsgleichung zurück, wenn wir die in Dämpfe übergehenden, dichten Gase betrachten (213). Für alle anderen, gewöhnlichen Fälle genügt die einfache Zustandsgleichung 38.

40. Reduktion von Gasvolumen auf Normalzustand. — Ist ein Gasvolum bei beliebigem, zufälligem Druck p und beliebiger, eben vorhandener Temperatur T gemessen, so hat die Angabe dieses Volums nur mit zusätzlicher Angabe von p und T brauchbare Bedeutung. Einfache Angaben von unmittelbarer, vergleichbarer Bedeutung erhält man, wenn man die Volume auf diejenige Größe V_0 umrechnet, welche sie in einem allgemein angenommenen Normalzustand annehmen würden, nämlich beim Drucke p_0 von 760 mm Quecksilber und im schmelzenden Eise, bei $t_0 = 0^0$, $T_0 = 273^0$. Es gilt dann zur Berechnung von V_0 nach Gl. 38 die Gleichung

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}. \qquad 40)$$

R hat hier in den zwei Gleichungen für die 2 Zustände p, V, T und p_0, V_0, T_0 denselben Wert, weil die Gasmenge die gleiche ist, und ist daher fortgefallen. Es ist dies eine Erweiterung der nur den Druck allein betreffenden Volumumrechnung, welche wir schon früher betrachtet hatten (M 358).



Abb. 56. Kerzenflamme (Schlierenbild), Wärmeausbreitung in der Luft durch Strömung.

41. Bewegungserscheinungen in Gasen durch Wärme. — Wie in Flüssigkeiten (25), so entstehen auch in Gasen bei Temperaturungleichheit Unterschiede im spezifischen Gewicht infolge der Wärmeausdehnung, und diese geben nach Archimedes' Satz Auftriebe (M 354). Wärmere Luft steigt in kälterer auf. Dies ist eine alte Erfahrung; auf ihr beruhten auch die ersten Luftballone (1782). Jede Flamme zeigt das Aufsteigen; sie strebt nach oben. Feuerungen erhalten in dieser Weise selbsttätige Abfuhr der Verbrennungsgase nach oben und damit auch Zufuhr neuer Luft von unten her. Schornsteine erhöhen diese Wirkung, weil sie höhere Säulen heißer Gase zur Ausbildung kommen lassen. Abb. 56 zeigt das Schlierenbild (O 73) einer Kerzenflamme. Die Flamme selbst, die im Bild nicht sichtbar wird, ist punktiert angedeutet; das Schlierenbild richtet sich nicht nach dem Leuchten oder Nichtleuchten der heißen Gase und ihrer Beimischungen, sondern nach der Temperatur, welche den optischen Brechungsexponenten beeinflußt; man sieht daher den ganzen aufsteigenden Gasstrom, welcher zur Flamme gehört und der oben in Wirbel sich auflöst.

Wegen der geringen Reibung in der Luft steigt auch schon mäßig erwärmte Luft mit ziemlicher Geschwindigkeit auf. Dies vermittelt die Verteilung der Wärme in der Zimmerluft bei Heizung mit Öfen oder anderen Heizkörpern: Die von denselben erwärmte Luft steigt auf und macht dadurch stets neuer, zu erwärmender Luft Platz. Befindet sich der Ofen gegenüber der Fensterseite, an welcher die kältere Luft absteigt, so entwickelt sich — ähnlich wie in Abb. 50 oder 51 in Flüssigkeit — dauerndes Kreisen der Luft im Zimmer. Die wärmste Luft gelangt dabei an die Decke, die kälteste findet sich am Fußboden, was nicht ganz erwünscht ist. Befinden sich die Heizkörper unterhalb der Fenster, so

ist es viel besser: es mischt sich dann die aufsteigende geheizte Luft mit der absteigenden kalten, was zu gleichmäßigerer Erwärmung der Zimmerluft führt.

Auch für die Lüftung von Wohnräumen sind die meist zwischen Innen und Außen vorhandenen Temperaturunterschiede wirksam. Im Winter sind diese Temperaturunterschiede groß; es stürzt bei geöffnetem Fenster die spezifisch schwerere kalte Außenluft unten herein, wie Wasser, und oben entweicht die leichte warme Luft. Es genügen in dieser Weise im Winter schon die Undichtheiten der Fenster zu genügender Lüftung; im Sommer dagegen, wenn Temperaturunterschiede zwischen Innen und Außen fehlen, ist diese selbsttätige Lüftung ausgeschaltet; es bleibt dann bei Windstille nur die sehr langsame Diffusion (M 365) durchs offene Fenster zur Erneuerung der Luft übrig.

Auch in der freien Atmosphäre der Erde veranlassen die Temperaturungleichheiten Luftbewegungen: die Winde. Das Hauptwindsystem der Erde ist gleich dem für das Meer zu erwartenden, in Abb. 52 schon betrachteten Strömungssystem; denn auch die Luft wird am Äquator erwärmt und an den Polen gekühlt. Während aber das Meer durch die Sonnenstrahlung von oben, d. i. für Strömung ungünstig erwärmt wird (vgl. 27), findet die Erwärmung der Luft von unten, vom bestrahlten Erdboden her statt (162), was für Strömungsentwickelung günstig ist. Es entwickelt sich daher ein Hauptwindsystem im Sinne der Abb. 52. Am Äquator steigt die Luft ständig auf, um dann oben polwärts abzuströmen, während unten von den Polen her die Luft nachströmt. Da wir am Boden des Luftmeeres leben, sind diese unteren Strömungen besonders merklich; sie heißen „Passate". Sie wehen relativ zur Erdoberfläche nicht genau von Norden bzw. Süden her, sondern von Nordost und Südost, weil die von den Polen kommende Luft ihrer Trägheit wegen gegen die nach dem Äquator zu steigende West-Ost-Geschwindigkeit der Oberfläche der in Drehung befindlichen Erde zurückbleibt. Die Gebirgsformen der Festländer bringen außerdem noch viel örtliche Ablenkungen hervor.

Über dieses Hauptwindsystem der Passate gelagert gibt es Nebenwindsysteme als Folge der ungleichen Erwärmung von Land und Meer (vgl. 54), außerdem ständig wechselnde „lokale" Winde, herrührend von den mit der Bewölkung und dem Sonnenstand wechselnden Erwärmungen einzelner Oberflächenteile der Erde. Diese Winde erreichen sogar zeitweilig sehr viel größere Stärke als die Passate.

42. In den Winden der Atmosphäre, ebenso wie in den Luftströmungen des geheizten Zimmers erkennt man eine sehr wirksame selbsttätige Verbreitungsweise der Wärme in Gasmassen, eine Verbreitung durch Strömung (Mitführung), ganz wie in Flüssigkeiten (vgl. 26, 135).

43. Auch erkennt man in diesen Strömungsvorgängen — wieder wie bei den Flüssigkeiten (25) — wärmegetriebene Motoren, deren Arbeit in den Windmühlen auch früh schon ausgenutzt worden ist. Wieder aber sieht man auch hierbei, wie bei den vorher schon betrachteten Bewegungsvorgängen (15, 25), daß die Wärme nur bei Vorhandensein von Temperaturunterschieden und verbunden mit Übergang von Wärme vom heißeren zum kälteren Körper Arbeit liefern kann.

Die treibende Wärme aller Luftbewegung in der Atmosphäre, vom leisesten Wind bis zum heftigsten Sturm, kommt von der Sonne in Gestalt ihrer Strahlung (161).

Hilfsmittel zur wohlgegründeten Temperaturmessung.

44. Grundmeßinstrument für Temperaturen ist nach der erweiterten Einsicht (33) das Gasthermometer (36). Messungen mit demselben sind

allerdings umständlich; auch muß die zu messende Temperatur gleichmäßig auf das ganze nicht kleine Thermometergefäß sich erstrecken. Deshalb bleiben die Quecksilberthermometer unvermindert in Gebrauch; nur müssen dieselben ebenso wie auch alle anderen, noch zu erwähnenden Hilfsmittel der Temperaturmessung an das Gasthermometer „angeschlossen“ sein, um einwandfreie Angaben zu liefern. Zum Anschluß — zur „Eichung“ — wird der temperaturempfindliche Teil des betreffenden Instruments mit dem Gefäß des Gasthermometers in einen auf gleichmäßiger, stufenweise zu verändernder Temperatur gehaltenen Raum gebracht, um die Angaben des Instruments mit denen des Gasthermometers zu vergleichen, wonach eine Korrektionstabelle für ersteres herzustellen ist. Nur für 0°C und 100°C ist Eichung mit schmelzendem Eis und siedendem Wasser ohne Gasthermometer möglich, da dieses auf eben dieselben beiden Fixpunkte sich bezieht.

Beim Quecksilberthermometer und den anderen Flüssigkeitsthermometern sind durch solche Eichung die Kaliberfehler (7) schon mitberücksichtigt. Daß beim Quecksilberthermometer die Abweichungen zwischen 0°C und 100°C nur sehr klein sind (je nach der Glassorte), wurde schon bemerkt (24). Für tiefste und höchste Temperaturen werden die Abweichungen stets sehr groß; man verfertigt daher auch Flüssigkeitsthermometer mit ungleich großen Graden, um kleinere Korrektionen zu erhalten.

Die wichtigen elektrischen Temperaturmeßmittel, Widerstandsthermometer und Thermoelemente behandeln wir in der Elektrizitätslehre (E 169 und 226).

Temperaturmessung kann sehr erschwert sein, wenn fremde Wärmestrahlung nicht genügend vom Thermometer abzuhalten ist. (Vgl. Fußnote zu Anh. W II 4).

45. Messung tiefster und höchster Temperaturen. — Bei tiefsten Temperaturen kommt es darauf an, das Gas im Meßgefäß des Gasthermometers immer genügend verdünnt und entfernt von beginnender Verflüssigung zu haben, weil andernfalls Druck und absolute Temperatur nicht genau einander proportional sind (39). Dies ist durch Verwendung genügend niedriger Drucke erreichbar, wobei aber die Messungen schwierig werden[1]). Außerdem muß dann an Stelle der Luft im Gefäß des Gasthermometers Wasserstoff treten und für allertiefste Temperaturen das noch schwerer flüssig werdende Helium. Mit dem Wasserstoffthermometer kann bis —210°C = 63°abs. gut gemessen werden, mit dem Heliumthermometer ist bis —271·5°C = 1·5°abs. gemessen. Noch näher dem absoluten Nullpunkt ist die Messung unsicher; es können da allerlei Besonderheiten zu Hilfe genommen werden, die bei so tiefen Temperaturen auftreten und zu deren Messung oder Schätzung verwertbar sind.

Die Mittel zur Herstellung tiefer Temperaturen behandeln wir später (198, 227, 242, 245). Je näher man schon dem absoluten Nullpunkt ist, desto größer werden die Schwierigkeiten noch tiefer zu kommen, weil das Zudringen von Wärme aus der Umgebung nicht ganz zu verhindern ist.

Hohe Temperaturen sind mit dem Luftthermometer ohne weiteres gut zu messen, solange die Gefäße standhalten. Glas wird bald weich, Quarzglas wird bei hohen Temperaturen für Wasserstoff und Helium durchlässig; mit einem Platin-Rhodium-Gefäß und Heliumfüllung ist bis 1600°C = 1873°abs. gemessen worden. Dies ist die höchste mit dem Gasthermometer, also überhaupt unmittelbar gesichert gemessene Temperatur.

Noch höhere Temperaturen, die in Schmelzöfen lange schon Anwendung

[1]) Es sind Korrektionstabellen nach besonders verfeinerten Messungen ausgearbeitet, welche es erlauben, die bei Benutzung höherer Gasdichten auftretenden Abweichungen zu berücksichtigen.

fanden, wären wohlgesicherter Messung entzogen, wenn nicht ein neuer, gerade für diese Temperaturen sehr geeigneter Weg gefunden worden wäre, der sehr gut gesicherten Anschluß an das Gasthermometer und alle sonstige Kenntnis hat: die Strahlungsmessung der Temperatur. Wir behandeln sie später (183); es sei nur bemerkt, daß mit ihrer Hilfe elektrische Widerstandsthermometer aus Platin bis zu 1764°C (Platinschmelzpunkt) geeicht werden und daß an Fixsternen Temperaturen bis zu 20000° meßbar wurden (vgl. Tab. 29).

Eine obere Grenze der Temperaturen gibt es nicht, insofern die kinetische Energie von Molekülen oder Atomen unbegrenzt groß werden kann; bei Lichtgeschwindigkeit würde sie unendlich groß werden, was allerdings unendlich großen Energieaufwand erforderte (E 481).

II. Messung von Wärmemengen (Kalorimetrie).

Grundlagen und Hilfsmittel.

46. Temperatur und Wärmemenge. — Führt man einem Körper Wärme zu, so steigt seine Temperatur. „Wärme" und „Temperatur" erscheinen so als Ursache und Wirkung miteinander verbunden. Um diese Verbindung quantitativ verfolgen zu können, muß Wärme ihrer Menge nach meßbar gemacht werden. Man kann dazu zunächst etwa an die Menge verbrauchten Brennstoffs als Maß gelieferter Wärmemenge denken, die einem Körper zugeführt werden kann.

Vor allem ist hierbei scharfe Sonderung der beiden Begriffe „Wärme" und „Temperatur" erforderlich, deren Namen bei schlechtem Sprachgebrauch verschwimmend und verwechselt gefunden werden. Daß Wärmemenge und Temperatur zweierlei sind, wird unmittelbar klar, wenn man an die Erwärmung verschiedener Mengen desselben Stoffes denkt. Es ist unzweifelhaft, daß 10 kgr Eisen 10-mal so viel Wärme, z. B. Brennstoff, brauchen als 1 kgr Eisen, um von 0°C auf 100°C erwärmt zu werden. Die Temperaturen sind hier in beiden Fällen gleich, die Wärmemengen aber ungleich.

Die Wärme erscheint bei solchen Überlegungen wie ein Stoff, der in dem erwärmten Körper enthalten ist, der ihm aus einer Wärmequelle zugeführt wurde und der ihn bei Abkühlung wieder verläßt, ohne bei solchen Übergängen seine Menge zu ändern, und diese Vorstellung genügt auch den kalorimetrischen Messungen (49—59), weshalb wir hier nicht über sie hinauszugehen brauchen (vgl. 77); erst die Untersuchung der spezifischen Wärme der Gase hat Weiteres gezeigt (60 u. f.).

Es ist so jedem beliebigen Körper sowohl eine bestimmte Temperatur eigen als auch ein bestimmter Wärmeinhalt. Der ganze Wärmeinhalt ist allerdings nicht genau ermittelbar, da die Abkühlung ganz bis zum absoluten Nullpunkt nicht ausführbar ist (45); wohl aber sind sehr feine Messungen von Wärmeinhalten über beliebigen erreichbaren Anfangstemperaturen — z. B. über 0°C — ausgeführt, wozu alsbald die Wege anzugeben sind.

47. Spezifische Wärme (Wärmekapazität). — Bei verschiedenen Mengen desselben Stoffes, die gleiche Temperatur haben, wie im eben betrachteten Falle des Eisens, ist der Wärmeinhalt ohne Zweifel der Stoffmenge proportional. Eine besondere Frage ist es aber, welches der Wärmeinhalt verschiedenartiger Stoffe von gleicher Temperatur sei. Enthalten gleiche Gewichte aller Stoffe gleichviel Wärme, wenn sie gleiche Temperaturen haben, oder sind hier besondere, von der Natur des Stoffes abhängige Unterschiede vorhanden? Die Frage könnte auch lauten: Benötigt man zu gleicher Erhitzung gleicher Mengen verschiedener Stoffe gleichviel Wärme oder verschiedene Wärmemengen? Die Beantwortung war nur aus neuer Erfahrung möglich, die in besonderen Versuchen

erst gewonnen werden mußte. Solche Versuche, die zum ersten Male neben der Temperatur auch die Wärmemenge beachteten, haben die Kalorimetrie begründet (J. Black, 1760).

Ein einfacher und schon sehr aufschlußreicher Versuch ist folgender: Zwei gleiche Eisenstücke E_1, E_2 (Abb. 57) werden gemeinsam in siedendem Wasser auf 100°C gehalten, dann schnell herausgenommen und E_1 in das Quecksilber Q, E_2 in das Wasser W getaucht, die beide in ihren Gläsern vorher gemeinsame Zimmertemperatur angenommen hatten. Bewegt man die Eisenstücke an ihren Stielen in den beiden Flüssigkeiten herum, so findet schneller Temperaturausgleich statt, wobei man die beiden Thermometer steigen sieht. Da die beiden Eisenstücke gleiche Wärmemengen mitbrachten, die hier gleichen Volumen Quecksilber und Wasser mitgeteilt werden, kommt die Frage zur Beantwortung, ob diese gleichen Wärmemengen in den gleichen Volumen der zwei verschiedenen Stoffe gleiche oder ungleiche Temperaturerhöhungen bewirken werden? Die Antwort fällt in letzterem Sinne aus; die anfänglich gleich stehenden Thermometer zeigen ungleiche Erwärmungen an. Steigt die Temperatur im Wasser um 3°, so steigt sie im Quecksilber um nahe das Doppelte, 6°.

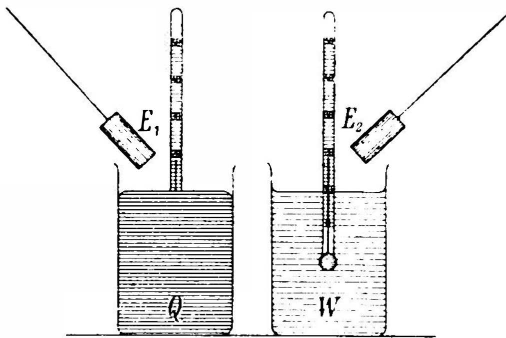


Abb. 57. Mischkalorimeter-Versuch.

Daraus schließt man, daß Quecksilber zu bestimmter Temperatursteigerung viel weniger Wärme braucht als Wasser. Man sagt auch: Quecksilber habe ein kleineres Fassungsvermögen für Wärme, eine kleinere „Wärmekapazität“ als Wasser, Quecksilber wird mit wenig Wärme schon deren voll — heiß —; Wasser schluckt viel Wärme ohne viel heißer zu werden. Für Wärmekapazität wird auch der Name „spezifische Wärme“ gebraucht.

Jeder Stoff hat seine besondere Wärmekapazität; man bezieht dieselbe stets auf gleiche Gewichtsmengen der Stoffe. Die Ungleichheit zwischen Wasser und Quecksilber kommt dann bei dem großen spezifischen Gewicht 13·6 des letzteren noch 13·6-mal so stark zum Vorschein als bei dem mit gleichen Volumen ausgeführten Versuche, und es ist demnach das Verhältnis der spezifischen Wärmen von Quecksilber und Wasser rund wie 1:27 oder 0·03:1.

Als Definition der spezifischen Wärme (Wärmekapazität) eines Stoffes gilt dieser Überlegung entsprechend: Diejenige Wärmemenge, welche nötig ist, um die Temperatur der Gewichtseinheit (kgr) des Stoffes um 1° zu steigern. Die Berechnung einer spezifischen Wärme muß demnach immer als Quotient aus Wärmemenge im Zähler und zugehöriger Temperatursteigerung und Gewichtsmenge[1]) im Nenner erfolgen.

Der zu einer bestimmten Temperaturstufe gehörige Wärmeinhalt eines

[1]) Die gewählte einfache Bemessung der Stoffmengen nach Gewicht ist so gut wie nach Masse, weil Gewichte stets mit Gewichtsfätzen auf der Waage und daher für jeden Erdort gültig gemessen werden (M 191, 124).

Körpers ist demnach gegeben durch das Produkt dreier Faktoren: Gewicht des Körpers, spezifische Wärme seines Stoffes und Temperaturstufe. Dies ist auch die Wärmemenge, welche zur Steigerung der Temperatur des Körpers um die betreffende Stufe benötigt wird oder welche ihm entzogen werden muß, um seine Temperatur um diese Stufe zu senken.

48. Wärmeeinheit (Kalorie). — Es ist nun vor allem die Festsetzung einer bestimmten Einheitsmenge der Wärme nötig. Man hat die allgemein gebräuchlich gewordene Einheit nicht nach dem Ursprung der Wärme gewählt — wie etwa durch Festsetzung einer bestimmten Brennstoffmenge —, sondern nach der Wirkung der Wärme: Wärmeeinheit — „Kalorie" genannt und mit Kal bezeichnet — ist diejenige Wärmemenge, welche 1 kgr Wasser um 1° wärmer macht[1]). Es ist dies eine willkürliche Einheit; sie geht nicht auf die Grundeinheiten von Raum, Zeit und Masse und auf Naturgesetze zurück (M 12). Willkürlich ist die Wahl des Wassers, und ebenso schon die Temperatureinheit, der Grad (5); doch ist die Einheit in der Anwendung sehr naheliegend und zweckmäßig[2]).

Eine besondere Frage ist es, ob die Höhenlage der Temperaturstufe von 1° bei der Kalorie besonders angegeben werden muß; ob z. B. Erwärmung des Wasserkilogramms von 0° auf 1°, von 50° auf 51° oder 99° auf 100° verschiedene oder gleiche Wärmemengen erfordert. Die Frage kann nur durch besondere Messungen beantwortet werden, die ausgeführt sind. Im Grundgedanken sind dieselben sehr einfach: Man mische beispielsweise 3 kgr Wasser von 0° mit 1 kgr Wasser von 4°; dann sind im Gemisch die 4 Kalorien, welche das Wasser von 4° über dem Zustand von 0° enthalten hat, verteilt auf alle 4 kgr Wasser. Waren es 4 gleiche Kalorien, von der Größe wie sie zur Erwärmung von 0° auf 1° erforderlich sind, so wird die Endtemperatur des Gemisches 1° sein; sind aber von 1° bis 4° etwa größere Kalorien im Wasser als von 0° bis 1°, so muß die Temperatur des Gemisches höher als 1° ausfallen, sind es kleinere, so muß sie tiefer ausfallen. Solche Abweichungen werden aber nicht merklich, ausgenommen bei höchst verfeinerten Messungen im Eiskalorimeter (52) oder nach der elektrischen Methode (53). Tab. 20 gibt die Wärmeverbrauche für je 1° nach solchen Messungen in den verschiedenen Temperaturhöhen von 0° bis 100° an. Man sieht aus den Zahlen unter C, daß in der Gegend von 30° der Wärmeverbrauch am kleinsten, gegen 0° und gegen 100° größer ist, daß aber die Unterschiede sehr klein sind[3]). Es ist daher überflüssig, für die Kalorie eine besondere Temperaturlage

Tab. 20. **Spezifische Wärmen C des Wassers in Bunsenschen (mittleren) Kalorien**

Temp.	C	Temp.	C
0°	1·0075	60°	0·9995
10°	1·0008 03	70°	1·0012
20°	0·9974 80	80°	1·0032
30°	0·9971 69	90°	1·0057
40°	0·9974 71	100°	1·0086
50°	0·9983 86		

[1]) Wir benutzen in der Wärmelehre nur diese Einheit, auch „Kilogramm-Kalorie" genannt. Eine 1000mal kleinere Einheit wird zum Unterschied „Gramm-Kalorie" genannt.

[2]) Als absolute Einheit der Wärmemenge ist durch das Energiegesetz die Energieeinheit gegeben (M 192).

[3]) Die unter C stehende Haupt-Zahlenreihe der Tabelle ist mit dem Eiskalorimeter (52) gemessen, die rechts herausgerückten Zahlen geben die beiden letzten Dezimalstellen nach den Ergebnissen der elektrischen Methode (53) an; sie sind ein wenig verschieden von denen des Eiskalorimeters (z. B. 03 statt 08). Einheit ist in der Tabelle eine mittlere Kalorie, deren von 0° bis 100° genau 100 im Wasserkilogramm sind.

anzugeben, wenn nicht gerade Messungen von selten ausgeführter Feinheit in Betracht kommen.

Als Einheit der spezifischen Wärme ergibt sich nach deren Definition (47) mit der Kalorie als Wärmeeinheit Kal/kgr°C. Die spezifische Wärme des Wassers ist, der Wahl der Kalorie entsprechend, 1 Kal/kgr°C.

49. Mischkalorimeter (Wasserkalorimeter). — Am unmittelbarsten mißt man Wärmemengen in Kalorien, wenn man sie in gewogenes Wasser von gemessener Temperatur überführt; das Produkt aus Wassergewicht und eintretender Temperatursteigerung gibt die Wärmemenge in Kalorien.

Zur Ausführung dient das Mischkalorimeter (Abb. 58), in der Hauptsache ein leichtes Gefäß G G, welches das Wasser, ein Thermometer und den (aus Drahtnetz bestehenden) Rührer R enthält und möglichst vor Wärmeaustausch mit der Umgebung geschützt ist. Zu letzterem Zweck dient im einfachsten Fall ein Mantel M M, der das Gefäß mit einem abgesperrten Luftzwischenraum umschließt (148).

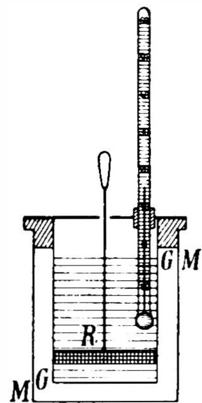


Abb. 58. Mischkalorimeter.

Soll mittels des Mischkalorimeters eine spezifische Wärme C gemessen werden, so erhitzt man eine gewogene Menge P des betreffenden Stoffes auf t_1^0, wirft sie schnell durch eine Klappe im Deckel des Kalorimeters in dessen Wasser, das t^0 hatte, bewegt den Rührer, um den Wärmeausgleich zu befördern, und liest die Endtemperatur τ^0 des Wassers ab. Es gilt dann die Gleichung

$$P \cdot C \cdot (t_1 - \tau) = W' \cdot (\tau - t). \qquad 49)$$

Links steht die vom eingebrachten Körper abgegebene Wärmemenge, berechnet aus ihren 3 Faktoren (47), rechts die vom Kalorimeter aufgenommene Wärmemenge (50), und beide sind — verlustfreiem Übergang der Wärme entsprechend (46) — einander gleich gesetzt[1]). Aus der Gleichung ist die spezifische Wärme C zu berechnen.

50. Wasserwert. — Die rechts in der Gl. 49 stehende Größe W′ müßte das Gewicht des Wassers im Kalorimeter sein, wenn nicht außer dem Wasser noch andere Körper die Temperaturstufe $\tau - t$ miterhalten hätten, nämlich das Thermometer, der Rührer und das Kalorimetergefäß G G. Um dies zu berücksichtigen, wird das Wassergewicht W erhöht um den „kalorimetrischen Wasserwert" oder kurz „Wasserwert" w der miterwärmten Körper, so daß $W' = W + w$.

Der Wasserwert eines Körpers bedeutet dabei die Wärmemenge, welche zur Erwärmung des Körpers um 1° erforderlich ist. Ist der Körper einheitlich, so ist sein Wasserwert das Produkt aus Gewicht und spezifischer Wärme des Stoffes, aus welchem er besteht; der dritte Faktor für die Wärmemenge (47), die Temperaturstufe, ist beim Wasserwert 1. Bei uneinheitlichen Körpern, wie im Falle des Kalorimeters, ist der Wasserwert w die Summe der Einzelwasserwerte. W′ ist dann der Gesamtwasserwert des wassergefüllten Kalorimeters. Damit die etwas unsichere Ermittelung von w die Genauigkeit der Kalorimetermessung nicht verdirbt, muß w sehr klein gegen W sein, was um so besser zutrifft, je größer das Kalorimeter ist.

51. Schmelzen, Versieden, Verflüssigen als kalorimetrische Hilfsmittel. —

Bringt man einen auf t^0 erwärmten Körper vom Gewicht P und der spe-

[1]) Dies gilt beim Fehlen von Wärmeaustausch des Kalorimeters mit der Umgebung. Da solcher nicht gänzlich zu vermeiden ist, wird er besonders beobachtet und danach die Endtemperatur korrigiert. τ in der Gl. 49 ist die bereits auf Fehlen von Wärmeaustausch korrigierte Endtemperatur.

zifischen Wärme C auf Eis, so schmilzt er solange Eis, bis seine Temperatur 0° geworden ist; die Menge des Schmelzwassers ist dann ein Maß für die vom Körper an das Eis abgegebene Wärmemenge P·C·t (47). Man kann an Stelle von Eis auch andere Stoffe benutzen, z. B. Wachs. Eine ungefähre Veranschaulichung gibt Abb. 59. Vier gleich große Kugeln verschiedenen Stoffes (Fe, Cu, Pb, Bi), durch Ausbohrungen auf gleiches Gewicht gebracht, sind gemeinsam genügend hoch über Wachsschmelztemperatur erhitzt und dann auf die hohl liegende Wachstafel W W gesetzt; sie schmelzen solange Wachs als ihr Wärmeinhalt dazu reicht. Man sieht am abgebildeten Endzustand, daß Fe und Cu die ganze Wachsdicke durchgeschmolzen haben, Pb und Bi aber oben liegen geblieben sind. Daraus folgt, daß Fe und Cu wesentlich größere spezifische Wärmen haben als Pb und Bi.

Abb. 59. Schmelzkalorimeter-Versuch.

Ebenso kann auch die Verdampfung einer Flüssigkeit zur Messung von Wärmeinhalten dienen. Beispielsweise kann man gewogene Körper von Zimmertemperatur in flüssige Luft tauchen und die versottenen Luftmengen auffangen; sie sind proportional den Wärmeinhalten der Körper. In dieser Weise sind spezifische Wärmen bis zur tiefen Temperatur der siedenden Luft (—190°C) gemessen.

Auch der umgekehrte Vorgang, die Verdichtung von Dampf zu Flüssigkeit, kann benutzt werden. In Abb. 60 wird in dem Becherglas B B Wasserdampf durch beständiges Kochen von Wasser entwickelt, so daß der Dampfüberschuß oben unter dem Deckel entweicht. Zwei an Fäden hängende Kugeln A und Q von Zimmertemperatur werden dann bei kurzem Öffnen des Deckels eingebracht, um die Verdichtung des Dampfes an ihnen zu beobachten[1]). Die Kugeln sind in gut benetzendes dünnes Gewebe gehüllt, so daß das verdichtete Wasser an ihnen regelmäßig abtropft und seine Menge durch Zählung der Tropfen bemessen werden kann. Diese Wassermenge ist dem Wärmeinhalt der Kugeln von Zimmertemperatur bis 100° proportional; denn die Kugeln verdichten nur in dem Maße Wasser, als sie dem Dampf Wärme entziehen; haben sie die Temperatur des Dampfes, 100°C, angenommen, so hört die Verdichtung auf. In der Abbildung ist A eine Vollkugel aus Aluminium, Q eine sehr dünnwandige Glaskugel mit Quecksilber, das ebensoviel wiegt wie die Aluminiumkugel. Man zählt in diesem Falle von Q nur einen Tropfen, von A aber 6 Tropfen. Daraus folgt, daß die spezifische Wärme des Aluminiums rund 6-mal so groß ist als die des Quecksilbers.

Alle diese messenden Versuchsweisen sind in großer Verfeinerung durchgeführt worden; sie haben neben teils sehr frühen Ergebnissen über spezifische Wärmen auch die Überzeugung geliefert, daß bei den Aggregatzustandsänderungen — beim Schmelzen, Verdampfen, Verflüssigen — jeweils bestimmte Wärmemengen verbraucht bzw. gewonnen werden.

[1]) Der Blechzylinder Z Z mit Ausschnitt und der Glasmantel M M vermindern die unnötige Dampfverflüssigung an den Wänden des Becherglases.

52. Eiskalorimeter. — Zu größter Feinheit ist die Eisschmelzmethode gebracht worden in einer Anordnung, die zum ersten Male Wärmemengen mit derselben großen Genauigkeit zu ermitteln erlaubte, mit der Wägungen ausgeführt werden können, und zwar, im Gegensatz zum Mischkalorimeter, auch mit sehr kleinen Stoffmengen und ohne alle Wärmeverlustkorrektionen (Bunsen 1870).

Dieses „Eiskalorimeter" (Abb. 61) besteht aus einem Glasrohr R von der Form und ungefähren Größe eines Probierrohres, um welches bei m m ein Glasmantel geschmolzen ist, der unten in das umgebogene Rohr r r und zuletzt in ein Kapillarrohr k mündet, das offen endet. In dem Mantel ist unten Quecksilber Q, das bis ins Kapillarrohr reicht, darüber Wasser W; Luft muß durch Auskochen ganz entfernt sein. Bringt man in das Rohr R eine genügend gekühlte Flüssigkeit, so bildet sich um dasselbe ein Eismantel E aus dem Wasser W. Danach kommt in R nur etwas Wasser w und oben ein Wattepfropfen, um das Eindringen warmer Luft zu verhindern. Das Ganze wird außen von Eis umgeben, so daß nur die Kapillare k und das obere Ende des Rohres R herausragt, wodurch alles, w, E, W samt Q, 0°C annimmt und der Eismantel E vor Schmelzung bewahrt wird. Damit ist das Kalorimeter zu Messungen vorbereitet. Das Quecksilber behält jetzt einen festen Stand q im Kapillarrohr.

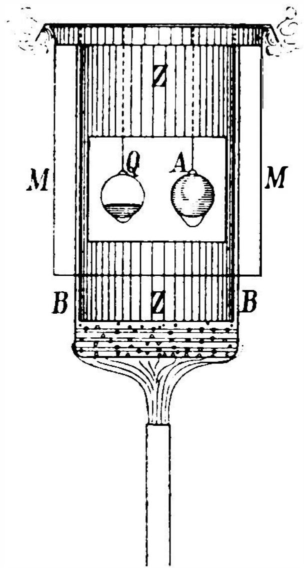


Abb. 60. Dampfkalorimeter-Versuch.

Die zu messende Wärmemenge wird dann, etwa als Wärmeinhalt eines gewogenen Körpers von gemessener Temperatur, in das Rohr R eingebracht. Der Körper versinkt dabei unter das Wasser w, kann es aber nicht über 4° C erwärmen, weil seine Wärme sogleich zum Schmelzen eines Teiles des Eismantels E verbraucht wird. Dadurch ist jeder Wärmeverlust an die Umgebung vermieden; denn das erwärmte Wasser im Rohr ist schwerer (23), bleibt daher unten und kann somit seine Wärme nur an den Eismantel abgeben, wobei es wieder auf 0° kommt. Die Menge des in dieser Weise durch die zu messende Wärmemenge geschmolzenen Eises wird durch die mit dem Eisschmelzen stets verbundene Volumänderung (199) gemessen. Das Volum des Schmelzwassers ist kleiner als das des Eises; es erfolgt daher eine Zusammenziehung, die am Rückgang des Quecksilberfadenendes q in der Kapillare meßbar wird. Die Verschiebung von q ist das Maß der in das Kalorimeter gebrachten Wärmemenge. Man kann statt der Kapillare auch ein Wägegläschen anbringen, aus dem das Quecksilber eingesogen wird; die Wärmemengen werden dann in großer Verfeinerung als Gewichtsverluste des Wägegläschens ermittelt. Die Eichung in Kalorien erfolgt durch Einbringen gewogenen warmen Wassers in gesondert zu vermessender Glashülle[1]). Auch Wärmequellen können ins Eiskalorimeter verlegt werden, um ihre Ergiebigkeit zu ermitteln; so ist z. B. die Verbrennungswärme von Wasserstoff in Sauerstoff mit besonderer Feinheit gemessen worden (Tab. 25).

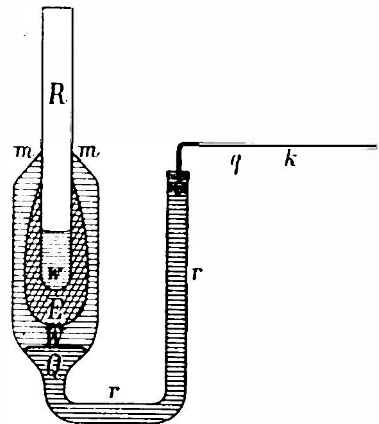


Abb. 61. Eiskalorimeter.

53. Elektrische Meßweise. — Seit feine Messungen elektrischer Ströme und Widerstände leicht geworden sind, dient elektrische Wärmeentwickelung (E 212) vorteilhaft zu Messungen spezifischer Wärmen. Besonders einfach ist das Verfahren für Flüssigkeiten und Gase. Ein elektrischer Heizkörper befindet sich im Inneren der gewogenen Flüssigkeitsmenge; die zugeführten

---

[1]) Solche Eichungen haben ergeben, daß 15·44 gr eingesogenes Quecksilber 1 Kal entsprechen.

Kalorien sind aus Widerstand des Drahtes, Stromstärke und Zeit bekannt, und die Temperaturerhöhungen werden beobachtet. Die Flüssigkeit muß dabei vor Wärmeaustausch mit der Umgebung geschützt sein, wie beim Mischkalorimeter. Die dabei unvermeidlichen Korrektionen (vgl. Note zu 49) verderben die Genauigkeit am wenigsten bei großen Stoffmengen.

Ergebnisse über spezifische Wärmen fester und flüssiger Körper.

Tab. 21 gibt eine Reihe charakteristischer Zahlen, zu welchen das Folgende zu bemerken ist (54—57).

Tab. 21. **Spezifische Wärmen fester und flüssiger Körper.**

	Spezifische Wärme	Atomgew.	Atomwärme
Wasser	1		
Li	0·941	7	6·6
Al	0·214	27	5·9
Fe	0·114	56	6·4
Cu	0·095	63	6·0
Sn	0·055	118	6·5
Pb	0·031	207	6·5
Bi	0·031	209	6·5
Hg (flüssig)	0·033	200	6·6
Marmor	0·21		
Quarz	0·191		
Eis	0·502		
Diamant 0^0	0·0947		
„ 50^0	0·144		
„ 100^0	0·191		
„ 200^0	0·279		

54. Das *Wasser* mit der spezifischen Wärme 1 Kal/kgr ^{0}C (48) überragt die anderen festen und flüssigen Stoffe und zwar meist sehr (vgl. 56). Wasser braucht mehr Wärme, um seine Temperatur zu erhöhen, als die anderen Stoffe; entsprechend viel Wärme kann es hergeben ohne viel Temperaturänderung. Wasser ist demnach das beste Abkühlungsmittel und auch das beste *Wärmespeicherungs-* und Wärmeübertragungsmittel.

Dies ist bei der starken Wasserbedeckung der Erde von großer *klimatischer Wichtigkeit*. Von der Heizung Nordwest-Europas durch den Golfstrom haben wir bereits berichtet (27); man sieht jetzt, daß diese Heizung durch die große spezifische Wärme des Wassers so besonders wirksam ist. Aber auch sonst auf der ganzen Erdoberfläche ist die Anwesenheit der großen Menge dieses Stoffes mit der abnorm hohen spezifischen Wärme von großem Einfluß auf die Temperaturverteilung. Das Wasser des Meeres mildert die Hitze des Sommers, sowie die Kälte des Winters, und diese Milderung überträgt sich durch die Winde auch auf

die Küstenländer. Dagegen zeigen die fern den Meeren gelegenen, ausgedehnten Binnenländer der mittleren Breiten den Einfluß der geringen spezifischen Wärmen der festen Gesteine (vgl. Marmor, Quarz in der Tabelle). Diese werden durch die zunehmende Sonnenstrahlung im Frühling viel schneller und höher erwärmt als das Wasser des Meeres, und sie kühlen im Herbst entsprechend schneller und tiefer ab. Daher die weitab von Meeren zu findenden großen Temperaturunterschiede von Sommer und Winter: das „Binnenland-Klima" oder „kontinentale Klima" im Gegensatz zum gemäßigten „Küstenklima" oder „maritimen Klima".

Unter den festen Körpern fällt im Vergleich zum Wasser das Eis auf mit fast nur der halben spezifischen Wärme des Wassers. Man sieht daraus, daß die spezifische Wärme nicht nur durch die vorhandenen Atome bestimmt ist, sondern sehr auch durch ihre Gruppierung in den Molekülen.

55. Atomwärme. — Sehr bemerkenswert sind auch die spezifischen Wärmen der Metalle und überhaupt der elementaren Stoffe. Bei denselben zeigt sich die spezifische Wärme (bei nicht zu tiefer Temperatur) angenähert verkehrt proportional dem Atomgewicht, so daß das Produkt aus Atomgewicht und spezifischer Wärme — „Atomwärme" genannt — bei vielen Elementen in festem Zustande nahezu die gleiche Größe hat (um 6·4, wie die Tabelle zeigt). Wir kommen auf diesen verständlich gewordenen Zusammenhang zurück (119).

56. Endlich ist die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur zu beachten. Im allgemeinen werden die spezifischen Wärmen bei tiefen Temperaturen sehr klein.

Ein besonders auffallendes Beispiel ist der Kohlenstoff in der Kristallform des Diamanten (Tab. 21 unten). Nach dem Atomgewicht 12 und der allgemeinen Atomwärme 6·4 (55) wäre als spezifische Wärme des Kohlenstoffs angenähert 6·4/12 = 0·53 zu erwarten; man sieht aber nach dem Verlauf von 0° bis 200°C (Tab. 21), daß eine spezifische Wärme von dieser Größe nur bei recht hohen Temperaturen zu erwarten wäre, und sie ist auch in der Nähe von 1000°C gefunden worden. Die meisten anderen Elemente zeigen so starkes Herabsinken der spezifischen Wärme erst bei sehr viel tieferen Temperaturen.

Beim Wasser (48, Tab. 20) fanden wir das Herabsinken in äußerst geringem Maße von 100°C bis zu 30°C. Daß dann von 30°C bis 0°C wieder Ansteigen erfolgt, ist eine der Absonderlichkeiten des Wassers, zu welchen auch das Dichtemaximum bei 4°C gehört. Wir haben diese Besonderheiten schon im Zusammenhang mit der Anwesenheit komplexer Moleküle im Wasser betrachtet (23). Das Zerfallen dieser Moleküle bei steigender Temperatur bedingt wohl auch überhaupt die besonders große spezifische Wärme des Wassers, da es ohne Zweifel unter Wärmeverbrauch stattfindet (121).

57. Spezifische Wärmen bei tiefsten Temperaturen. — Allgemein festgestellt ist das Herabsinken der spezifischen Wärmen fast zum Verschwinden gegen den absoluten Nullpunkt hin. Dieses Verhalten zeigt sich im Zusammenhang mit der quantenmäßigen Verwaltung der Energie durch die Atome (und Moleküle), die aus dem Studium der Strahlung heißer Körper ersichtlich wurde und auch in anderen Erscheinungen sich zeigt (181). In den festen Körpern stehen die Moleküle (Atome) einander so nahe, besonders bei tiefsten Temperaturen, daß jedes derselben durch die gegenseitigen Molekularkräfte an feste Gleichgewichtslagen gehalten wird (M 256), so daß die Wärmebewegung nur in Schwingungen

um diese Gleichgewichtslage besteht. Ist n die durch diese Kräfte und die Masse des Atoms bestimmte Schwingungszahl, so ist nach jener quantenmäßigen Energieverwaltung (182) zu denken, daß das Molekül bei diesem Schwingungsvorgang Energie nur in Beträgen von der Größe h·n mit der Umgebung austauscht, so daß es wohl mit ganzzahligen Vielfachen der Energie hn schwingen kann, aber nicht mit weniger als hn. (Die Konstante h s. unter 180.)

Bei gewöhnlichen oder höheren Temperaturen ist der Wärmeinhalt — d. i. Energieinhalt der Molekularbewegung (78) — eines Körpers, bestehend aus der Summe der Schwingungsenergien seiner Moleküle (Atome) (119, 120), ungefähr gleichmäßig über alle Moleküle verteilt, weil sie fortwährenden Energieaustausch miteinander haben — wie Gasmoleküle durch ihre Stöße —, was die Tatsache der Wärmeleitung zeigt, und weil auf jedes Molekül ein so großes Vielfaches von hn kommt, daß das Vorhandensein von Stufen hn des Austausches nicht merklich wird. Wenn aber die Temperatur des Körpers sehr niedrig wird, so kann es kommen, daß der gesamte Wärmeinhalt zu gering ist, um für jedes Molekül auch nur die kleinste Energiemenge hn zu geben, die es in der Schwingungsform aufzunehmen befähigt ist. In diesem Fall kann dann Gleichverteilung der Energie auch nicht angenähert mehr stattfinden, sondern es wird mit sinkender Temperatur eine zunehmende Zahl von Molekülen stillstehen und die gesamte Wärmeenergie auf eine zuletzt kleine Zahl von Molekülen je mit dem Betrag hn verteilt sein. Nahe dem absoluten Nullpunkt können überhaupt nur mehr einzelne Moleküle schwingen und zwar mit der kleinsten Energiemenge hn, was sehr wenig Wärmeinhalt bedeutet. Die zugehörige Temperaturstufe über Null ist aber doch verhältnismäßig groß, weil angrenzendes Gas eines Gasthermometers ziemlich große mittlere lebendige Kräfte seiner Moleküle haben muß, um den Körpermolekülen im Stoßaustausch der lebendigen Kräfte gleichzukommen, da dieser nur mit Energien nicht unter hn stattfinden kann[1]). Der geringe Wärmeinhalt zusammen mit der verhältnismäßig großen zugehörigen Temperaturstufe gibt die kleine spezifische Wärme der tiefsten Temperaturen.

Diese Gedanken sind in mehrfachen Abänderungen auch in Rechnung entwickelt und mit den Messungen der spezifischen Wärmen verglichen worden[2]). Ein allgemeines Zeichen der Richtigkeit ist darin zu sehen, daß Stoffe, deren spezifische Wärmen schon bei mäßig tiefen Temperaturen herabsinken, wie der Diamant (56), große Härte, d. i. große Molekularkräfte besitzen, zusammen mit nicht großem Atomgewicht, was besonders große Schwingungszahlen n und daher große Energiequanten hn und damit ungleiche Energieverteilung schon bei mäßiger Kälte bedeutet[3]).

Spezifische Wärmen der Gase.

58. Die einfachste Ermittelungsweise der spezifischen Wärmen an einer abgeschlossenen Gasmenge war lange Zeit schlecht durchführbar, weil das abschließende Gefäß — das mit dem Gas in erhitztem Zustand ins Kalorimeter zu bringen ist — immer viel größeren Wärmeinhalt hat als das Gas, so daß der für letzteres geltende kleine Unterschied der Messungen mit vollem und mit leerem Gefäß zu unsicher war.

Erst die elektrische Meßweise (53) zeigte sich befriedigend durchführbar. Es wird dabei das Gefäß überhaupt nicht miterhitzt, sondern die vom Heizdraht H

---

[1]) Die Moleküle eines zur Temperaturmessung geeigneten — genügend verdünnten — Gases (33) müssen untereinander Energien in beliebig kleinen Beträgen austauschen können (was äußerst kleinen maßgebenden Periodenzahlen n entspricht); sonst würden ihre Stöße nicht — wie vorausgesetzt (32) — gleich denen elastischer Körper verlaufen.

[2]) Die Schwingungszahlen n werden dabei berechenbar; sie ergeben sich von der Größenanordnung 10^{12}/sek und können mit den elastischen Konstanten, auch (bei Molekularwärmen fester Verbindungen, vgl. 120) mit ultraroten Absorptionen der betreffenden Körper verglichen werden.

[3]) Bemerkenswert ist jedoch, daß der Kohlenstoff auch in Verbindungen (120) eine auffallend kleine Atomwärme zeigt (1·8 bei gewöhnlicher Temperatur), ebenso auch andere Elemente, ohne daß in den Verbindungen große Molekularkräfte sich zeigten. Dies könnte bedeuten, daß die Atome dieser Elemente in ihren Bindungen an Nachbaratome überhaupt schwer in Wärmebewegung kommen, so daß sie in der spezifischen Wärme bei nicht hohen Temperaturen immer nur wenig mitrechnen.

(Abb. 62a) bei kurzem Stromschluß entwickelte, bekannte Wärmemenge bleibt in langsam aufsteigendem Gaswölkchen im Gase. Die zur Berechnung der spezifischen Wärme nötige Temperaturmessung muß beendet sein, ehe das Wölkchen die obere Gefäßwand erreicht. Dazu wird das ganze Gefäß mit seiner abgeschlossenen Gasmenge als Gasthermometer benutzt, indem man die beim Stromschluß auftretende Druckzunahme an einer Flüssigkeitssäule f mißt (36). Fraglich kann hierbei nur scheinen, ob nicht die ungleichförmige Verteilung der eingebrachten Wärme im Gas die Temperaturmessung stört. Die Frage ist zu verneinen. Es kann die gegebene Wärmemenge beliebig im Gesamtvolum des Gases verteilt sein: es wird doch derjenige Überdruck entstehen, der gleichförmiger Verteilung zukommt. Denn ist irgendein Teil der Wärme nur 1/n des Gasvolums mitgeteilt, so würde dieses n-tel die n-fache Temperaturerhöhung und daher die n-fache Druckerhöhung erhalten, falls es abgeschlossen wäre; da aber die Druckerhöhung auf das ganze Volum sich verbreitet, verschwindet ihre Ver-n-fachung, — alles nach den einfachen Gasgesetzen (38) gerechnet[1]).

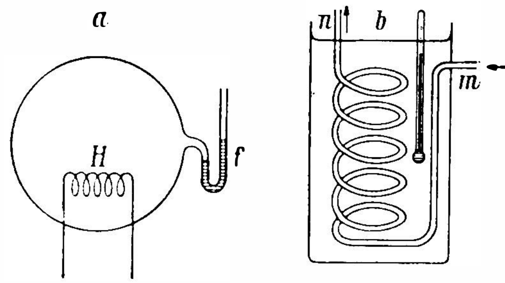


Abb. 62. Spezifische Wärmen der Gase.
bei konstantem Volum, c_v — bei konstantem Druck, c_p

59. Ein anderer Weg zur Messung spezifischer Wärmen der Gase war schon früh gangbar. Er ist in Abb. 62b veranschaulicht und besteht darin, das vorerhitzte Gas durch ein Kalorimeter strömen zu lassen, um dort die von ihm abgegebene Wärme zu messen. Das Gas tritt bei m ins Kalorimeter ein, bei n wieder aus; im Kalorimeter muß es ein Schlangenrohr oder sonstige Wege mit großer Wärmeabgabefläche passieren, damit es beim Austritt ganz auf Kalorimetertemperatur gekommen ist; die Temperatur beim Eintritt wird ebenfalls gemessen; die durchgeströmte Gasmenge muß bekannt sein. Es gilt dann ganz die Berechnung wie bei festen Körpern (Gl. 49).

60. Spezifische Wärme bei bleibendem Volum, c_v, und bei bleibendem Druck, c_p. — Die auf den beiden Wegen, 58 und 59, erhaltenen Ergebnisse für die spezifischen Wärmen der Gase stimmen nicht miteinander überein; der zweite Weg gibt größere spezifische Wärmen als der erste.

Vergleicht man aufmerksam die Vorgänge der Temperaturänderung des Gases auf diesen beiden Wegen, so findet man als wesentlichen Unterschied, daß auf dem ersten Wege keine Volumänderung des Gases (wohl aber Druckänderung) stattfindet, während auf dem zweiten Wege das Gas dem in der Rohrleitung dauernd gleichbleibenden[2]) Druck entsprechend sein Volum ändern muß. Man bezeichnet dementsprechend die beiden Messungsergebnisse unterscheidend als

---

[1]) Auch die mit den Druckausgleichen verbundenen Arbeitsleistungen bringen keine Störung hervor, weil sie nur innerhalb des Gesamtvolums verlaufen, so daß ihre erkaltenden und erwärmenden Wirkungen (71) einander aufheben müssen.

[2]) Das sehr geringe Druckgefälle zur Aufrechterhaltung der Strömung des Gases im Kalorimeter ist nicht wesentlich.

spezifische Wärme „bei bleibendem (konstantem) Volum", c_v (Abb. 62a), und spezifische Wärme „bei bleibendem (konstantem) Druck", c_p (Abb. 62b), und es ist $c_p > c_v$. Tab. 22 zeigt Zahlen hierzu.

Tab. 22. **Spezifische Wärmen von Gasen.**

	Bei konstantem Druck	Bei konstantem Volum
	c_p	c_v
Luft	0·238	0·169
Sauerstoff	0·218	0·156
Stickstoff	0·244	0·173
Wasserstoff	3·409	2·418
Kohlensäure	0·20	0·15
Alkohol (Dampf)	0·45	0·41
Äther „	0·48	0·45
	Kal für 1 kgr	

Die Notwendigkeit solchen Unterschiedes der beiden spezifischen Wärmen der Gase war schon früh erkannt worden, noch ehe c_v direkt gut gemessen werden konnte. Denn Volumänderungen von Gasen zeigten sich mit Wärmewirkungen verbunden; im besonderen wurde bei Zusammendrücken eines Gases Erhitzung desselben beobachtet (61). Die Volumverkleinerung des Gases bei seiner Erkaltung im Kalorimeter (Abb. 62b) bei Messung von c_p ist aber in Wirklichkeit Zusammendrückung, da Gase überhaupt nur unter äußerem Überdruck kleineres Volum annehmen (M 346), und die bei dieser Zusammendrückung auftretende Wärme wird im Kalorimeter mitgemessen. Sie ist in c_p enthalten, nicht in c_v, wo Volumänderung fehlt, so daß $c_p > c_v$ sein muß, wie es auch den Messungen entspricht.

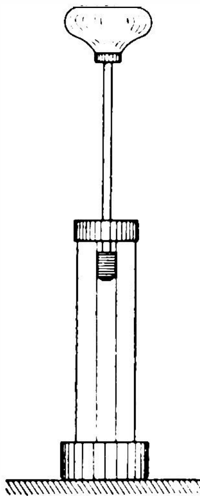


Abb. 63. Pneumatisches Feuerzeug.

61. Pneumatisches Feuerzeug. — Die Tatsache der Erwärmung eines Gases beim Zusammendrücken wird auffallend im „pneumatischen Feuerzeug" (Abb. 63) ersichtlich. In einem dickwandigen unten geschlossenen Glaszylinder ist ein gut gedichteter, aber leicht beweglicher Stempel schnell herabzudrücken. Man sieht bei der so bewirkten, schnellen Zusammendrückung der Luft unter dem Stempel einen Feuerschein im Rohre auftreten, und ein am unteren Ende des Stempels befestigter Feuerschwamm entzündet sich und kann glimmend herausgezogen werden.

Die Umkehrung dieses Vorgangs der Erhitzung beim Zusammendrücken des Gases, nämlich Erkaltung, wenn das Gas sich dehnt und dabei etwa den Stempel zurückschiebt, ist ebenfalls festzustellen. Sie zeigt sich z. B. bei der Vorbereitung der folgenden Messung (62), und wir betrachten sie später eingehend (70, 71, 240, 242).

62. Messung der Erwärmung bei Zusammendrückung. — Solche Messung wurde schon früh ausgeführt (Gay-Lussac 1807), um aus der unmittelbar meßbaren spezifischen Wärme c_p die schlecht meßbar gewesene, c_v, berechnen zu können (63).

Ein großes Gefäß G voll Luft (Abb. 64) ist mit druckmessender Flüssigkeitssäule f und mit einer breiten Öffnung p ins Freie versehen, die leicht schnell wieder verschlossen werden kann (in der Abbildung ein Rohr r mit oben aufgeschliffener, etwas gefetteter Platte p, die leicht abgenommen und wieder aufgesetzt werden kann).

Ist p geschlossen, der Hahn h offen, und saugt man bei s, so entsteht Unterdruck in G, wie es f anzeigt. Schließt man nun den Hahn h, so bemerkt man alsbald, daß die hochgesaugte Säule f sinkt, als wäre etwas undicht. In Wirklichkeit war die Luft in G kalt geworden als sie beim Saugen sich dehnte, und sie nimmt allmählich wieder Zimmertemperatur an; daher das Sinken der Säule f, das bei erfolgtem Temperaturausgleich zum Stillstand kommt und also als Nachweis für die Erkaltung bei der Volumvergrößerung betrachtet werden kann.

Nun kann die beabsichtigte Messung einer Erwärmung beim Zusammendrücken der Luft in G in folgender Weise ausgeführt werden. Man notiert die bleibend gewordene Quecksilbersäulenhöhe f, um den Druck der Luft in G bei der Zimmertemperatur, die T^0abs. sei, zu kennen; er ist b—f, wenn b der Barometerstand ist. Alsdann öffnet man plötzlich für kurze Zeit p durch Abheben und Wiederaufsetzen der Platte. Hierbei stürzt äußere Luft bei p herein und drückt die innere Luft auf äußeren Druck b zusammen, was unter Erwärmung geschieht. Um den Temperaturanstieg τ^0 dieser Erwärmung zu messen, wird G selber als Luftthermometergefäß benutzt. Deshalb war p sofort nach Druckausgleich wieder zu schließen, noch ehe Wärmeverlust eintritt; es wird so die ganze Temperaturstufe τ der nun wieder auf Zimmertemperatur sich abkühlenden Luft erkennbar als Drucksäule f_1, die im Sinne von Unterdruck in G während des Temperaturausgleichs sich herausbildet. Es ist dann der Druck in G, bei unverändertem Volum, von b auf $b—f_1$ gesunken, während die Temperatur von $T + \tau$ auf T gesunken ist. Danach ist, wie im Luftthermometer (36), $(T + \tau) : T = b : (b—f_1)$, woraus die gesuchte Temperatursteigerung $\tau = Tf_1/(b—f_1)$ folgt.[1])

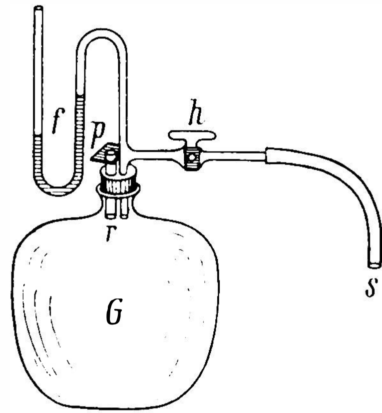


Abb. 64. Ermittelung des Verhältnisses der beiden spez. Wärmen von Gasen.

Dieser Temperaturanstieg erfolgte bei einer Änderung des Gasvolums, die aus dem beobachteten Anfangsdruck b—f und dem Enddruck $b—f_1$ nach Boyles und Mariottes Gesetz berechenbar ist, weil T zu Anfang und zu Ende die gleiche Zimmertemperatur war. Es ist danach die Volumänderung in Bruchteilen des ursprünglichen Volums $q = (f—f_1)/(b—f_1)$.

Dieser Volumänderung q zeigt sich die Temperaturänderung τ proportional, solange die Druckänderungen bei den Versuchen klein sind[2]).

63. Berechnung von $c_p/c_v = k$ aus den Druckbeobachtungen. — Nach dieser Ermittelung von τ kann folgendes überlegt werden. Man erwärme die Luft in G (Abb. 64) bei konstantem Druck um n^0. Sie dehnt sich dabei im Verhältnis des Temperaturanstieges $T : (T + n)$; die Volumänderung im Bruchteil des ursprünglichen Volums ist daher n/T. Macht man diese Volumänderung rückgängig durch Zusammendrücken der Luft, so steigt ihre Temperatur noch

[1]) Um τ möglichst ohne Verlust zu erhalten, muß das Gefäß G möglichst groß sein, damit nicht schon vor dem Wiederverschluß von p merklich Wärme aus dem Luftinhalt an die Gefäßwände verloren geht. Es ist nämlich um so weniger Luft nahe den Wänden, im Verhältnis zur Gesamtmenge der Luft, je größer das Gefäß ist; die Wandfläche ist proportional dem Quadrat, das Volum aber proportional dem Kubus des Radius eines kugeligen Gefäßes.

[2]) Die Rechnung für beliebig große solche „adiabatische" Änderungen findet sich im Anhang W II, 3 (Gl. a).

über $T + n$ hinaus, und der Anstieg τ_1 kann aus der vorigen Kenntnis von τ berechnet werden als proportional der Volumänderung, so daß $\tau_1 : \tau = (n/T) : q$, woraus $\tau_1 = nf_1/(f - f_1)$. Die Luft hat somit jetzt die Temperatur $T + n + nf_1/(f - f_1)$; ihr Volum ist das ursprüngliche. Sie ist also bei konstantem Volum um die Temperaturstufe $n + nf_1/(f - f_1)$ erwärmt worden durch keine andere Wärmezufuhr als diejenige, welche sie bei konstantem Druck um n^0 erwärmt hat. Die spezifischen Wärmen verhalten sich aber umgekehrt wie die durch die gleiche Wärmezufuhr hervorgebrachten Temperaturerhöhungen; daher ist

$$c_p : c_v = n\left(1 + \frac{f_1}{f - f_1}\right) : n = \frac{f}{f - f_1}. \qquad 63)$$

So wurde zum erstenmal das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen durch zwei einfache Druckmessungen, f und f_1, ermittelt[1]). Es fand sich für Luft $k = c_p/c_v = 1{\cdot}41$. Die Bezeichnung des Verhältnisses mit dem Buchstaben k ist allgemein gebräuchlich.

Aus k und dem früh schon gemessenen c_p (59) war dann auch c_v bekannt, bevor direkte Messung gut möglich war (58).

64. $c_p/c_v = k$ aus der Schallgeschwindigkeit. — Dieser andere Weg zur Ermittelung des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen wurde bereits in der Akustik erläutert (A 80). Er ist auch mit geringen Gasmengen gut durchführbar und ist für sehr viele Gase und Dämpfe benutzt worden.

65. Regelmäßigkeiten von c_p/c_v. — Tab. 23 gibt eine Zusammenstellung charakteristischer Werte des Verhältnisses. Der größte Wert, 1·67, kommt dem Quecksilberdampf und auch anderen Metalldämpfen zu; dann folgt eine Reihe von Gasen mit $k = 1{\cdot}41$ bis 1·40; dann eine Gruppe mit rund $k = 1{\cdot}3$, weiter der Alkoholdampf mit 1·1, endlich Ätherdampf als Beispiel vieler anderer solcher Dämpfe mit noch näher 1 gelegenem k.

Tab. 23. **Verhältnisse der beiden spezifischen Wärmen von Gasen.**

	$k = \frac{c_p}{c_v}$	Sp. Wärme c'_v für das Volum von 2 kgr H_2
Hg (Dampf)	1·67	2·97 Kal/°C
Luft	1·41	4·81
H_2	1·41	4·84
N_2	1·41	4·85
O_2	1·40	4·94
HCl	1·40	4·84
CO	1·41	4·81
H_2S	1·28	6·37
H_2O (Dampf)	1·28	6·67
CO_2	1·30	6·9
C_2H_6O (Dampf) . . .	1·11	18·9
$C_4H_{10}O$ (Dampf) . . .	1·06	33·5

[1]) Man bemerkt, daß die Druckeinheit aus dem Bruch für c_p/c_v in Gl. 63 herausfällt; man kann daher jede beliebige Flüssigkeit für die Drucksäulen f und f_1 benutzen.

Diese gruppenweise Gleichheit des Verhältnisses k hat später ersichtlich werdende tiefgehende Bedeutung (118, 122); es sei nur sogleich bemerkt, daß der Wert von k mit der Atomzahl im Molekül des betreffenden Gases oder Dampfes zusammenhängt. Einatomige Moleküle haben k = 1·67, zweiatomige 1·4, dreiatomige 1·3 (vgl. die Beispiele der Tabelle), und je mehr Atome im Molekül sind, desto mehr kommt k der Einheit nahe.

Im folgenden Abschnitt zeigt sich, daß die Erkenntnisse über die beiden spezifischen Wärmen der Gase die wichtigste Hilfe zur Erforschung der Natur der Wärme wurden.

III. Natur der Wärme.

Wir wenden uns jetzt ganz der Frage zu: Was ist Wärme? Was ist es, das mehr in einem Körper ist, wenn er wärmer ist? Was ist es, das wir in Kalorien schon messen konnten?

Die Geschichte der Beantwortung dieser Frage ist bemerkenswert als ein Beispiel für die Art des Suchens nach Wirklichkeits-Erkenntnis auch in anderen Fällen.

Die gewonnene Kenntnis über die Natur der Wärme wurde von umfassender Wichtigkeit für das Verständnis sämtlicher Naturvorgänge, die mit Wärme, mit Molekülen und Atomen zu tun haben, mit Einschluß der chemischen Vorgänge, wie es bis zu Ende der Wärmelehre sich zeigt.

Allgemeine Erkenntnisse.

66. Zunächst erschien die Wärme wie ein besonderer, eigenartiger Stoff, der aus einem Körper in den anderen gehen kann und dabei in seiner Menge unverändert bleibt. Dies war auch der Grundgedanke der Kalorimetrie, und er war dabei quantitativ bewährt (46). Es war übrigens fast immer der Gedanke an je einen besonderen Stoff aufgetreten, wenn den Sinnen Neues begegnete, das nicht wägbare Materie sein konnte. So wurden Licht, Elektrizität, Magnetismus als besondere Stoffe betrachtet; sie schienen im Gegensatz zur Materie unwägbar („Imponderabilien"), und so auch der Wärmestoff. In den gebräuchlichen Quellen der Wärme schien dieser Stoff frei zu werden aus verbrennenden Körpern (hier auch „Phlogiston" genannt) und zwar jeweils in bestimmter Menge; er wäre hier verborgen („latent") schon vorher vorhanden gewesen. Dasselbe war auch zu denken von der Wärme, die bei Aggregatzustandsänderungen frei wird, so beim Flüssigwerden von Dampf, beim Erstarren von Wasser zu Eis. Diese stets wohlabgegrenzten Wärmemengen (51), die man früh messen lernte, waren in der Tat in gleicher Größe wieder aufzuwenden und in die Stoffe hineinzubringen, wenn die umgekehrten Änderungen des Aggregatzustandes stattfinden sollten, so wenn Wasser zu Dampf werden, Eis schmelzen sollte.

67. Alle diese Vorgänge und Kenntnisse widersprachen nicht der vorgestellten Stoffnatur der Wärme. Wohl aber zeigten sich zum erstenmal Widersprüche bei den Wärmeerscheinungen an den Gasen, die man bei Betrachtung der spezifischen Wärmen der Gase (58 u. f.) messend zu verfolgen begonnen hatte. Wenn Luft zusammengedrückt wird, wie im pneumatischen Feuerzeug (61), so wird sie heiß, und es gelang nicht anzugeben, woher die Wärmemenge hier in die Luft gekommen sei. Die Vermutung, daß sie schon darin gewesen und beim Zusammenpressen nur frei geworden sei, erwies sich als unzutreffend; denn es müßte sonst das auf hohen Druck gebrachte Gas eine entsprechend verkleinerte Wärmekapazität haben, und dies trifft nicht zu: Die spezifischen Wärmen der

Gase zeigten sich bei den vorgenommenen Messungen (59) vom Drucke nahezu unabhängig. Daß die Wärme beim Zusammendrücken von außen ins Gas komme, war schwer anzunehmen, weil sie nirgends in der Umgebung fehlte. Immerhin waren es nur geringe Wärmemengen, die zur Erhitzung des Gases notwendig waren; ihre Herkunft konnte daher zweifelhaft bleiben ohne die Grundanschauung vom Wärmestoff in Zweifel zu bringen.

68. Wesentlich neue Aufklärung brachte die Untersuchung einer uralt bekannten Wärmequelle, der Reibung, die man längst hätte unbefangen betrachten dürfen, wie es an der Hand messender Versuche zuerst Graf Rumford tat (1798). Reibung war altes Mittel zum Feuermachen, vom Reiben der Hölzer und dem Schlagen des Feuersteins an bis zu den Phosphor-Streichhölzern. Freilich waren auch hierbei nur ganz kleine Wärmemengen geliefert worden, wie sie zur Entzündung von Brennstoffen notwendig waren, in denen die dann weitergelieferte Wärme schon enthalten gewesen sein konnte, da die Stoffe beim Brennen verbraucht wurden. Man übersah aber, daß beliebig lange fortgesetzte Reibung beliebig viel Wärme aus begrenzten Stoffmengen ohne deren Verbrauch hervorbringen würde. Dies zeigte Graf Rumfords Versuch beim Kanonenbohren. Das zu bohrende Metallstück war unter Wasser, der Bohrer absichtlich stumpf, um viel Reibung zu geben; der Antrieb erfolgte durch zwei Pferde am Göpel. Das Metallstück samt dem Wasser wurde dabei immerfort heißer, bis das Wasser schließlich ins Kochen kam, und kein Zeichen einer Erschöpfung dieser Wärmehervorbringung wurde merklich. Die Wärme war hier sicherlich nicht aus der Umgebung gekommen; im Gegenteil, die ganze Vorrichtung gab dauernd Wärme an die Umgebung ab. Chemische Vorgänge, die hätten Wärme liefern können, waren auch nirgends merklich geworden[1]). Es war damit nachgewiesen, daß aus dem begrenzten Metallstück eine unbegrenzte Wärmemenge erhältlich war. Dann kann aber die Wärme kein im Metallstück versteckter Stoff sein, der durch Reibung oder Stoß herausgepreßt würde; das endliche Körpervolum würde nur eine endliche Menge des Wärmestoffes enthalten und liefern können. Die Wärme zeigte sich somit hier deutlich nicht von der Art eines Stoffes, sondern von der Art der Bewegung — so schloß Graf Rumford —; denn das Entweichen von Wärme aus dem Metallstück dauerte nur solange an, als der Bohrer in Bewegung gehalten wurde; die Wärme erschien wie eine veränderte Art der Bewegung, die dem Bohrer beigebracht war.

69. „Wärme eine Art der Bewegung", eine höchst bemerkenswerte neue Einsicht in die Natur der Wärme war hier gewonnen; und doch dauerte es noch lange, bis diese Einsicht so mit aller übrigen Kenntnis verbunden war, daß sie — dabei auch deutlicher geworden — als ein Stück Wirklichkeits-Erkenntnis feststehen konnte.

Der Weg, auf welchem solcher weiterer Fortschritt erfolgte, führte über die Erkenntnis der umfassenden Wichtigkeit des Begriffes der Arbeit. Der Begriff der Arbeit war aus der Mechanik geläufig; er hängt mit dem Begriff der Kraft zusammen. Arbeit wird geleistet, wenn eine Kraft Bewegung in ihrer Richtung hervorbringt, und die Größe der Arbeit ist dann gegeben durch das Produkt der Größen von Kraft und Weg (M 89). Die beiden Begriffe „Arbeit" und „Kraft"

---

[1]) Auch eine Abnahme der spezifischen Wärme des Metalles beim Bohren war nicht nachweisbar; die Bohrspäne zeigten dieselbe spezifische Wärme wie das ungebohrte Metall.

wurden aber schlecht auseinander gehalten, was den Begriff der Kraft unklar machte und die Erlangung der neuen Einsicht erschwerte. Man hatte aus mancherlei Wahrnehmungen eine dunkle Vorstellung von einem umfassenden Zusammenhang aller „Kräfte der Natur". Man lernte mittels elektrischer Kräfte magnetische Kraft hervorzubringen; auch sah man die Wärmewirkungen der elektrischen Ströme und ihre chemischen Kräfte. Die Wärme selbst erschien dabei auch als eine solche „Kraft"; sie trieb schon damals Dampfmaschinen, und sie konnte ihrerseits durch chemische Kräfte hervorgebracht werden. So kam es dazu, die Wärme nicht als Stoff, sondern als „Kraft" zu betrachten, die mit allen anderen „Kräften" irgendwie zusammenhänge. Dieser Zusammenhang konnte aber erst klar werden, nachdem die allerdings schon von Leonardo und Newton geklärten Begriffe „Kraft" und „Arbeit" folgerichtig getrennt in Anwendung genommen wurden. Es zeigte sich danach, daß Wärme als aufgehäufte Arbeit zu betrachten sei, oder — mit dem nachher eingeführten Namen, der das Schwanken der alten Namen ganz überwinden half — als Energie.

70. Diese neue Auffassung der Wärme ist zuerst von Julius Robert Mayer durchgeführt worden (von 1842 an) und zwar quantitativ und in umfassendem Zusammenhang mit allen Vorgängen, bei welchen Wärme erscheint oder verschwindet, darüber hinausgehend aber auch mit allen damals bekannten Naturvorgängen überhaupt. Ihm wurde auch zum ersten Male alles klar, was wir über die Energie und ihre Erhaltung schon in der Mechanik ausführten, wo das Gesetz von der Erhaltung der Energie auch schon in seinem ganzen Umfang erläutert ist (M 142—156). Es wurden bei der Betrachtung der mechanischen Vorgänge potentielle und kinetische Energie als zwei Formen von Arbeitsaufspeicherung klar; als dritte Form kam auf dem angegebenen Gedankenwege die Wärme hinzu; chemische und elektrische Energie schlossen dann die vollständige Reihe der Formen, wie sie Tab. 24 hier nochmals zeigt, womit alle Naturvorgänge umfaßt sind.

Tab. 24. **Formen der Energie (Formen von Arbeitsvorrat).**

	Beispiele	Maß in Meterkilogrammen
Potentielle Energie (Spannkraft)	Gehobenes Gewicht; Gespannte Feder	Kraft × Weg
Kinetische Energie (Lebendige Kraft)	Abgeschossene Kugel; Eisenbahnzug in Fahrt	Masse × $\frac{(\text{Geschwindigkeit})^2}{2}$
Wärme	Heißer Körper	1 Kalorie = 427 Meterkgr.
Chemische Energie	Pulverladung; Kohlen- und Luftvorrat	(Nach Umwandlung in Wärme zu messen)
Elektrische Energie	Geladene Leydener Flasche	Spannung × Menge. 1 Voltcoulomb (= 1 Voltwebersekunde) = 0·102 Meterkilogramm

71. Die Erkenntnis der Wärme als Energieform war von grundlegender Wichtigkeit, weil erst damit das Gesetz von der Erhaltung der Energie erfaßt werden konnte (M 155). Wärme ist nämlich diejenige Energieform, die so häufig auftaucht, wenn Energie zu verschwinden scheint, so bei Reibung (M 291) und bei unelastischem Stoß (M 277). Dabei kommt es allerdings darauf an, zu wissen, wieviel Kalorien Wärme für je 1 mkgr verschwundene sonstige Energie erscheinen muß, wenn die Summe aller Energien unverändert bleiben soll. Auch diese Frage hat Rob. Mayer beantwortet und zwar in einfacher Weise durch den sogleich zu erläuternden Gedankenversuch (72).

Man sieht, daß in dieser Auffassung die in Graf Rumfords Versuch (68) aufgetretene Reibungs-Wärme der Ersatz ist für die verbrauchte Arbeit der Pferde. Ebenso ist im pneumatischen Feuerzeug (61) die am Stempel geleistete Arbeit die Quelle der Wärme; es ist ein unelastischer Stoß, der hier diese Arbeit verschwinden läßt, wofür die Wärme im Gas erscheint. Würde der Stoß elastisch ausgeführt, so daß der Stempel wieder zurückschnellt, so würde das nun unter Arbeitsleistung am Stempel sich dehnende Gas sich wieder abkühlen, und war es vor Wärmeverlust vollkommen bewahrt, so würde die beim Herabdrücken geleistete Arbeit dann in voller Menge als kinetische Energie im Stempel wieder erscheinen und das Gas wieder Zimmertemperatur haben müssen.

Es ist wichtig, zu bemerken, daß in dieser Auffassung die Erkaltung eines sich dehnenden Gases (61) nicht als Folge seiner Volumvergrößerung erscheint, sondern als Folge allein der bei der Dehnung geleisteten Arbeit. Erfolgte die Dehnung ohne Arbeitsleistung, so könnte auch keine Wärme verschwinden. Dies ist geprüft und zutreffend gefunden: Strömt Gas in leeren Raum aus, wobei es sich dehnt ohne Arbeit auch nur gegen den Atmosphärendruck zu leisten, so fehlt die Erkaltung[1]). Die Versuche, die dies zeigten, waren schon vor Robert Mayer ausgeführt, und es war das wichtig für die Einwandfreiheit seines Gedankenversuchs.

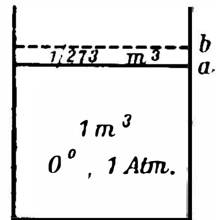


Abb. 65. Robert Mayer's Gedankenversuch.

72. Robert Mayers Gedankenversuch. — Es werden in diesem sehr einfachen, in der erforderlichen Annäherung durchführbaren und daher erlaubten Gedankenversuch (M 86) schon vorhandene Erfahrungen in der neuen Auffassung benutzt, um das „mechanische Wärmeäquivalent" oder „Arbeits-Äquivalent der Wärme" zu ermitteln, die grundlegende Zahl zur Umrechnung von Kalorien in Meterkilogramme und umgekehrt.

Es werde 1 m³ Luft von 1 Atm. Druck, abgesperrt in einem Zylinder mit Kolben (Abb. 65), durch Wärmezufuhr von 0° auf 1° erwärmt und zwar in zweierlei verschiedenen Weisen: 1. bei unverändertem Volum, wobei der Kolben in der Stellung a festgehalten ist, 2. bei unverändertem Druck, wobei der Kolben reibungslos von a bis b gleitet, so daß das Volum auf den unveränderten Druck

[1]) War das ausströmende Gas sehr stark verdichtet, so daß die Anziehungen der Moleküle merklich wirksam werden (M 359), so arbeitet das Gas bei der Dehnung gegen diese Kräfte; in diesem Falle tritt eine entsprechende geringe Erkaltung tatsächlich ein (117, 242).

sich einrichten kann[1]), wobei das Volum nach Gay-Lussacs und Daltons Gesetz um $^1/_{273}$ m^3 zunimmt.

Der Wärmeverbrauch ist in den beiden Fällen verschieden. Im Falle 1 ist er durch c_v gegeben, im Falle 2 durch c_p, beide Male den Definitionen dieser Größen entsprechend, und es ist $c_p > c_v$ (60). Der Unterschied $c_p—c_v$ ist in der neuen Auffassung dadurch bedingt, daß im Falle 1 nur Erwärmung der Luft stattfindet, im Falle 2 aber außerdem Arbeit geleistet wird, nämlich die Arbeit zum Zurücktreiben des Luftdruckes über das Dehnungsvolum von a bis b. Dieser in Meterkilogrammen zu berechnenden Arbeit muß die mehrverbrauchte Wärmemenge des Falles 2 „äquivalent" sein, d. h. jene Meterkilogramme müssen ebensoviel Energie sein als die $c_p—c_v$ entsprechenden Kalorien.

Zur Berechnung ist $c_p—c_v = 0{\cdot}069$ Kal/kgr^{0}C (Tab. 22) auf die im Gedankenversuch benutzte Luftmenge 1 m^3 umzurechnen, welche nach dem spezifischen Gewicht 1·29 kgr wiegt (Tab. 2), was bei der Temperaturstufe 1^0C 0·089 Kal. Wärmemehrverbrauch ergibt. Die bei der dazugehörigen Volumzunahme von a bis b geleistete Arbeit ist gegeben durch das Produkt aus dieser Zunahme, $^1/_{273}$ m^3, und dem Druck, 1 Atm. = 10333 kgr/m^2 (M 378 und 351), was 37·9 mkgr ergibt.

Es sind demnach 0·089 Kal äquivalent 37·9 mkgr, 1 Kalorie also äquivalent 426[2]) Meterkilogrammen.

73. Sicherung der Kenntnis. — Durch diese Berechnung von Robert Mayer war auch schon der erste Schritt getan zu gesicherter quantitativer Erfassung der Wärme als Energieform und zur Erprobung des neuen Gedankens von der Energieerhaltung auch in bezug auf diese Energieform. Die Vorgänge der Mechanik der großen Körper waren schon genügend quantitativ studiert, um die neue Auffassung gesichert auf sie anwenden zu können; ob aber die Wärme stets, in allen Fällen ihrer Entstehung aus den anderen Energieformen und ihrer Umwandlung in diese, nach jenem, aus dem Einzelfall des Gedankenversuchs berechneten Äquivalent sich richtet, dies konnte nur durch weitere, messende Untersuchungen ergründet werden. Hierzu hat am meisten und sehr früh schon J. P. Joule beigetragen (von 1843 an). Er maß Reibungswärme im Kalorimeter bei zugleich gemessenem Arbeitsverbrauch aus Kraft und Weg der fallenden Gewichte, welche die Reibungsvorrichtung trieben. Dabei benutzte er Reibung zwischen festen Körpern, dann auch Reibung durch Schaufelräder in Wasser, dann in Quecksilber und auch in Öl. Er verdichtete weiter Gase durch Pumpen im Kalorimeter, maß die auftretende Wärme und die verbrauchte Arbeit, trieb auch zu gleicher Messung Wasser durch enge Röhren, und er fand in allen diesen Fällen das Wärmeäquivalent der Arbeit so nahe gleich und übereinstimmend mit dem von Robert Mayer berechneten, als jeweils die Genauigkeit der Messung ging. Dadurch waren Wärme und potentielle Energie in genügend vielen Fällen mit einander in durchweg gültigen, quantitativen Zusammenhang gebracht, und

---

[1]) Zu sehr angenäherter Durchführung kann als reibungs- und auch gewichtsloser Kolben eine Grenzschicht aus Luft zwischen innerer und äußerer Luft gedacht werden.

[2]) Zur Sicherung der letzten Zahlenstelle wäre bei der Kleinheit der Differenz $c_p—c_v$ genauere Kenntnis der spezifischen Wärmen der Gase erforderlich, als selbst heute vorhanden ist. Zu Robert Mayers Zeiten war die Kenntnis noch weniger genau; an der Wichtigkeit des Ergebnisses, wäre es selbst auch nur der Größenordnung nach gesichert, ändert das nichts.

es war mit Hinzunahme von Robert Mayers Gedankenversuch auch die Verwandlung in beiden Richtungen berücksichtigt.

Wichtig waren auch Versuche von Joule mit einer elektrischen Induktionsmaschine, die durch fallende Gewichte unter Arbeitsmessung getrieben wurde und deren elektrischer Strom Wärme entwickelte, die im Kalorimeter gemessen wurde; es zeigte sich auch hier das gleiche Arbeitsäquivalent der Wärme gültig, obgleich die Arbeit der fallenden Gewichte zuerst elektrische Energie und diese erst die Wärme hervorbrachte. Andere Prüfungen, die ebenfalls elektrische Energie und auch chemische Energie einschließen, bemerken wir an späteren Stellen (126 u. f. und E 206 u. f., 215, 227, 368 u. f.).

Auch die Wärmeentwickelung unelastischen Stoßes (M 277) von Bleimassen wurde gemessen und mit der verschwundenen kinetischen Energie verglichen.

74. Endlich ergaben Messungen an dem großen Beispiel der Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit, an der Dampfmaschine, ebenfalls die Gültigkeit des Äquivalents und somit des Energiegesetzes. Es zeigte sich die vom Dampf geleistete Arbeit mit einer verschwundenen Wärmemenge verbunden: Die im Kondensator der Maschine vom Dampf abgegebene Wärmemenge ist kleiner als die vom Kessel her empfangene, was man bis dahin keineswegs annahm. Wohl hatte man erkannt, daß Wärme, wenn sie Arbeit leisten soll, von einem heißen Körper (dem Kessel) auf einen kalten (den Kondensator) übergehen müsse, was wir auch schon an mehreren Beispielsfällen gültig gefunden haben (15, 25, 43); aber man dachte die Menge der Wärme dabei unverändert, so wie Wasser, das ein Mühlrad treibt, zwar von einem höheren Ort zu einem tieferen sinken muß, aber in der Menge unverändert bleibt. Auf die hier noch übrigbleibende Frage, welches der Bruchteil der Wärme sei, der aus der Maschine unverwandelt heraustretend an den kalten Körper abgegeben wird und welches der andere, nach dem Äquivalent in Arbeit verwandelte Teil je nach Umständen sei, kommen wir später zurück (247, 253).

75. Durch alle diese Untersuchungen wurde schon im Laufe von kaum zwei Jahrzehnten die Gültigkeit des Energiegesetzes bei allen Verwandlungsarten der Energie, besonders mit Einbeziehung der Wärme genügend gesichert.

Immer weiter verfeinerte Messungen des mechanischen Wärmeäquivalents, die später noch ausgeführt wurden, ergaben den auf 3 Zahlenstellen abgerundeten Wert von 427 mkgr/Kal[1]) $= 419 \cdot 10^8$ erg/Kal (M 192).

76. Bemerkungen zur Größe des Arbeitsäquivalents der Wärme. — Wenn 400 mkgr Arbeit kaum 1 Kalorie Wärme geben, z. B. beim Falle eines 400 kgr schweren Körpers durch 1 m und unelastischem Aufstoß, so ist es nicht zu verwundern, daß oft potentielle und auch kinetische Energie spurlos zu verschwinden scheinen; denn 1 Kalorie ist wenig Wärme; sie erwärmt 1 Liter Wasser nur um 1^0. Das Wasser des Rheinfalles z. B., der 20 m hoch ist, kann unten nur um rund $\frac{1}{20}{}^0$ wärmer sein als oben, denn alle 20 mkgr jedes Liters herabfallenden Wassers geben nur $\frac{20}{427}$ Kalorie.

Daher konnten die Vorgänge, bei welchen Wärme entsteht, so lange Zeit hindurch das spurlose Verschwinden von Arbeit vortäuschen.

---

[1]) Hierbei ist für das Kilogrammgewicht 45° geographische Breite und Meereshöhe Null, für die Kalorie 15°C angenommen (vgl. M 192 und W 48).

Andererseits ist es ersichtlich, daß die umgekehrte Verwandlung, von Wärme in Arbeit, wie sie in der Dampfmaschine stattfindet, sehr vorteilhaft sein muß und daß die stattfindende Verminderung der Wärmemenge (74) selbst bei Maschinen mit großer Arbeitsleistung ohne besondere Messung unbemerkt bleiben konnte.

77. Die Wärme als Stoff. — Wärme ist Energie; dies haben wir gut festgestellt. Aber Energie verhält sich wie ein Stoff; sie bleibt nicht nur in der Menge unverändert, sondern sie hat sogar Masse und Gewicht, was wir bereits erwähnten (M 157) und später beweisen (E 434 u. f., 582). Mit Recht konnte daher Wärme als Stoff erscheinen und betrachtet werden (66), nur eben nicht als ein Stoff, der immer nur Wärme und sonst nichts ist. Daß Letzteres nicht zutrifft, dies konnten die kalorimetrischen Messungen für sich allein nicht zeigen; denn bei ihnen geht die Wärme immer nur bei bloßer Berührung von Körper zu Körper, wobei sie unverwandelt erhalten bleibt (vgl. 136).

Masse und Gewicht der Wärme ist berechenbar nach der für alle Energie geltenden Gleichung $m = \mathfrak{E}/c^2$, wo m die Masse der Energiemenge $\mathfrak{E}$ (in erg), c die Lichtgeschwindigkeit ist (E 435). Da 1 Kalorie $= 427$ mkgr $= 4{\cdot}19 \cdot 10^{10}$ erg ist (75), so ergibt sich für die Masse und das Gewicht der Kalorie $m = 0{\cdot}5 \cdot 10^{-10}$ gr oder 1 Zwanzigmilliontel Milligramm. Dies ist so wenig, daß keine vorhandene Waage die Gewichtszunahme beim Erhitzen eines Körpers nachweisen könnte[1]).

78. Die Wärme als Bewegung. — Nachdem die Wärme als Energieform festgestellt war, konnte die weitere Frage untersucht werden, ob Wärme notwendigerweise als besondere, neue Form der Energie gelten müsse, oder ob sie nicht vielleicht bloß versteckte potentielle und kinetische Energie der Moleküle des warmen Körpers sein könnte, versteckt deshalb, weil die Moleküle einzeln nicht bemerkbar sind. Die Frage ist nach eingehender Prüfung an der Erfahrung in bejahendem Sinne entschieden, wie das Folgende zeigen wird. Damit kommen wir auf die schon vorangestellte Erkenntnis (1): Wärme ist Bewegung der Moleküle. Man kann darin auch die Bewährung von Graf Rumfords Schluß aus seinen denkwürdigen Beobachtungen sehen (68).

Die Molekularbewegung hat sich besonders einfach bei den Gasen gezeigt, worauf wir teilweise schon eingegangen sind (32—35), indem wir zeigten, daß die Temperatur eines Gases durch die mittlere kinetische Energie seiner Moleküle gegeben und durch den Druck des Gases meßbar ist. Bei genügend verdünnten Gasen ist die ganze Energie der Wärme kinetische Energie der Moleküle. Die rechnende Verfolgung der Bewegungen der Moleküle hat sehr umfassende, quantitativ nachprüfbare Folgerungen zu ziehen erlaubt, die sich vollkommen bewährt haben (87, 94 u. f.), wodurch die Richtigkeit der über die Moleküle und ihre Bewegungen gemachten Annahmen genügend erwiesen ist (Clausius, von 1857 an). Wir verfolgen dies in der Hauptsache eingehend in dem besonderen Abschnitt über kinetische Gastheorie (81 u. f.). Es ist in der Tat eine Theorie, die sich hier entwickelt hat, ein wohlgeprüftes, großes, quantitatives Gedankengebäude.

Bei den festen Körpern, deren Moleküle (Atome) um Gleichgewichtslagen schwingen (M 250, 252), ist, wie bei jeder Pendelbewegung, die Energie im

[1]) Schon Graf Rumford hatte sich vergeblich bemüht, ein etwaiges, damals noch ganz fragliches Gewicht der Wärme zu finden.

Mittel zur Hälfte kinetisch, zur anderen Hälfte potentiell (M 149). Wir haben die Molekularbewegung in festen Körpern bereits im besonderen Falle der tiefen Temperaturen eingehend betrachtet (57) und wir kommen auch noch allgemeiner auf dieselbe zurück (119, 120).

Die Flüssigkeiten stehen in bezug auf Molekularbewegung nahe den Gasen. Wir sahen das schon bei Betrachtung der Diffusion (M 364—368) und es zeigt sich weiter bei Untersuchung des Übergangs vom Gaszustand in den flüssigen Zustand (213 u. f.) und auch sonst bei Vergleichung der beiden Aggregatzustände (110). Die Übereinstimmung der Molekularbewegung bei Flüssigkeiten und Gasen beruht wohl darauf, daß im Inneren von Flüssigkeit die mittlere resultierende Molekularkraft verschwindet (M 315), wie sie in verdünnten Gasen überhaupt Null ist. Nur ist in den Flüssigkeiten, im Gegensatz zu den Gasen, sehr wenig freier Raum für die Bewegungen der Moleküle vorhanden, so daß sie meist nur um weniger als ihre eigenen Durchmesser sich hin und her bewegen können[1]).

79. Kennt man die Wärme als ungeordnete Bewegung der Moleküle, so ist vieles, was lange Schwierigkeiten machte, selbstverständlich. Bei der Reibung sieht man die Moleküle der aneinander vorbeigleitenden Schichten aufeinanderstoßen und so die geordnete Bewegung der Raumelemente der Körper in ungeordnete Bewegung ihrer Moleküle übergehen. Ähnlich ist es auch beim unelastischen Stoß, während das Besondere des Stoßes elastischer fester Körper das Geordnet-Bleiben der Bewegungen ist. Den Stempel des pneumatischen Feuerzeugs sieht man auf die Gasmoleküle stoßen, während er herabgedrückt wird, so daß sie mit vergrößerter Geschwindigkeit ihn verlassen, und dies ist die Erwärmung des Gases durch die am Stempel getane Arbeit. Auch ist unmittelbar einzusehen, daß ein sich dehnendes Gas nur dann kalt werden kann, wenn es dabei Arbeit leistet (71); denn die ohne jedes Hindernis gradlinig sich fortbewegenden Moleküle verlieren keine Geschwindigkeit.

80. Einheitlichkeit der Energieformen. — Hat man in dieser Weise die bewegten Moleküle der Körper vor Augen, so ist Wärme als besondere Energieform überhaupt verschwunden; man sieht nur kinetische und potentielle Energie der Moleküle und Atome. In dieser Betrachtungsweise ist auch chemische Energie nichts Besonderes; sie erscheint als potentielle Energie der Atome (132). So ist es überhaupt mit den fünf Energieformen (Tab. 24): ihre Unterscheidung beruht rein auf der Beschränktheit unserer Sinnesorgane. Zuletzt zeigt sich alle Energie als elektrische Energie (E 586, 587).

Kinetische Gastheorie.

81. Bewegungen der Gasmoleküle. — Wir haben schon die nächstliegenden Nachweise dafür angegeben, daß die Moleküle in genügend verdünnten Gasen gradlinig sich bewegen und nur bei ihren Zusammenstößen aufeinanderwirken, daß diese Stöße wie vollkommen elastisch verlaufen (32), daß die absolute Temperatur proportional der mittleren kinetischen Energie der Moleküle (33) und der Gasdruck die Stoßwirkung der Moleküle ist (34). Boyles und Mariottes Gesetz wurde daraus unmittelbar verständlich (35), während Gay-Lussacs und

[1]) Diese Bewegungen könnten auch Schwingungsbewegungen sein, nur — zum Unterschied von den festen Körpern — mit dauernd wechselnder Gleichgewichtslage (vgl. Note zu 119).

Daltons Gesetz schon in der Angabe für die Temperatur enthalten ist. Dies alles ist zusammengefaßt in den beiden Gleichungen für die Temperatur T und den Druck p[1]),

$$T = a\frac{mw^2}{2}\,, \quad p = \tfrac{1}{3}\,Nmw^2\,, \qquad 81)$$

wo m die Molekülmasse, w die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle, N deren Zahl in der Volumeinheit und a eine Konstante ist, die von der willkürlich getroffenen Wahl der Temperaturgradlänge abhängt[2]). Diese beiden Gleichungen gestatten an sich schon wichtige Schlüsse, und sie bilden die Grundlage für alle weitere Untersuchung der Bewegungsvorgänge der Gasmoleküle.

82. Avogadros Satz. — Zunächst ist in sehr einfacher Weise ein wichtiger Schluß aus den 2 Gleichungen 81 zu ziehen. Man vergleiche zwei Gase bei gleicher Temperatur T und gleichem Druck p. Es muß dann nach der ersten Gleichung wegen der Gleichheit von T auch das Produkt mw^2 für beide Gase gleich sein. Wegen der Gleichheit von p muß aber nach der zweiten Gleichung auch Nmw^2 für beide Gase gleich sein, und da mw^2 schon als gleich nachgewiesen ist, muß auch N für beide Gase gleich sein. Da dieser Schluß auf Gleichheit von N für je zwei beliebige Gase gilt, gilt er für alle Gase überhaupt, und man hat den Satz: Die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit ist für alle Gase bei gleicher Temperatur und gleichem Druck dieselbe.

Dieser Satz ist vermutungsweise schon früh ausgesprochen worden (Avogadro 1811). Durch die angegebene Schlußweise ist er in feste Verbindung gekommen mit der großen Menge von Kenntnissen, die an jenen beiden Gleichungen 81 mit der gesamten Gastheorie hängt. Dies gibt dem Satz die volle Sicherheit aller dieser Kenntnis, und dies ist wichtig, weil er die Grundlage aller Molekulargewichtsbestimmungen (83) und damit auch der Atomgewichtsbestimmungen (M 23) ist.

83. Molekulargewichtsbestimmung aus der Dampfdichte. — Bei gleicher Temperatur und gleichem Druck gemessene spezifische Gewichte verschiedener Gase verhalten sich zueinander wie die Molekulargewichte dieser Gase. Denn sie geben nach Avogadros Satz (82) die Gewichte gleicher Molekülzahlen an. Man kommt somit durch Messung des spezifischen Gewichtes s_0 einer chemischen Verbindung oder auch eines Elementes in Gasform zur Kenntnis des Molekulargewichts M der Verbindung oder des Elements. Als Vergleichsgas wählt man Wasserstoffgas, dessen spezifisches Gewicht bekannt ist (0·000089 gr/cm³ bei 0° und 1 Atm.) und dessen Molekulargewicht in der gewöhnlichen Einheit (H = 1) 2 ist, weil das Wasserstoffgas zweiatomige Moleküle hat (84). Die Berechnung von M erfolgt somit nach der Gleichung $M:2 = s_0:0{\cdot}000089$.

---

[1]) Vergleicht man die Größe des Druckes, $p = Nmw^2/3$, mit der Menge der kinetischen Energie der Moleküle in der Volumeinheit des Gases, $Nmw^2/2$, so sieht man, daß der Druck $^2/_3$ dieser Energiemenge ist. Mit dem allgemeinen Ergebnis, daß Druck gleich ist der Dichte derjenigen Energie, welche mit der Druckfläche in Wechselwirkung tritt (M 376), stimmt dies insofern, als wir sahen, daß der Druck Wirkung der kinetischen Energie der Moleküle ist (34), und daß nur ein Bruchteil dieser Energie zur Wirkung kommen kann, weil die parallel zur Fläche bewegten Moleküle nicht auf dieselbe stoßen. Es erscheint hier $^2/_3$ als dieser Bruchteil.

[2]) Die Konstante a kann aus der Gleichung 81 für T berechnet werden, sobald man das absolute Molekulargewicht m (45) und die Geschwindigkeit w (87) für irgend ein Gas bei gegebener Temperatur T kennt. Man findet $a = 2T/mw^2 = 5{\cdot}05 \cdot 10^{15}$ °C/erg.

Dieses Verfahren der Molekulargewichtsbestimmung ist auf alle Stoffe anwendbar, die entweder schon in Gasgestalt gegeben sind oder die doch unzersetzt verdampft werden können.

Die Ausführung ist einfach: Es kommt nur auf eine Gewichts- und Volummessung des Gases oder Dampfes an, wie sie zu jeder spezifischen Gewichtsbestimmung nötig ist (M Gl. 70). Der Dampf muß dabei genügend hohe Temperatur haben, damit er sich wie ein Gas verhält (vgl. 211), weil nach den Gesetzen der verdünnten Gase gerechnet wurde (82, Gl. 81). Das gemessene Volum des Dampfes kann dann auf 0° und 760 mm Druck umgerechnet werden (40), um mit seinem Gewicht das spezifische Gewicht s_0 zu erhalten[1]).

84. Das zum Ausgangspunkt genommene Molekulargewicht 2 des Wasserstoffgases ist in doppelter Weise vollkommen gesichert. Erstens nämlich durch die Volumverhältnisse, in welchen gasförmige Verbindungen des Wasserstoffs sich bilden, und zweitens durch das Verhältnis k der beiden spezifischen Wärmen des Wasserstoffs, das seiner Größe nach (1·41, Tab. 23) nur für zweiatomige Gase paßt (65). Auf letzteres ist noch später einzugehen (114, 118, 122); für das erstere sei hier als Beispiel die Bildung von Salzsäuregas aus Wasserstoff- und Chlorgas betrachtet: Es vereinigen sich je 1 Volum dieser beiden Gase zu 2 Volumen Salzsäuregas; alle Volume bei gleicher Temperatur und unter gleichem Druck gemessen. Dies bedeutet nach Avogadros Satz, daß je 1 Wasserstoffmolekül und 1 Chlormolekül 2 Moleküle Salzsäure bilden, und dies stimmt nur mit der Umsatzgleichung $H_2+Cl_2 = 2\,HCl$, nicht aber etwa mit $H+Cl = HCl$ (denn in letzterem Falle müßten 2 Volume 1 Volum geben), auch nicht etwa mit $H_3+Cl_3 = 3HCl$ (wobei 2 Volume 3 Volume gäben). Das Studium der Volumverhältnisse bei einer großen Zahl von Gasumsetzungen hatte in der Tat zum erstenmal schon gezeigt, daß auch bei Elementen im allgemeinen ein Unterschied gemacht werden müsse zwischen Atomen und Molekülen und daß die Moleküle der meisten elementaren Gase aus 2 Atomen bestehen.

85. Weitere Hilfsmittel zur Ermittelung der Molekulargrößen. — Das Grundverfahren der Molekulargewichtsbestimmung aus der Dampfdichte (83) ist auf Stoffe beschränkt, die unzersetzt verdampfbar sind, und es liefert auch nur die Gewichte der Dampfmoleküle. Im flüssigen Zustand ist die Molekülargröße bei manchen Stoffen eine andere als im Dampf. Ein besonderes Beispiel hierfür ist das Wasser, dessen Molekül im Dampf H_2O, im flüssigen Wasser aber wohl größtenteils H_4O_2 ist (23). Solche Fälle verlangen stets besondere Untersuchung auf allerdings meist weniger gesicherten Wegen. Im festen Zustand sind die Moleküle meist gar nicht gesondert beweglich, sondern so mit einander verbunden, daß sie bei der Wärmebewegung gar nicht zur Geltung kommen (M 250, W 120).

Wichtig war von jeher für alle chemischen Studien die Kenntnis der wahren Molekulargewichte der einzelnen Verbindungen, nicht nur die aus der quantitativen Analyse bei bekannten Atomgewichten gegebenen kleinsten, in einem Molekül etwa möglichen Atomzahlen. Denn das in Wirkung tretende Molekül ist öfter ein Vielfaches davon. Hier hatte die Chemie überall, wo Verdampfbarkeit der Verbindung vorlag, festen Anhalt an der Dampfdichtemethode; später hat sie auch bei unverdampfbaren Verbindungen gute Wege zur Ergründung der wahren Molekulargrößen aus dem Verhalten der Verbindungen beim Abbau, bei Ersatz (Substitution) von Atomen und Atomgruppen in ihnen und auf sonstigen Wegen gefunden. Dem kamen

---

[1]) In Wirklichkeit ist dies eine Umrechnung des spezifischen Gewichtes des zum Vergleich genommenen Wasserstoffs auf Temperatur und Druck des Dampfes.

kontrollweise dann auch noch die Molekulargewichtsbestimmungen durch osmotischen Druck (M 368), Gefrierpunktserniedrigung (197), und Siedepunktserhöhung (223) zu Hilfe, anwendbar auf Stoffe, die Lösungen bilden.

86. Besondere Schwierigkeiten machen die Moleküle der lebenswichtigen Kohlenstoffverbindungen mit sehr großen Atomzahlen; denn sie sind sehr zersetzlich, nicht verdampfbar, und geben in Lösungen eben wegen des großen Molekulargewichts nur schlecht feststellbare Ergebnisse (z. B. äußerst kleine Gefrierpunktserniedrigungen). Hier bleiben nur die chemischen Eingriffe zum Anhalt für die vielen und vielerlei Atomgruppen, die zusammen das Molekül ausmachen. So kann auf langsamen Wegen die Zusammensetzung der verschiedenen Arten von Eiweißmolekülen, Protoplasmamolekülen und anderer aus Tieren zu gewinnenden Molekülarten mit ihren Hunderten von Atomen[1]) weiter ergründet werden.

Diese vielatomigen Moleküle sind es aber, an die die Erscheinungen des Lebens gebunden sind. Wohl wirken auch einfachste Moleküle mit an den Lebensvorgängen in Pflanzen und Tieren; aber an ihnen hängt nicht Leben oder Tod und nicht die Eigenart des Lebewesens, nicht das was im Leben vorhanden und im Tod entschwunden ist und was wir den Geist (oder die Seele) des Lebewesens nennen (Einl. 1, M 284). Nur die ganz großen Moleküle der genannten Art besitzen also die Fähigkeit Geist festzuhalten[2]). Selbst die allereinfachsten einzelligen Lebewesen haben wohl ohne Zweifel solche Moleküle in ihrem Zellkern oder Protoplasma als Lebenssitz.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Leistungsmöglichkeiten der Materie oft an den Grad ihrer Zusammenhäufung gebunden sind: Nur die allergrößten Himmelskörper können langdauernd als Sonnen leuchten, indem Wärmeverlust durch Strahlung sie erhitzt (187); nur Planeten von genügender Größe können Atmosphären festhalten (89), und nur Moleküle aus gehörig vielen Atomen können Geist festhalten und so die Erscheinungen des Lebens geben.

87. Geschwindigkeiten der Gasmoleküle. — Die Geschwindigkeit w der Gasmoleküle ist unmittelbar aus der Gleichung (81) für den Druck p berechenbar, da $Nm = D$ die gewöhnliche Gasdichte, die Masse aller N Moleküle in der Volumeinheit ist. Setzt man p in dyn/cm^2, D in gr/cm^3 ein (z. B. $p = 1$ Atm. $= 1{\cdot}013 \cdot 10^6$ dyn/cm^2, $D = 0{\cdot}00143$ gr/cm^3 für Sauerstoff von 0^0C), so erhält man w in cm/sek. Dies gibt bei 0^0 C für Sauerstoff 461 m/sek, für Wasserstoff 1844 m/sek. Die Geschwindigkeiten sind also sehr groß, ungefähr gleich den höchsten Geschoßgeschwindigkeiten.

Die Geschwindigkeit muß, wie die Gleichung 81 für T zeigt, bei gleicher Temperatur verkehrt proportional $\sqrt{m}$, der Wurzel aus dem Molekulargewicht sein, also bei Wasserstoff 4-mal so groß als bei Sauerstoff; sie hängt nur von der Temperatur, nicht vom Druck ab.

Die so gefundene Molekulargeschwindigkeit ist nahe gleich der Schallgeschwindigkeit im betreffenden Gase (A 23) und auch nahe gleich der

---

[1]) Die Atomzahlen können in die Millionen gehen, ohne daß das Molekül bei der Kleinheit der Atome und deren meist dichter Zusammenlagerung in die Grenzen des mikroskopisch Meßbaren kommt (O 69). Dem Elektronenmikroskop (E 452) mögen hier noch Wege offen stehen. Über ein Scheinverfahren zur Ermittelung großer Molekulargewichte s. Anh M III, 2. Fußnote (Bd. I).

[2]) Vgl. dazu die Fußnote zu M 284 und W 134.

Ausströmungsgeschwindigkeit des Gases in den leeren Raum (M 373). Dies muß so sein, wenn die zugrunde gelegten Vorstellungen richtig sind. Denn die Schallbewegung ist der ungeordneten Wärmebewegung der Moleküle überlagert; ihre Übertragung an weitere Moleküle, wie in der Schallwelle, kann nur mit der Geschwindigkeit erfolgen, die die Moleküle selber haben[1]). Die Ausströmungsgeschwindigkeit eines Gases in den leeren Raum ist aber einfach die Geschwindigkeit der Moleküle selbst, die ihre Bewegung nach Passieren der Ausströmungsöffnung ungehindert fortsetzen. Genaue Gleichheit mit der nach Torricellis Satz berechneten Ausströmungsgeschwindigkeit (M 373) ergibt sich bei Berücksichtigung der Ungleichheit der Molekulargeschwindigkeiten (88). Ins Vakuum tretende Moleküle oder Atome bilden hinter Blenden scharf begrenzte Molekülstrahlen (Atomstrahlen), die man auf Schirmen auffangen kann.

88. Uneinheitlichkeit der Geschwindigkeiten. — Die wie elastische Kugeln aneinander stoßenden Gasmoleküle (32) können nicht alle gleichgroße Geschwindigkeit haben (M 280). Ursprünglich gleiche Geschwindigkeiten würden durch die Stöße von selber ungleich werden. Zwei elastische Kugeln mit gleicher Geschwindigkeit, die unsymmetrisch zusammenstoßen — z. B. wenn bei senkrecht zu einander gerichteten Bahnen die eine Kugel zentral, die andere aber streifend stößt — erhalten nach den Stoßgesetzen (M 278) einseitigen Energieaustausch, wonach sie mit ungleichen Geschwindigkeiten auseinander fahren.

Es muß demnach in einem Gas, dessen Moleküle ohne äußere Einwirkung nur ihren Stößen überlassen sind, eine gewisse Geschwindigkeitsverteilung unter den Molekülen sich herausbilden, die dann dauernd erhalten bleibt, so daß neben einer meistvertretenen Geschwindigkeit größere und kleinere Geschwindigkeiten vorkommen, diese aber um so seltener, je verschiedener sie von ersterer sind.

Diese Geschwindigkeitsverteilung ist nach einfachsten Möglichkeiten aus den allgemeinen Gesetzen des elastischen Stoßes (M 278) ermittelt worden (Maxwell 1860). Es ist danach für jede Geschwindigkeit die Häufigkeit ihres Vorkommens — d. i. der Bruchteil der Gesamtzahl der Moleküle, der die betreffende Geschwindigkeit hat — angebbar, und diese Häufigkeit hängt nur davon ab, welches Vielfache (oder welcher Bruchteil) der meistvertretenen Geschwindigkeit die betreffende Geschwindigkeit ist[2]). Die häufigste, meistvertretene Geschwindigkeit selber ist durch die Temperatur gegeben. Abweichungen nach der Seite der größeren Geschwindigkeiten sind dabei häufiger als nach der Seite der kleineren Geschwindigkeiten. Daher ist auch das Mittel aller vorkommenden Geschwindigkeiten, w', größer als die häufigste (meistvertretene) Geschwindigkeit w''; es ist $w' = (2/\sqrt{\pi})w'' = 1{\cdot}127 w''$. Die Geschwindigkeit w, welche wir aus dem Drucke ermittelten (87), und die auch in der Gl. 81 für die Temperatur vorkommt, ist weder w' noch w'', sondern ist der quadratische Mittelwert aller vorkommenden Geschwindigkeiten (die Quadratwurzel aus dem Mittel der Geschwindigkeitsquadrate), weil Druck und Temperatur durch das Quadrat der Geschwindigkeit bedingt sind (G. 81); es ist $w = \sqrt{3/2}\, w''$. Man kann daher die häufigst vorkommende Geschwindigkeit w'' stets ebenfalls leicht aus dem Drucke finden; es ist $w'' = \sqrt{2p/D}$. Man kann bemerken, daß dies genau die Geschwindigkeit der Ausströmung eines Gases ins Vakuum ist, wie sie in ganz anderer Weise aus Torricellis Satz zu schließen war (M 373, Gl. 371). Wir haben diese Übereinstimmung bereits hervorgehoben (Note zu M 373);

---

[1]) Die überlagerte Bewegung wird durch die Molekülstöße von Schicht zu Schicht weitergegeben. Es können dabei Moleküle, die nicht in Richtung der Schallfortpflanzung bewegt sind, nur mit einer Komponente ihrer Geschwindigkeit mitwirken, und daher muß die Schallgeschwindigkeit etwas kleiner sein als die Molekulargeschwindigkeit, wie es auch wirklich der Fall ist.

[2]) Die Häufigkeit des x-fachen der meistvertretenen Geschwindigkeit ist gegeben durch $x^2 e^{-x^2}$. $(4/\sqrt{\pi})\, x^2\, e^{-x^2}\, dx$ ist der Bruchteil der Molekülanzahl mit dem $(x \pm \frac{1}{2}dx)$ fachen der meistvertretenen Geschwindigkeit, oder auch der Bruchteil einer genügend langen Zeit, während dessen ein betrachtetes Molekül diese Geschwindigkeit hat.

Eine andere Berechnungsweise mit dem Ergebnis der gleichen Geschwindigkeitsverteilung benutzt an Stelle der Stoßgesetze eine bestimmte Annahme über die Möglichkeiten des Wechsels der kinetischen Energie der Moleküle; sie findet sich im Anhang W V behandelt.

mit angenäherter Gültigkeit war sie auch ohne Eingehen auf die Geschwindigkeitsverteilung ersichtlich geworden (87).

89. Atmosphären der Himmelskörper. — Man sieht an den Beispielen der Schallgeschwindigkeit und der Ausströmungsgeschwindigkeit (87), in wie einfacher Weise die Kenntnis der Molekularbewegung in den Gasen Schlüsse erlaubt auf Vorgänge, die zu den molekularen Einzelheiten zunächst in keiner Beziehung zu stehen scheinen. Allerdings gilt die Einfachheit nur bei angenäherter Betrachtung; die vollständige Verfolgung der Molekularbewegung ist immer verwickelt. Oft aber sind schon roh angenäherte Auskünfte von Wert. Ein Beispiel einfacher Betrachtung bietet die an sich wichtige Frage des Entweichens oder Nichtentweichens von Gasen aus der Erdatmosphäre in den Himmelsraum.

Gasmoleküle, die senkrecht nach oben bewegt sind, müssen, wie jeder nach oben geworfene Körper, eine Geschwindigkeitsabnahme erleiden[1]). Daraus folgt, daß in jeder horizontalen, dünnen Schicht der Atmosphäre unten eine größere Mittelgeschwindigkeit der Moleküle vorhanden ist als oben. Da aber an den Grenzflächen jeder solchen Schicht durch die Zusammenstöße der Moleküle ein Ausgleich der Geschwindigkeiten stattfindet, muß die mittlere Molekulargeschwindigkeit beim Aufsteigen von Schicht zu Schicht andauernd so abnehmen wie die Geschwindigkeit eines einzelnen Moleküls abnehmen würde, wenn es allein vom Erdboden aus nach oben aufgestiegen wäre. Die Frage des Entweichens oder Nichtentweichens aus der Atmosphäre ist damit auf die einfache Frage der Bewegung dieses einzelnen Moleküls zurückgeführt. Ist die der Temperatur an der Erdoberfläche entsprechende Geschwindigkeit des Moleküls so groß, daß es entgegen der Gravitation in unendliche Entfernung entweichen kann, so kann die Erde ein Gas dieser Moleküle nicht festhalten.

Dieses Ergebnis ist auf die Atmosphären beliebiger Himmelskörper anwendbar. Es sei die Masse des Himmelskörpers M, sein Radius R, die Masse des Moleküls m, die gesuchte, zum Entweichen erforderliche Geschwindigkeit w. Dann ist die beim Entweichen gegen die Gravitation zu leistende Arbeit $\gamma Mm/R$ [2]); und diese muß gleich sein der kinetischen Energie $mw^2/2$ des Moleküls, aus welcher Gleichsetzung w berechenbar ist unabhängig von m, das herausfällt. Man findet

für	Erdmond,	Merkur,	Erde,	Mars,	Jupiter,	Sonne
w =	2·3 ,	4.5 ,	11 ,	5 ,	59 ,	600 km/sek.

Wir vergleichen mit diesen zum Entweichen nötigen Geschwindigkeiten die doppelten Molekulargeschwindigkeiten, weil diese nach der erläuterten Geschwindigkeitsverteilung (88) noch sehr merklich vorkommen und also für die Möglichkeit des Entweichens gut in Betracht kommen. Diese Geschwindigkeit ist für H_2O-Moleküle bei 0°C 1·2, bei 2000°abs. 3·3 km/sek, woraus man sieht,

[1]) Damit ist auch die Druckabnahme sowie die Temperaturabnahme in der Höhe angezeigt (Gl. 81), deren Berechnung aber günstiger ohne Eingehen auf die Moleküle erfolgt (M. 363 und Anhang M III; W 162 und Anhang W II, 4). Daß ganz allgemein die Moleküle unter dem Einfluß der Schwere nicht genau gerade Linien, sondern Wurfparabeln beschreiben, ist ebenfalls ersichtlich, ist aber wegen der meist großen Kürze der freien Weglängen (90, 95) nur in besonderen Fällen von Belang.

[2]) Es ist die Summe aller Produkte aus Gravitationskraft (M 213) und Wegdifferential dr zu bilden: $\int_R^\infty \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma \frac{Mm}{R}$.

daß der Mond jedenfalls in seinem ursprünglichen, heißen Zustande kein Wasser festhalten konnte, woraus wohl das gegenwärtige Fehlen von Wasser auf ihm erklärlich ist. Die Erde und die anderen Planeten von genügender Gravitation können, wie die Zahlen zeigen, sehr wohl Wasser festhalten. Die Erde kann sogar Wasserstoffgas festhalten, dessen doppelte Molekulargeschwindigkeit bei 0°C 3·7 km/sek ist, und um so mehr überhaupt alle übrigen Gase. Bei 6000°abs., der Temperatur der Sonnenoberfläche (185), ist die Molekulargeschwindigkeit von H_2 8·7, von einatomigem H 12 km/sek. Die Erde könnte also in glühendem Zustande keinen Wasserstoff festhalten, sie ist dazu zu klein; wohl aber kann das die Sonne, in deren Atmosphäre Wasserstoff auch in der Tat durch Fraunhofers Linien als wirklich vorhanden nachgewiesen ist (O 91).

Man sieht daraus, daß das an die Gegenwart von Luft und Wasser, jedenfalls von Gasen und Flüssigkeiten gebundene organische Leben nur auf Himmelskörpern von gehöriger Gravitation und daher auch einiger Größe möglich ist, ebenso daß Himmelskörper von hoher Temperatur besonders groß sein müssen, um nicht Verdampfungsverluste zu erleiden.

90. Freie Weglängen der Moleküle. — Die Länge des Weges, welchen ein Gasmolekül von einem Zusammenstoß bis zum nächsten gradlinig mit der schon ermittelten Geschwindigkeit zurücklegt — kurz „freie Weglänge" genannt —, hängt nicht nur von der Zahl der Moleküle in der Volumeinheit ab, sondern vor allem von der Größe der Moleküle. Wären die Moleküle nur Punkte mit dem Durchmesser Null (oder wären sie für einander frei durchdringlich), so würden gar keine Zusammenstöße stattfinden, und die freie Weglänge wäre bei beliebiger Zahl der Moleküle unendlich. Dies stimmt aber nicht mit dem wirklichen Verhalten der Gase überein, sondern dasselbe zeigt das Bestehen bestimmt begrenzter freier Weglängen an, wie alsbald zu sehen (91—95).

Die für die Zusammenstöße maßgebende Größe der Moleküle wird berücksichtigt, wenn man jedes Molekül in eine Kugel eingeschlossen denkt, deren Radius r so groß gewählt wird, daß im Mittel über alle gegenseitigen Orientierungen, in denen zwei Moleküle zusammentreffen können, Zusammenstoß der Moleküle erfolgt, wenn die beiden sie umschließenden Kugeln zur Berührung kommen. Man kann auch sagen, man nimmt die Moleküle kugelförmig mit dem Radius r an, weil ihre tatsächliche, wohl nicht kugelsymmetrische Beschaffenheit im Mittel über viele Zusammenstöße bei den stets wechselnden Orientierungen gar nicht in Betracht kommt, sondern nur die mittlere Abmessung r (vgl. 32). Wir nennen den so definierten Radius r den „gaskinetischen Molekülradius". Der gaskinetische Moleküldurchmesser 2r ist der mittlere Abstand der beiden Molekülmittelpunkte bei einem Zusammenstoß. $\frac{4}{3}r^3\pi$ ist das für seinesgleichen undurchdringliche Eigenvolum des Moleküls, das für die betreffende Molekülsorte geltende Maß der schon von vornherein festgestellten Undurchdringlichkeit der Materie (M 16).

Um den obwaltenden Zusammenhang zwischen freier Weglänge L, Zahl N der Moleküle in der Volumeinheit und Molekülradius r zu finden, beachte man eines der Moleküle, das eben einen Zusammenstoß erlitten hat und in Weiterbewegung begriffen ist. Das Molekül durcheilt dabei einen um die Bahn seines Mittelpunkts als Achse gelegenen Zylinderraum, und sobald in diesem Raum ein anderes Molekül getroffen wird, findet der nächste Zusammenstoß statt.

Die gesuchte freie Weglänge L ist also die Länge des Zylinders, in welchem 1 Molekül sich findet. Um hierbei nur Molekülmittelpunkte betrachten zu müssen, schreibt man dem Zylinder den Radius 2r zu; es findet dann Zusammenstoß statt, wenn im Zylinderraum $(2r)^2\pi L$ ein Molekülmittelpunkt sich findet, d. h. wenn $4r^2\pi L = 1/N$. Denn der Raum, in welchem 1 Molekülmittelpunkt sich findet, ist 1/N, weil N Mittelpunkte in der Volumeinheit sind. Man hat aus dieser Gleichung $L = 1/4r^2\pi N$.

Hierbei sind die Moleküle, auf welche das betrachtete Molekül stoßen soll, ruhend gedacht. Sind sie bewegt, so ändert dies ein wenig die freie Weglänge. Dem betrachteten Molekül entgegenkommende Moleküle verkürzen dieselbe, von ihm weglaufende verlängern sie; doch heben diese gegenteiligen Wirkungen einander nicht ganz auf. Berücksichtigt man dies, indem man Mittelwerte für alle möglichen Fälle nimmt, so erhält man bei Mitberücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung (88) eine Verkürzung der freien Weglänge mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$, so daß wird

$$L = \frac{1}{4\sqrt{2}\,r^2\pi N}\,. \qquad 90)$$

91. Die wichtige Gleichung 90 verbindet 3 Unbekannte miteinander: L, r und N, — Weglänge, Molekülradius und Molekülzahl. Um dieselben einzeln zu finden, müssen noch weitere Zusammenhänge beigezogen werden:

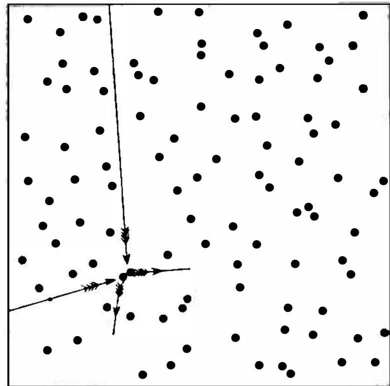
Einerseits können zur Gewinnung einer zweiten Gleichung neben 90 die Erscheinungen der Diffusion, der Wärmeleitung und der inneren Reibung der Gase benutzt werden, was wir noch eingehend entwickeln werden. Besonders die innere Reibung ist für genaue Ergebnisse wichtig geworden, weil sie sowohl der Messung als der Berechnung am besten zugänglich ist.

Andererseits liefert die Raumerfüllung der Materie im flüssigen oder gar festen Zustand ein Maß für das gegenseitig undurchdringliche Gesamtvolum $V_N = \frac{4}{3}r^3\pi N$ der N Moleküle, die in diesen Zuständen mit nur wenig Zwischenräumen zusammengelagert sind, und dies liefert die dritte Gleichung für die 3 Unbekannten.

Wir führen die eingehende Verwertung dieser Zusammenhänge im weiteren vollständig durch (94—103). Vorerst sei betrachtet, was aus Bekanntem im Groben auch schon ohne Messungen und Rechnung ersichtlich wird (92, 93).

92. Die Diffusion, eine unmittelbare Erscheinung der Molekularbewegung (M 366), zeigt nach Kenntnis der molekularen Geschwindigkeiten (87), daß die freien Weglängen in Gasen von gewöhnlichem Druck außerordentlich klein sein müssen. Denn die Diffusion ist ein langsamer Vorgang. Man kann z. B. den leicht sichtbaren gelben Bromdampf, der schwerer ist als Luft, viele Minuten lang frei mit horizontaler, wenig verwaschener Grenzfläche gegen Luft liegen sehen, ehe starke Vermischung eintritt; auch weniger schwere Gase, wie Kohlensäure, Sauerstoff, halten sich so in ruhiger Luft auffallend gut abgesondert. Dabei sind die Moleküle dieser Gase mit Geschwindigkeiten bewegt, die sie in Bruchteilen einer Sekunde in große Entfernungen zerstreuen würden, wenn ihre Wege ununterbrochen gradlinig wären. Die tatsächliche Langsamkeit der Diffusion zeigt, daß die Wege durch die Zusammenstöße in ein sehr feines Zickzack geknickt sein müssen, wobei nur die Unregelmäßigkeiten dieser Knickungen die Moleküle allmählich von der Stelle bringen.

Es ergibt sich danach ein Bild von der Beschaffenheit eines Gases, wie es an Abb. 66 erläutert werden kann. Die Abbildung stellt — im Quantitativen schon mit Benutzung späterer Zahlenangaben (95, 102) — einen Schnitt von 1 Zehnmilliontel mm Dicke durch atmosphärische Luft von gewöhnlichem Druck und Zimmertemperatur in 250000-facher Vergrößerung dar. Alle Moleküle, deren Mittelpunkte in die Schichtdicke fallen, sind als Punkte gezeichnet, die allerdings selbst in dieser Vergrößerung noch wesentlich zu dick sind. Die Zahl der umfaßten Moleküle ist bei ihrer schnellen Bewegung von rund 500 m/sek (87) steten Schwankungen unterworfen, doch bleibt sie im Mittel über genügend lange Zeiten gleich; die Anordnung ist stets regellos wechselnd. Die mittlere freie Weglänge ist in dieser Vergrößerung 2·5 cm; sie geht also, sofern sie in die Ebene des Schnitts fällt, durch das halbe Bild[1]). Einige Pfeile, die zu einem augenblicklichen Zusammenstoß gehören, zeigen die langen gradlinigen Strecken an, die frei zwischen den Molekülen möglich sind.



Fläche (0·0002 mm)², Dicke 0·0000001 mm.

Abb. 66. Gasmoleküle.

Je geringer der Gasdruck und daher auch die Zahl N der Moleküle in der Raumeinheit, desto größer werden die freien Weglängen, wie es Gl. 90 anzeigt. Bei hohen Gasverdünnungen, die mit guten Luftpumpen leicht erreichbar sind, 10^{-5} mm Quecksilberdruck oder darunter, reichen die freien Wege der Moleküle in einem Litergefäß schon von Gefäßwand zu Gefäßwand.

Von der Temperatur hängt die Weglänge in erster Linie nicht ab, entsprechend dem Nichtvorkommen der Molekulargeschwindigkeit in Gl. 90; eine geringe Abhängigkeit kommt durch Veränderlichkeit des Molekülradius r zustande (98, 106).

93. Mittlerer Molekülabstand. — Man sieht aus der Abb. 66 auch, daß die freie Weglänge wesentlich größer ist als der mittlere Abstand zweier benachbarter Moleküle. Für diesen Abstand l gilt

$$l = 1/\sqrt[3]{N}\ ; \qquad 93)$$

denn wenn N Moleküle in der Volumeinheit sind, kommt für 1 Molekül das Volum 1/N, das ist ein Würfel von der Kante $1/\sqrt[3]{N}$, und die mittlere Lage des Moleküls im Würfel ist dessen Mittelpunkt, wonach l — Gl. 93 — der mittlere Molekülabstand ist.

Daß l in Gasen stets kleiner sein muß als die freie Weglänge L, dies folgt aus der Gl. 90. Es ist nach dieser Gleichung $4\sqrt{2}r^2\pi L = 1/N = l^3$, wonach $l : L = \pi\sqrt{2}(2r)^2 : l^2$, und da in Gasen stets $l > 2r$ und wohl auch $l > \sqrt{\pi\sqrt{2}} \cdot 2r$ ist, weil die Moleküle keineswegs einander dauernd fast berühren, so muß nach der Proportion auch $L > l$ sein.

[1]) Die Weglängen sind, wie die Geschwindigkeiten, uneinheitlich. Es ist auch die Weglängenverteilung auf Grund einfachster Annahmen eingehend durch Rechnung untersucht. Große Abweichungen von der mittleren Weglänge L, die wir hier allein beachten, kommen danach selten vor.

94. Innere Reibung der Gase. — Die Reibung in Gasen gibt bei messender Untersuchung (M 407) eine der besten Möglichkeiten zur Ermittelung der freien Weglänge; denn die Reibungskonstante hängt in einfachster Weise mit Dichte, Molekulargewicht und Weglänge des Gases zusammen, wie die folgende Überlegung zeigt.

Es ist die Reibungskonstante η definiert als Kraft, tangential auf die Flächeneinheit wirkend, wenn normal zur Fläche das Geschwindigkeitsgefälle Eins vorhanden ist (M 403). In Abb. 110 der Mechanik (Bd. I), die dies veranschaulicht, ist f f die betrachtete Fläche (senkrecht zur Zeichnungsebene stehend), a b die Richtung des Geschwindigkeitsgefälles und $(v_2—v_1)/d$ die Größe dieses Gefälles. Es wirkt dann auf die Fläche von der Seite b her die Reibungskraft in Richtung von v_2, und diese Kraft auf das Flächenstück 1 ist η, wenn $(v_2—v_1)/d = 1$ ist.

In einem genügend verdünnten Gas kann die Reibungskraft nur durch die Stöße der Moleküle ausgeübt werden; eine andere Wirkung von Schicht zu Schicht gibt es in einem solchen Gas nicht, wenn die bisher entwickelten Vorstellungen von der charakteristischen Beschaffenheit eines Gases richtig sind. Eben dafür hat sich hiermit eine große Zahl neuer Prüfungsmöglichkeiten ergeben, welche alle wieder die Richtigkeit gezeigt haben (96, 99, 104, 105, 110, 114, 118, 148). Es handelt sich also um eine ebensolche Kraftwirkung auf die Flächeneinheit wie beim Gasdruck (34), der auch nur durch die Stöße der Moleküle zustande kommt, nur daß hier die Kraft tangential ist und infolgedessen nur durch die in Richtung der Fläche vorhandene Geschwindigkeitskomponente $v_2—v_1$ der Moleküle ausgeübt wird. Der Abstand d, bis zu welchem diese Geschwindigkeitskomponente im Gase durch die bewegten Moleküle übertragen wird, ist die freie Weglänge L; es ist daher $d = L$ zu setzen, und da das Gefälle $(v_2—v_1)/d = 1$ sein soll, ist die für die Kraft bestimmende Geschwindigkeit $v_2—v_1$ durch L gegeben.

Die Berechnung von η erfolgt nun ganz wie die Berechnung des Gasdruckes (34); demnach ist η nach Definition doppeltes Produkt aus der an die Fläche 1 in der Zeit 1 kommenden Masse $\frac{1}{6}Nmw$, und der durch L gegebenen Geschwindigkeit, d. i.

$$\eta = \tfrac{1}{3}\,N\,m\,w\,L. \qquad 94)$$

Dieses Ergebnis dieser sehr einfachen, nur auf die Hauptsache gerichteten Betrachtung wird bei Berücksichtigung der Geschwindigkeits- und Weglängen-Ungleichheiten und einiger fraglicher Einzelheiten der Geschwindigkeitsübertragung durch die Stöße nur im Zahlenfaktor $\frac{1}{3}$ ein wenig geändert; auf die noch zu ziehenden Schlüsse hat das keinen wesentlichen Einfluß.

95. Freie Weglängen berechenbar. — Ist η gemessen — sei es mittels Strömung durch enge Röhren oder mittels drehender Scheiben (M 407, Tab. 11[1])) —, so kann unmittelbar die mittlere freie Weglänge L berechnet werden; denn die anderen Größen in der Gl. 94 sind bekannt: $Nm = D$ ist die gewöhnliche Dichte des Gases, w die schon gefundene Geschwindigkeit der Moleküle (87)[2]).

Man findet für Sauerstoff von 0°C und 1 Atm. Druck $L = 1{\cdot}0 \cdot 10^{-5}$ cm, für Wasserstoff $L = 1{\cdot}8 \cdot 10^{-5}$ cm.

Dies sind also die schon aus der Diffusion als sehr klein geschlossenen (92),

---

[1]) Um einheitliche Einheiten (C G S) zu haben, ist η hier in dyn/cm² umzurechnen (M 192).

[2]) Da w in Gl. 94 in erster Potenz vorkommt, ist hier der gewöhnliche Mittelwert der Geschwindigkeiten einzusetzen (w' in 88), das $\sqrt{8/3\pi} = 0{\cdot}921$-fache des aus dem Druck berechneten quadratischen Mittelwerts.

gradlinigen Wege der Moleküle von Zusammenstoß zu Zusammenstoß in Gasen von gewöhnlichem Druck; sie sind von der Größenordnung 0·0001 mm, weniger als $^1/_{100}$ Haaresbreite.

96. Gesetzmäßigkeiten der Gasreibung. — Messungen der inneren Reibung bei Gasen von verschiedenem Druck und verschiedener Temperatur haben ein vortreffliches Mittel gegeben zur Prüfung der Gl. 94 und damit auch der ihr zugrunde liegenden Kenntnis von der Beschaffenheit der Gase und den Bewegungen ihrer Moleküle. Die Kenntnis hat sich dabei vollkommen bewährt wie das Folgende im einzelnen zeigt (97, 98).

97. Die innere Reibung war nach Gl. 94 unabhängig vom Druck des Gases zu erwarten; denn die Dichte $D = Nm$ ist dem Druck proportional, die Weglänge L aber ihm verkehrt proportional (Gl. 90), was sich aufhebt, und die Geschwindigkeit w ist überhaupt unabhängig vom Druck (87). Dieses Ergebnis war befremdlich: Luft von 10 Atm. Druck sollte nicht zäher, dickflüssiger sein als Luft von $^1/_{10}$ Atm. Druck. Die Messungen zeigten aber doch, daß dem so ist, wie es Gl. 94 entspricht.

Auch bei noch viel geringeren Drucken nimmt die innere Reibung nicht ab. Nur bei äußerster Verdünnung verschwindet mit der Luft schließlich auch ihre Reibung. Dies hat aber mit Gl. 94 nichts zu tun; denn dieselbe setzt freie Weglängen L von Molekül zu Molekül voraus, die bei äußersten Verdünnungen in den dann zu kleinen Versuchsgefäßen gar nicht vorhanden sind; die Moleküle bewegen sich da von Wand zu Wand (vgl. 92), und für diesen Fall war Gl. 94 nicht gerechnet.

Bei sehr hohen Drucken, gegen 100 und mehr Atm., werden die Gase zäher als es Gl. 94 entspräche; es treten aber dann auch Kräfte zwischen den dauernd in große Nähe gebrachten Molekülen auf, wie es die Ungültigkeit von Boyles und Mariottes Gesetz bei solchen Drucken anzeigt (39, M 359), und dies ist in Gl. 94 nicht enthalten; sie bezieht sich nicht auf diesen Fall.

98. Über den Einfluß der Temperatur auf die Gasreibung sagt Gl. 94, daß heiße Gase zäher sein müssen als kalte. Denn es bleibt bei steigender Temperatur und ungeändertem Volum die Dichte $D = Nm$ ungeändert, womit auch die Weglänge L ungeändert zu erwarten ist; die Geschwindigkeit w steigt aber, und im selben Maße, nämlich proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur, ist auch die innere Reibung η steigend zu erwarten. Dies war wieder ein überraschendes Ergebnis, insofern als Flüssigkeiten entgegengesetzt sich verhalten; sie werden in der Hitze dünnflüssiger. Die Messungen haben aber auch dieses Ergebnis bestätigt.

Bei verfeinerten und bis zu besonders hohen Temperaturen ausgedehnten Messungen zeigte sich, daß die Reibung sogar noch etwas stärker steigt als es der Wurzel aus der Temperatur entspräche. Dies ist im Sinne der Gl. 94 als geringes Steigen der Weglängen L mit der Temperatur zu deuten, was nach Gl. 90 ein Sinken des gaskinetischen Molekülradius r bedeutet. Dieses Ergebnis ist nach erlangter Kenntnis über die innere Beschaffenheit der Atome und Moleküle nicht verwunderlich, da sie sehr lose Gebilde mit viel freiem Raum in ihrem Inneren sind (E 491, 537). Mit je größeren Geschwindigkeiten die Moleküle aneinander stoßen, desto kleiner kann der Abstand der Molekülmittelpunkte beim Stoße werden. Diese so durch die Reibungsmessungen angezeigte Abnahme des Molekülradius ist aber nur gering, z. B. bei Luft von 0°C bis 500°C nur im Verhältnis von 1 : 0·92.

99. Dieselben Auskünfte über die freien Weglängen (95), wie aus den Reibungsmessungen, erhält man auch aus dem quantitativen Studium der Wärmeleitung in Gasen (148) und der schon betrachteten Diffusion (92). Auch diese Vorgänge haben ihre Gesetzmäßigkeiten, die aus der Kenntnis von der Bewegung der Gasmoleküle hergeleitet werden konnten und die durch Messungen als der Wirklichkeit entsprechend sich gezeigt haben, was wieder eine Befestigung dieser Kenntnis bedeutet. Die genauesten Zahlenwerte für die Weglängen lieferte aber doch die Reibung; Wärmeleitung und Diffusion sind genauen Messungen weniger gut zugänglich.

100. Molekulare Querschnittsumme. — Aus der hiermit gut gesicherten Kenntnis der freien Weglängen L (Gl. 90) folgt unmittelbar die Querschnittsumme q der in 1 cm^3 enthaltenen Moleküle. Diese ist $q = r^2 \pi N = 1/4\sqrt{2}L$. Sie bedeutet die Fläche, welche sämtliche N Moleküle der Volumeinheit, in einer einzigen Schicht lückenlos ausgebreitet, bedecken würden. Die Querschnittsumme q gibt ein Maß für die Feinzerteilung, in welcher die Materie in Gestalt ihrer Moleküle gegeben ist. Je weitgehender die Feinzerteilung, um so größer muß die Fläche q ausfallen.

Es ergibt sich nach den für L gefundenen Zahlen (95) bei 1 Atm. Druck und 0°C für Sauerstoff $q = 18000\,cm^2/cm^3 = 1{\cdot}8\,m^2/cm^3$, für Wasserstoff $1{\cdot}0\,m^2/cm^3$.

Dies sind erstaunlich große Flächen für die geringe, in 1 cm^3 Gas von Atmosphärendruck vorhandene Menge von Materie. Die hiermit ersichtliche große Feinzerteilung der Materie stimmt mit der schon aus frühen Schlüssen bekannten unwahrnehmbaren Kleinheit der Atome und Moleküle (M 17).

101. Gesamtvolum der Moleküle. — Die Querschnittsumme $q = r^2\pi N$ enthält die beiden Unbekannten r, den Molekülradius, und N, die Zahl der Moleküle im cm^3. Um diese Unbekannten einzeln zu finden, wird das Eigenvolum $V_N = \frac{4}{3} r^3 \pi N$ der N Moleküle beigezogen (vgl. 90, 91), das dieselben Unbekannten in anderer Verbindung enthält.

Der flüssige oder feste Aggregatzustand bietet dieses Eigenvolum nur wenig vergrößert einerseits durch die Zwischenräume, die infolge der Wärmebewegung aufrechterhalten werden, andererseits durch die Räume, welche wegen der Eigenform der Moleküle, die wohl keinen vollständigen Zusammenschluß gestattet, auch beim absoluten Nullpunkt noch frei bleiben müssen. Die Abschätzung dieser Zwischenräume ist unsicher. Hierin lag anfänglich eine besondere Schwierigkeit für die gesicherte Ermittelung von r; doch war die Unsicherheit z. B. für Sauerstoff nicht mehr groß, seit flüssiger Sauerstoff zur Verfügung ist, bei dessen tiefer Temperatur nicht viel Wärmebewegung vorhanden ist. Man erhält aus 1 m^3 gasförmigem Sauerstoff von 0°C und 1 Atm. rund 1 l flüssigen Sauerstoff, aus 1 cm^3 also $0{\cdot}001\,cm^3$. Es wäre daher $V_N = 0{\cdot}001$, abgesehen von den durch die Form der Moleküle bedingten Zwischenräumen, die überhaupt nur vermutungsweise in Rechnung gesetzt werden können, die aber wegen der Molekularkräfte, die die Moleküle im flüssigen oder gar festen Zustand zueinander ziehen, keinesfalls sehr groß sein können (vgl. 102).

102. Größe der Moleküle, Zahl derselben im cm^3, Gewicht des Wasserstoffatoms. — In dieser Weise, aus Querschnittsumme und Gesamtvolum, wurden schon früh Molekülradien angenähert ermittelt (Loschmidt 1865). Zugleich ergibt sich dabei auch die Zahl N der Moleküle im cm^3 Gas. Mit N kennt man aber weiter aus dem spezifischen Gewicht des Gases auch das Gewicht eines Moleküles des Gases, das absolute Molekulargewicht in gr. Dann endlich sind aus der bekannten Zusammensetzung des Moleküls auch die Gewichte seiner Atome angebbar, womit aus den schon früh erschlossenen Atomgewichts-Verhältniszahlen (relativen Atomgewichten, mit H = 1, O = 16) auch die Kenntnis der absoluten Gewichte aller Atome und Moleküle in Grammen gewonnen ist.

Es sei als Beispiel für die eingehende Berechnung des Molekülradius r Sauerstoff betrachtet. Es wurde das spezifische Gewicht festen Sauerstoffs bis nahe an den absoluten Nullpunkt herab gemessen; es beträgt danach bei diesem Nullpunkt selbst, also ohne Wärmebewegung,

rund $S = 1{\cdot}5$ gr/cm³, während das Gas bei 0°C und 1 Atm. das spezifische Gewicht $s = 0{\cdot}0013$ gr/cm³ hat. Der Quotient beider spezifischen Gewichte, $s/S = 0{\cdot}00087$, ist noch, um V_N zu erhalten, wegen der Zwischenräume zu vermindern. Nimmt man für jedes Molekül einen Würfelraum $(2r)^3$ an, in welchem das Molekül nur den Raum der eingeschriebenen Kugel $\frac{4}{3}r^3\pi$ ausfüllt, so ist der die Zwischenräume berücksichtigende Faktor $\frac{4}{3}\pi/8 = 0{\cdot}52$ und somit $V_N = 0{\cdot}52 \cdot 0{\cdot}00087 = 0{\cdot}00045$ (etwa die Hälfte des aus der Verflüssigung geschätzten Wertes, 101).

Damit ergibt sich aus $V_N = \frac{4}{3}r^3\pi N$ und $q = r^2\pi N$ mit deren soeben und unter 100 gefundenen Zahlenwerten der Halbmesser des Sauerstoffmoleküls $r = 3V_N/4q = (3 \cdot 0{\cdot}00045/4 \cdot 18000)\,\text{cm} = 1{\cdot}9 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}$. Die Halbmesser anderer Moleküle zeigen sich von gleicher Größenordnung (vgl. M Tab. 1, Bd. I).

Für $N = q/r^2\pi$ ergibt sich daraus rund die Zahl $20 \cdot 10^{18}$, das sind 20 Trillionen Moleküle im cm³.

Wir bezeichnen diese Zahl mit N_0, da sie auf Gas von 0°C und 1 Atm. Druck sich bezieht; sie ist eine allgemeingültige Konstante der Natur, insofern sie, wie wir sahen (82), für alle Gase gleich ist[1]).

Das Gewicht des Wasserstoffatomes, die gewöhnliche Einheit der Atomgewichte, ergibt sich aus dem Gewicht von 1 cm³ Sauerstoffgas, 0·0013 gr, und der Zahl N_0 der darin befindlichen O_2-Moleküle, deren jedes $2 \cdot 16 = 32$-mal das Gewicht des H-Atoms hat (83), $H = 0{\cdot}0013\,\text{gr}\,\text{cm}^{-3}/32 \cdot 20 \cdot 10^{18}\text{cm}^{-3} = 2 \cdot 10^{-24}\,\text{gr}$.

103. Dies sind die wichtigen, grundlegenden Auskünfte über Atome und Moleküle, deren Größen und Massen in gewöhnlichem Maße, die durch die Untersuchung der Natur der Wärme erhalten wurden. Damit kam man zum ersten Male hinaus über die schon frühe den Erfahrungen der Chemie entnommenen Kenntnisse von den relativen Gewichten der Atome und Moleküle (23), die übrigens auch erst hierbei ihre Festigung und volle Befreiung von Zweifeln erhielten (82).

Die Auskünfte stimmen mit dem schon ohne Zahlen Erwarteten (92, 93) überein. Die Feinzerteilung, in welcher die Materie in den Atomen gegeben ist, ist außerordentlich weitgehend: Die Abmessungen der Atome sind von der Größenordnung 10^{-8} cm, d.i. Zehnmilliontel Millimeter. 0·1 $\mu\mu$; die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter gewöhnlichen Gases geht in die Trillionen; die Gewichte der Atome und Moleküle zählen nach Quadrilliontel Gramm.

104. Übereinstimmung mit dem elektrischen Elementarquant und Verbesserung der Genauigkeit durch Messung desselben. — Die Erfahrungen über die chemischen Wirkungen elektrischer Ströme haben einen mit der Waage gut feststellbaren quantitativen Zusammenhang zwischen dem Gewicht des H-Atoms und der Größe des durch eben diese Erfahrungen aufgedeckten elektrischen Elementarquants ergeben (E 193, 194). Daher hat die später eröffnete Möglichkeit, das Elementarquant durch Beobachtung an Elektrizitätsträgern in Gasen gut zu messen (E 195), auch einen neuen Weg zur Ermittelung des Gewichtes des Wasserstoffatoms gegeben. Dieser Weg ist frei von der Genauigkeitsbeschränkung, welche durch die Unbekanntschaft mit den Einzelheiten der Zusammenlagerung der Moleküle in den flüssigen und festen Körpern bedingt ist (101, 102); er ist dadurch höchst wertvoll geworden zu besonders genauer Festlegung der absoluten Atomgewichte und damit auch der Zahl N_0

---

[1]) Man nennt N_0 auch „Loschmidts Zahl im cm³". Ihre genauere Ermittelung aus dem elektrischen Elementarquant siehe unter 104.

der Gasmoleküle im cm^3. Es ergab sich so $H = 1{\cdot}6 \cdot 10^{-24}$ gr und $N_0 = 28 \cdot 10^{18}\,cm^{-3}$ (siehe Tab. 45, Bd. III). Die Übereinstimmung mit den auf dem ganz anderen Wege gewonnenen Ergebnissen (102) ist so gut als nur zu erwarten war, und dies ist ein gewichtiger **Wahrheitsnachweis** für diese Ergebnisse sowohl als für die Vorstellungen, welche von beiden Seiten her zu den Ergebnissen geführt haben.

105. Noch ein Weg zur Ermittlung von N_0 hat sich aus dem Studium der Wärmestrahlung ergeben (181), und er hat ebenfalls zum gleichen Ergebnis geführt.[1])

Daß dann auch noch bei anderen Untersuchungen die Zahl N_0 aufgetreten ist, ist bei ihrer allgemeinen Bedeutung nicht zu verwundern, ebenso daß sie nach so guten Feststellungen fortlaufend nur weitere Sicherung erfahren hat.

106. Molekülradien im gasförmigen und im festen Zustand. — Man kann jetzt mit dem gesicherten, in der Genauigkeit verbesserten Werte von N_0 (103—105) auch die Molekülradien ohne Benutzung ungenauer Kenntnisse berechnen und zwar sowohl für den Gaszustand als auch für den festen Zustand.

Für den Gaszustand geschieht es mit Zuhilfenahme der Querschnittsumme q aus den Messungen der inneren Reibung des Gases bei 0°C. Man hat so (100) $r = \sqrt{q/\pi N_0}$, was für Sauerstoff $r = 1{\cdot}4 \cdot 10^{-8}\,cm$ gibt, als den tatsächlich beiden Zusammenstößen der O_2-Moleküle bei 0°C wirksamen gaskinetischen Radius (90).

Für den festen Zustand ist mittels N_0 oder auch H unmittelbar das Volum $(2r)^3$ des Würfels berechenbar, welcher dem gegebenen Molekül bei 0°abs., also ohne Wärmebewegung als Raumanteil zugehört. Man hat $(2r)^3 = M \cdot H/S$, wobei M das gewöhnliche, mit $H = 1$ gerechnete Molekulargewicht, also MH das Molekulargewicht in gr, und S das spezifische Gewicht im festen Zustand beim absoluten Nullpunkt ist. Es ist dann die halbe Würfelkante r das richtige Maß für den raumbemessenden Molekülhalbmesser; denn Berührung der benachbarten Moleküle findet bei 0°abs., ohne Wärmebewegung, jedenfalls so weit statt, als es den Kräften der betreffenden Moleküle entspricht. Man erhält so für O_2 mit $S = 1{\cdot}5\,gr/cm^3$(102) $r = 1{\cdot}6 \cdot 10^{-8}\,cm$.

Es ist bemerkenswert, daß hiernach das Molekül, bzw. die Atomgruppe[2]) O_2, im festen Zustand deutlich größer sich zeigt als im Gaszustand, und auch andere Moleküle zeigen dasselbe. Verwunderlich ist dies nicht. Denn einerseits fanden wir die Molekülradien auch im Gaszustand ungleich groß je nach der Temperatur, d. i. nach der Größe der kinetischen Energie, mit welcher die Moleküle zusammenstoßen (98). Und andererseits zeigte die Betrachtung der Molekularkräfte im festen und flüssigen Zustand (M 248, 341), sowie die Ungestörtheit des Atominneren (O 81, 105, E 500), daß benachbarte Moleküle nur mit ihren Außenteilen einander anziehen, auch im festen Zustand, so daß trotz der großen Molekularkräfte keine Zusammenpressung der ganzen Moleküle durch diese Kräfte zu erwarten ist.

Tab. 1 (Bd. I) gibt in solcher Weise ermittelte Molekül- bzw. Atomdurchmesser 2r für eine Anzahl von Stoffen. Das He- und das C-Atom[3]) zeigen sich als die kleinsten Atome, das Cs-Atom als das größte.

Ordnet man die Elemente nach steigendem Atomgewicht, wie in der Atomtabelle (M 23), so schwanken die Atomdurchmesser periodisch; die Höchstwerte liegen bei den Alkaliatomen Li, Na, K, Rb, Cs; dazwischen, wie z. B. bei C, sind Mindestwerte.

Man kann folgende Abstufungen, Moleküle betreffender kleiner Größen merken, jeweils fast mit Verzehnfachung des Ausmaßes: Atomradien < Molekülabstand in Gasen von 0° und 1 Atm. < Wirkungsweiten der Molekularkräfte in Flüssigkeiten < freie Weglänge in Gasen von 0° und 1 Atm. < sichtbare Lichtwellenlängen. Die Atomradien zählen nach $10^{-8}\,cm$, die sichtbaren Lichtwellen nach $10^{-5}\,cm$.

---

[1]) Siehe Anhang W V, 8 u. 10.

[2]) Vgl. über Moleküle und Atome in festen Körpern M 250.

[3]) Berechnet aus dem spezifischen Gewicht $S = 3{\cdot}52\,gr/cm^3$ des Diamanten. Die aus den Hochfrequenzbeugungs-Spektren (O 160) gefolgerten Abstände (bez. Durchmesser) der C-Atome im Diamanten sind so klein, daß sie dem spezifischen Gewicht widersprechen. Die Deutung dieser Spektren ist noch nicht genügend in allen Zusammenhängen nachgeprüft.

107. Kleinwimmel. — Bemerkenswerte, unmittelbar sichtbare Zeichen der Wärmebewegung der Moleküle erhält man bei mikroskopischer Beobachtung sehr kleiner Partikel, am besten in Flüssigkeiten, aber auch in Gasen, wo nur die Beobachtung etwas umständlicher ist. Die Partikel zeigen unregelmäßige, teils zuckende Bewegungen von wechselnder Richtung, wobei sie langsam ihre Stelle verlassen, von der sie schließlich beliebig weit sich entfernen können. In Wasser aufgeschwemmte, schwebend bleibende Harzpartikelchen aus alkoholischer Lösung sind gut geeignet zur Beobachtung: aber auch sonstige Körperchen unter etwa 0·01 mm Größe zeigen diesen „Kleinwimmel" und zwar mit um so schnelleren Bewegungen, je kleiner sie sind.

Diese Bewegungen sind nach dem über die Wärmebewegung der Moleküle Ergründeten verständlich. Alle mikroskopisch beobachtbaren Partikel sind sehr viel größer als die Molekülabstände in Gasen von gewöhnlichem Druck und gar in Flüssigkeiten. Daher werden die Partikel allseitig von sehr vielen Molekülen nahe gleichzeitig gestoßen. Bei genügender Zahl der stoßenden Moleküle, d. i. bei genügender Größe des Partikels, ergibt sich sehr genau die Resultierende Null der Stoßkräfte auf das Partikel, wie es bei der allseitig gleichförmigen Verteilung der Bewegungsrichtungen der Moleküle im Mittel über sehr viele Stöße zu erwarten ist. Je weniger Moleküle aber nahe gleichzeitig stoßen, d. i. je kleiner das Partikel ist, desto mehr müssen die Ungleichheiten der Einzelstoßkräfte zur Geltung kommen, und diese Ungleichheiten kommen im Kleinwimmel zum Vorschein[1]).

Wäre das Partikel ein einzelnes Molekül, so würde es, als Extremfall von Kleinwimmel, ganz die Bewegungen ausführen, die wir an den Gasmolekülen schon ergründet haben und die übrigens in Gestalt der Diffusion an Vielzahlen von Molekülen auch ohne Mikroskop sichtbar sind (M 365).

108. Staubfreie Räume. — Befinden sich in Luft schwebende kleine Partikel nahe an einer Wand, die wärmer ist als die Luft, so empfangen sie von der Wand her die Stöße wärmerer, d. i. schneller bewegter Moleküle, von der anderen Seite her die Stöße langsamer bewegter Moleküle. Infolgedessen werden die Partikel von der warmen Wand weggetrieben; zu einer kalten Wand werden sie hingetrieben.

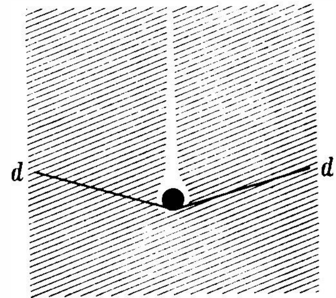


Abb. 67. Rauchfreier Raum.

Man bemerkt dies leicht, wenn viele Partikel, z. B. in Gestalt von Rauch oder Staub gegenwärtig sind. Es entsteht um einen erhitzten Körper ein rauchfreier oder staubfreier Raum; an einem kalten Körper setzt sich dagegen der Rauch oder Staub fest. Den rauchfreien Raum sieht man z. B. leicht an einer erhitzten Metallstange, die auf Drähten d d unterstützt in rauchiger Luft schwebt (Abb. 67). Besieht oder projiziert man die Stange in Richtung ihrer Länge, wie in der Abbildung, so zeigt sich, daß der Rauch nicht an sie herankommt und daß auch der von der Stange aufsteigende warme Luftstreifen rauchfrei ist. Es ist nicht zu bezweifeln, daß die stets warmen Wände der Luftwege der Atmungsorgane von Menschen und Tieren in dieser Weise Schutz vor übermäßiger Berührung mit dem Staub der eingeatmeten Luft genießen. Oft sieht man geschwärzte Flecken oder Streifen an Zimmerdecken und Wänden über Heizkörpern und elektrischen Glühlampen, als bildeten diese warmen Körper Rauch. Die Schwärzung ist aber nur Staub der Zimmerluft, der mit dieser von warmen Körpern aufsteigt und an den kalten Stellen sich absetzt.

Die gleiche Wirkung, zu kalten Körpern hingetrieben zu werden, trifft aus dem gleichen Grunde auch die Moleküle eines in Wärmeleitung begriffenen Gases selber; das Gas häuft sich ein wenig an der kalten Seite. Dem wirkt die Diffusion (M 366) entgegen, und da leichtere Moleküle schneller diffundieren, entziehen sie sich in gemischten Gasen mehr der Häufung als die schwereren, welche letzteren daher an der kalten Seite sich häufen. Ist diese — „Thermodiffusion" genannte — Wirkung auch nur gering, so kann sie, durch ein Gegenstromverfahren vervielfacht, doch sogar zur Trennung von Gasen verschiedenen Molekulargewichts aus Gemischen benutzt werden.

---

[1]) Man hat auf Grund dieses Gedankens eingehende Berechnungen angestellt, deren Ergebnisse mit der messenden Verfolgung des Kleinwimmels stimmen. Man kann das als eine neue Bestätigung der Kenntnisse von den Bewegungen der Moleküle nehmen, auch als Zeichen dafür, daß weiter Unbekanntes im Kleinwimmel nicht verborgen ist. Zum Studium von Einzelheiten der Molekularbewegung ist der Vorgang zu wenig einfach; selbst die Rechenkunst, welcher der Vorgang Übungsgelegenheit gibt, findet deshalb Grenzen an ihm.

109. Wanderung kraftgetriebener Partikel in Gasen. — Wenn in einem Gas verteilte Partikel einer dauernden Kraft unterliegen, sei es der Schwere oder — bei elektrischer Ladung der Partikel — einer elektrischen Kraft, so lagert sich über die vorbetrachtete Wimmelbewegung (107) ein einseitiges Wandern der Partikel in Richtung der Kraft. Sind die Partikel genügend klein, so daß sie wie Moleküle von Stoß zu Stoß unter den Molekülen des Gases sich bewegen, so kann die Geschwindigkeit ihrer Wanderung leicht berechnet werden.

Das zu betrachtende Partikel führt in Richtung der wirkenden Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung aus, bis es durch Zusammenstoß mit einem Gasmolekül die erlangte Geschwindigkeit zum Teil wieder verliert, worauf von neuem Beschleunigung erfolgt bis zu einem weiteren Zusammenstoß, und so fort. Dabei stellt sich alsbald nach Einsetzen der Kraft eine gleichbleibende Mittelgeschwindigkeit des Partikels in Kraftrichtung ein, und diese ist als Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels beobachtbar. Die Berechnung dieser Geschwindigkeit als mittlerer Geschwindigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung des Partikels zwischen zwei Zusammenstößen ist demnach ausführbar, wie folgt:

Ist v die Geschwindigkeitskomponente des Partikels in Kraftrichtung unmittelbar vor einem Zusammenstoß, so bleibt nach dem Zusammenstoße im Mittel nur der Bruchteil $vM/(m+M)$ von v übrig, wenn M die Masse des Partikels, m die des Gasmoleküls ist[1]). Die Verminderung von v beim Zusammenstoß ist daher im Mittel $v - vM/(m+M) = vm/(m+M)$. Diese Verminderung muß bei gleichbleibender Wanderungsgeschwindigkeit im Mittel ausgeglichen sein durch den Geschwindigkeitszuwachs des Partikels in Kraftrichtung auf seiner freien Weglänge[2]), und dies gibt eine Gleichung, mittels welcher die gesuchte Wanderungsgeschwindigkeit, als Mittelgeschwindigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung, unmittelbar zu finden ist als

$$\omega = \frac{K}{\pi D s^2 w} \cdot \frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}} \qquad 109)$$

Hierbei ist K die auf das Partikel wirkende Kraft, D die Dichte des Gases, s die Summe der Halbmesser des Partikels und eines Gasmoleküls, w die Molekulargeschwindigkeit des Gases (87) und $\mu = M/(m+M)$[3]).

Man sieht aus Gl. 109, daß die Wanderungsgeschwindigkeit sowohl von der Größe des Partikels abhängt (welche in s enthalten ist), als von dessen Masse (welche in μ enthalten ist). Der Einfluß der Masse ist aber nur gering, solange sie nicht weit unterhalb der Molekülmasse ist. Letzteres ist nur bei freien Elektronen

---

1) Die Berechnung dieses Mittelwerts geschieht durch Summierung (Integration) über alle vorkommenden Fälle des Zusammenstoßes. Es kommt dabei jede Richtung des Abprallens des Partikels vom Molekül gleich oft vor, so wie ein Lichtbündel bei Reflexion von einer spiegelnden Kugel allseitig gleichförmig zerstreut wird.

2) Die Zeit für diesen Geschwindigkeitszuwachs ist Quotient aus der freien Weglänge und der ungeordneten Geschwindigkeit des Partikels. Die Berechnung der freien Weglänge des Partikels mit Berücksichtigung der Bewegung auch der Gasmoleküle (vgl. 90) ist umständlich; grundsätzlich Neues bietet sie aber nicht. Die ungeordnete Mittelgeschwindigkeit des Partikels ist groß angenommen gegenüber der ihr übergelagerten Wanderungsgeschwindigkeit, was für nicht zu große Partikel (vgl. 110) immer zutrifft.

3) Berücksichtigt man auch die Ungleichheiten der Molekulargeschwindigkeiten und der Weglängen und den Einfluß der Bewegung der Gasmoleküle auf die Geschwindigkeitsverluste des Partikels bei den Zusammenstößen, so ändert dies nur wenig, ebenso wenn an Stelle elastischer Stöße andere, je nach Beschaffenheit des Partikels mögliche Stoßfälle angenommen werden.

der Fall, deren Wanderungsgeschwindigkeit ω im elektrischen Feld infolge ihrer sehr kleinen Masse (E 458) nach Gl. 109 sehr groß ausfällt, was ein gutes Erkennungsmittel für die Anwesenheit freier Elektronen in einem Gase gibt. In allen anderen Fällen beliebiger Partikel hängt die Wanderungsgeschwindigkeit ω bei gegebener Kraft K fast nur von der Größe der Partikel ab. Dies gibt die Möglichkeit anderweitig nicht ausführbarer Größenbestimmungen von Elektrizitätsträgern (E 503 u. f.) mittels der Gleichung 109 aus Messung der Wanderungsgeschwindigkeit ω der Träger im elektrischen Felde bei bekannter Kraft K (vgl. E 504).

Diese Träger können alle Größen haben, von Molekülen bis zu Staubteilchen, mit entsprechenden Massen. Man setzt in der Gleichung in μ zuerst eine vermutete Trägermasse M ein, berechnet dann s aus ω — D und w sind bekannt — und aus s den Trägerradius, wonach sogleich ersichtlich ist, welcher anderer Wert für M zu verbesserter, übrigens immer wenig geänderter Berechnung von s etwa einzusetzen sei. Dies ist der Weg zur Ermittelung der Natur der Elektrizitätsträger; man erfährt so unmittelbar, ob die Träger Moleküle, kleine oder größere Molekülgruppen oder grobe Partikel sind.

110. Anschluß an die Hydrodynamik. — Bei zu großen Partikeln kann Gl. 109 nicht mehr zutreffen, weil bei ihrer Berechnung die Partikel wie Moleküle betrachtet worden sind, die zwischen den Gasmolekülen an der Wärmebewegung teilnehmen, was aber bei Partikeln von sichtbarer Größe oder noch größeren Körpern nicht zutrifft (107).

Eben für diese Fälle großer, in Gasen (oder Flüssigkeiten) bewegter Körper gelten aber die Gleichungen der Hydrodynamik (M 386). Dieselben geben im besonderen für kugelförmige Partikel eine einfache, durch direkte Messungen bestätigte Lösung (M Gl. 409a), die aber, wie alle Hydrodynamik, für zu kleine Körper ungültig werden muß und nur durch einen Zusatz auf Grund besonderer Messungen noch ein wenig weiter auf kleinere Kugeln anwendbar gemacht werden konnte (M 411).

Man hat demnach zwei Lösungen des Problems der kraftgetriebenen Partikel, die in ihren Gültigkeitsbereichen einander ergänzen: die gaskinetische Lösung (Gl. 109) für kleine und kleinste Partikel und die hydrodynamische für größere Partikel. Bei gewisser mittlerer Größe der Partikel treffen die beiden Gültigkeitsbereiche zusammen, und es ist bemerkenswert, daß hier die beiden Lösungen in ihren Aussagen tatsächlich übereinstimmen, wie es sein muß, wenn sie beide richtig sind.

Diese Übereinstimmung gilt sogar auch bei der Anwendung der Gl. 109 auf Flüssigkeiten, und dies zeigt wieder, daß die Molekularbewegung in Flüssigkeiten nicht wesentlich verschieden sein kann von der in Gasen (78). Die Anwendbarkeit der Gl. 109 auf Flüssigkeiten ist wichtig für die Untersuchung der Ionen der Elektrolyten (E 198).

Die Übereinstimmung zweier auf so gänzlich verschiedene Kenntnisse gebauten Theorien, wie der kinetischen Gastheorie und der Hydrodynamik, dort wo sie bei Aneinandergrenzen ihrer Gültigkeitsbereiche zu Aussagen über denselben Gegenstand kommen, ist eine besondere Bestätigung des Wahrheitswertes beider Theorien.

111. Vergleichungen der allgemeinen Erfahrungssätze über Wärme mit der Kenntnis über die Molekularbewegung. — Wir haben im Verlauf der Betrachtung der Wärmeerscheinungen zwei Erfahrungs-

sätze hervorgehoben, die sich als allgemeingültig gezeigt haben. Nämlich den Satz, daß Wärme nicht von selber von kälteren Körpern zu heißeren geht (6) und den Satz über die Beschränktheit der Arbeitsleistung durch Wärme (15, 25, 43). Es sind nun diese Erfahrungssätze mit der erlangten Kenntnis vom Wesen der Wärme zu vergleichen.

Daß im allgemeinen Übereinstimmung zu erwarten ist, geht schon daraus hervor, daß zur Ermittelung der Molekularbewegung die Temperatur von vornherein als dasjenige genommen wurde, was bei Berührung sich ausgleicht (33), und daß für die zu vollständiger Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit erforderliche Gleichrichtung der ungeordneten Bewegung der Moleküle keine unbeschränkte Möglichkeit zu sehen ist. Die folgenden Überlegungen zeigen im einzelnen, welche *verschärfte und etwas eingeschränkte Fassung* den Erfahrungssätzen zu geben ist, damit sie mit aller Kenntnis übereinstimmen.

Alles Besondere, was die Erkenntnis vom Wesen der Wärme zu jenen beiden Sätzen zeigt, liegt darin, daß wir bei Beobachtung von Wärme stets mit sehr vielen Molekülen zu tun haben (vgl. 32) und daß, was in Durchschnittswerten für sehr viele Moleküle gilt — wie jene Erfahrungssätze —, *nicht auch für sehr wenige Moleküle* zu gelten braucht.

Wenn in einem Gefäß nur wenig Gasmoleküle sich befinden, so kann es wegen der Ungleichheiten ihrer Geschwindigkeiten (88) leicht kommen, daß für kurze Zeit die schnelleren Moleküle am einen Ende des Gefäßes, die langsameren am anderen Ende sich häufen, und dies ist tatsächlich ein von selbst stattfindender Übergang von Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Teile des Gases. Es kann auch eintreten, daß zeitweilig die Zahl der Moleküle ungleich über die beiden Hälften des Gefäßraumes verteilt ist, und dies würde für den nächsten Augenblick von selber ein Druckgefälle im Gefäß ergeben, das Arbeit leisten kann. Solche Druckgefälle und Temperaturungleichheiten sind aber immer nur zeitweilig, *nicht von Dauer*, und sie treten unregelmäßig und mit wechselnden Richtungen auf; man kann daher mit ihrer Benutzung weder Wärme auf höherer Temperatur sammeln, noch einen Motor treiben. Auch treten diese Ungleichheiten um so seltener, geringfügiger und mit um so kürzerer Dauer auf, je mehr Moleküle da sind. Es sind über solche Vorgänge eingehende, naturgemäß nicht einfache Rechnungen angestellt (zuerst von Boltzmann); sie zeigen nichts wesentlich Neues für die hier vorliegende Frage, sind aber später wichtig geworden (180)[1]. Einen Vorgang, bei welchem solche kurzdauernde, unregelmäßig wechselnde Druckgefälle merklich werden, haben wir im Kleinwimmel auch schon betrachtet (107).

Um diese Einsichten über die Molekularbewegung in jenen Erfahrungssätzen über die Wärme zur Geltung kommen zu lassen und auch sonst Erfahrungswidrigkeiten in der Fassung der Sätze auszuschließen, kann man sagen:

„Niemals geht Wärme *dauernd und von selber* von einem kälteren zu einem heißeren Körper" und „*Fortlaufende* Verwandlung von Wärme in Arbeit kann nur stattfinden, wenn gleichzeitig Wärme unverwandelt von einem heißeren zu einem kälteren Körper übergeht".

Zur Beifügung „von selber" im Satz über den Wärmeübergang sei bemerkt, daß unter *Arbeitsaufwand* sehr wohl jederzeit der umgekehrte Wärmeübergang erreicht werden kann, was in den Kältemaschinen auch geschieht (227). Außerdem können auch Vorgänge erdacht

[1]) Siehe Anhang W V.

werden, die ohne Arbeitsaufwand, aber wieder nicht von selber, den umgekehrten Wärmeübergang bewirken könnten. Man teile ein Gasvolum durch eine Wand mit einer kleinen Öffnung in zwei Teile und lasse durch diese Öffnung nur Moleküle mit Übermittelgeschwindigkeit nach der einen Richtung, mit Untermittelgeschwindigkeit nach der anderen Richtung treten; der Erfolg wird sein, daß an der einen Seite der Wand das Gas andauernd wärmer, an der anderen Seite kälter wird, und es wäre dies mittels einer reibungslos zu betätigenden Klappe an der Öffnung ohne Arbeitsaufwand erreichbar. Aber es sind in der unbelebten Natur keine Mittel bekannt, die solcher Klappenbetätigung entsprächen. Am nächsten käme der gewünschten Wirkung die Oberfläche einer verdunstenden Flüssigkeit. Es werden durch die Oberflächenkräfte nur die schnellsten Moleküle aus der Flüssigkeit hinausgelassen in den Dampfraum; daher kühlt sich auch die verdunstende Flüssigkeit. Aber die Oberfläche wirkt durch Kräfte (M 317), und daher sammelt sich die in der Flüssigkeit fehlende Wärme nicht auf einem wärmeren Körper, sondern sie ist zu Arbeit gegen die Kräfte verbraucht und damit als Wärme überhaupt verschwunden (vgl. 204), so daß die Erscheinung mit dem Satz über den Wärmeübergang nichts zu tun hat.

112. Zusammenhang der Erfahrungssätze über Wärme mit der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile. — Das Perpetuum mobile, eine Vorrichtung, die ohne äußeres Zutun unbegrenzt Arbeit leisten sollte, ist nach aller Erfahrung unmöglich (vgl. M 83, 152). Eine Vorrichtung, die Energie vermehrt, wäre jedenfalls ein Perpetuum mobile; wir nennen sie Perpetuum mobile „erster Art"; sie würde dem Energiegesetz widersprechen.

Es ist aber noch eine andere Art von Perpetuum mobile denkbar, die Energie nicht vermehrt, die also dem Energiegesetz nicht widerspräche; wir nennen sie Perpetuum mobile „zweiter Art": Ein Wärmemotor (246), der unter Verbrauch der reichlich in allen Körpern der Erde vorhandenen Wärme fortdauernd Arbeit leistete, wäre eine solche Vorrichtung, wie etwa eine Dampfmaschine, deren Kessel mit der Wärme des Meerwassers geheizt werden könnte, ohne einen kälteren Ort zur Abfuhr des Dampfes nötig zu haben; die gelieferte Arbeit könnte zuletzt durch Reibung wieder in Wärme übergehen und damit in den allgemeinen Wärmevorrat zurückfließen, so daß dieser unvermindert weiter verfügbar bliebe. Aber auch solche Vorrichtungen, die in der Anwendung denselben Wert hätten wie ein Perpetuum mobile erster Art, fallen unter die erfahrungsmäßige allgemeine Unmöglichkeit des Perpetuum mobile; auch sie haben sich nicht ausführbar gezeigt.

Es ist leicht zu sehen, wie diese Erfahrung von der allgemeinen Unmöglichkeit des Perpetuum mobile, auch zweiter Art, mit den beiden vorbehandelten Erfahrungssätzen über Wärme (111) zusammenhängt, dem Satz von der Einseitigkeit des Wärmeübergangs und dem Satz von der beschränkten Verwandelbarkeit der Wärme:

Denn würde nicht nach dem zweiten Satz jeder Wärmemotor erhöhte Temperatur nötig haben, um einen Teil der Wärme unverwandelt auf niedrigere Temperatur übergehen zu lassen, so wäre es wohl möglich, den Motor mit der Wärme der Umgebung als Perpetuum mobile zweiter Art zu betätigen. Es wäre dies aber auch dann möglich, wenn die Wärme der Umgebung entgegen dem ersten Satz von selber auf höhere Temperatur ginge. Man sieht so, daß schon die beiden Wärmeerfahrungssätze das Perpetuum mobile zweiter Art ausschließen und daß somit dessen erfahrungsmäßige Unmöglichkeit eine Bewährung jener beiden Wärmesätze bedeutet, und umgekehrt.

Alle drei Sätze — der von der Einseitigkeit des Wärmeübergangs, der von der beschränkten Verwandelbarkeit der Wärme und der von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile — sind so

auf Stehen und Fallen fest miteinander verbunden. Jeder einzelne von ihnen liefert daher eine entsprechend verläßliche Grundlage für Schlüsse ins Unbekannte, und es wird uns davon eine große Reihe von Beispielen begegnen (167, 168, 176 u. f., 252—258). Eine zu Schlüssen besonders geeignete quantitative Folgerung aus den drei Sätzen werden wir später als „Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik" behandeln (255).

Verteilung der Energie, welche als Wärme einem Körper zugeführt wird, auf verschiedene Wirkungen.

113. Dreierlei Wirkungen. — Wenn einem Körper Wärme zugeführt wird, so steigt seine Temperatur, d. i. es steigt die kinetische Energie seiner Moleküle (33), womit im festen Zustand auch Steigerung der potentiellen Energie verbunden ist (78, 119). Dies ist aber nicht die einzige Wirkung zugeführter Wärme, sondern es treten fast immer noch Begleitwirkungen hinzu, die ebenfalls Energieverbrauch bedeuten, nämlich: Volumvergrößerung (8—43) und Steigerung von innermolekularer Bewegung, d. i. Bewegung der Atome im Molekül (32).

Es sind daher dreierlei Energiewirkungen bei Wärmezufuhr zu betrachten: 1. Temperaturerhöhung (114), 2. Ausdehnungsarbeit (116), 3. innermolekulare Arbeit (121); wir bezeichnen diese Wirkungen im folgenden kurz mit den Zeichen I, II, III.

Die spezifische Wärme, welche den Gesamtenergieverbrauch bei Temperaturerhöhung der Gewichtseinheit um 1 °C mißt, faßt meist alle drei Wirkungen zusammen, obgleich sie unmittelbar nur auf I sich bezieht; meist sind nämlich II und III nicht auszuschalten.

114. Molekularwärmen; c_v bei einatomigen Gasen. — Tritt der Fall ein, daß I allein vorhanden ist, daß nur Steigerung der Molekulargeschwindigkeit bei Wärmezufuhr erfolgt, so ist die spezifische Wärme aus der Kenntnis der Molekularbewegung (78 u. f.) unmittelbar angebbar. Es sind hier bei Gasen zugeführte Wärmemengen und eintretende Temperaturerhöhung eins und dasselbe, wenn man statt der Gewichtseinheit des betreffenden Stoffes ein einzelnes Molekül desselben betrachtet. Denn beide, Wärmemenge und Temperatur, sind dann kinetische Energie des Moleküls, und der Quotient beider, die spezifische Wärme (47) ist demnach 1, wenn als Wärmeeinheit und Temperaturstufeneinheit die Energieeinheit genommen ist.

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Stoffart; es gilt also für alle Stoffe im Gaszustand: Die auf 1 Molekül bezogenen spezifischen Wärmen — die „Molekularwärmen" — aller Stoffe müssen übereinstimmen, sobald die Nebenwirkungen II und III wegfallen.

Um die Molekularwärme in gewöhnlicher Einheit, Kalorie und °C zu haben, muß umgerechnet werden. Zu der als $mw^2/2$ in erg (M 192) gerechneten Temperatur tritt dann zur Umrechnung auf °C der Faktor a (81), und die Umrechnung der Wärmemenge von erg in Kalorien geschieht durch das mechanische Wärmeäquivalent $A = 419 \cdot 10^8$ erg/Kal (75). Außerdem kann man statt eines einzelnen Moleküls das Molekulargewicht in kgr als Stoffmenge benutzen, was noch das Gewicht H des Wasserstoffatoms (104), das bei den gewöhnlichen Molekulargewichten Einheit ist, als Faktor (in kgr) hinzubringt. Hiermit wird die Molekularwärme statt 1 $1/a \cdot A \cdot H = 2{\cdot}95$ Kal/°C oder rund 3 Kal/°C .

Zur Vergleichung dieser, für den Fall des Fehlens von Ausdehnungsarbeit (II) und innermolekularer Bewegung (III) zu erwartenden Molekularwärme mit der Wirklichkeit können die spezifischen Wärmen c_v der Gase herangezogen werden, weil diese Ausdehnungsarbeit überhaupt nicht enthalten. Man hat diese spezifischen Wärmen mit dem Molekulargewicht zu multiplizieren oder, was bei Gasen wegen Avogadros Satz (82) dasselbe ist, sie für gleiche Volume und zwar für das Volum von 2 kgr Wasserstoff — weil dessen Molekulargewicht 2 ist (84) — zu berechnen. Dies ist in Tab. 23 (65) geschehen. Man sieht, daß Quecksilberdampf den erwarteten Wert nahe 3 in der Tat ergibt, während die anderen Gase und Dämpfe der Tabelle größere Molekularwärmen zeigen. Dies beweist, daß bei Quecksilberdampf innermolekulare Bewegung, die durch Wärme beeinflußt würde, nicht vorliegt, im Gegensatz zu den anderen Gasen und Dämpfen. Diese letzteren sind aber nach schon vorhandener Kenntnis (83) auch 2- und mehratomig, so daß bei ihnen die noch gesondert zu betrachtenden innermolekularen Bewegungen (III), welche die spezifische Wärme erhöhen müssen, zu erwarten sind (121).

Wie Quecksilberdampf haben auch die anderen untersuchten Metalldämpfe und ebenso die Edelgase He, Ne, Ar, Kr, Xe die Molekularwärme nahe 3.

Von all diesen Gasen und Dämpfen gilt es also, daß ihre Moleküle bei den Zusammenstößen keine innere Beweglichkeit zeigen, daß sie überhaupt keine merklichen Energiemengen aufnehmen, außer zur Fortbewegung ihres Schwerpunkts. Es ist daher angezeigt, diese Gase und Dämpfe als einatomig zu betrachten; Atom und Molekül sind bei ihnen Dasselbe. Dies bewährt sich auch dadurch, daß die den Molekulargewichten (83) gleichgesetzten Atomgewichte in alle chemische und sonstige Erfahrung einwandfrei sich einfügen, und es zeigt sich auch bei Betrachtung des Verhältnisses k bestätigt (118).

115. Die damit nachgewiesene Nichtbeteiligung des Atominneren an der Wärmebewegung ist sehr bemerkenswert, wenn man den inneren Aufbau der Atome aus unzweifelhaft beweglichen Bestandteilen kennt (E 527). Es sind aber auch andere Zeichen dafür da, daß Atome gar nicht ohne weiteres Energie aufnehmen oder abgeben, sondern daß dies nur in bestimmten Mengen — „quantenhaft“ — geschieht (181).

Bei genügend großer Annäherung zweier Atome, wie sie bei hoher Temperatur bei den Zusammenstößen vorkommt (98), findet Abtrennung von Elektronen aus den Atomen statt („Nähewirkung“, E 511), womit auch die Erregung der Atome zu Lichtaussendung zusammenhängt (O 115). Dies ist die Art der Beeinflussung von Atomen durch die Wärmebewegung.

116. Ausdehnungsarbeit (Wirkung II). — Es ist zu unterscheiden a) innere, b) äußere Ausdehnungsarbeit, je nachdem gegen die Molekularkräfte oder gegen äußeren Druck gearbeitet wird.

117. Bei den Gasen, deren Moleküle durchschnittlich weit auseinander sind, ist die innere Ausdehnungsarbeit nahe Null. Dies war schon früh durch den Mangel einer Abkühlung der Luft nachgewiesen, wenn sie in leeren Raum, also ohne äußere Ausdehnungsarbeit ausströmt (71)[1].

---

[1]) Wenn Gas aus einem Behälter in einen zweiten, ausgepumpten strömt und wenn dies bis zum Druckausgleich fortschreitet, so findet man den ersten Behälter kalt, den zweiten warm geworden. Befinden sich aber beide Behälter in einem gemeinsamen Kalorimeter, so

Bei sehr feiner Beobachtung wurde eine ganz kleine Abkühlung gefunden, wenn Wärmezuleitung zum Gas am Ort der Ausströmung genügend verhindert ist; die Abkühlung steigt mit dem Druck und besonders stark mit sinkender Anfangstemperatur des Gases, und dies zeigt an, daß sie der Arbeit gegen Molekularkräfte entspricht, die um so wirksamer werden, je dichter die Moleküle beieinander sind (vergl. 242).

118. Die äußere Ausdehnungsarbeit bei Gasen gegen den Atmosphärendruck ist dagegen groß, weil sie starke Volumänderung haben. Diese Ausdehnungsarbeit zeigt sich, wie schon betrachtet (72) in der Differenz $c_p - c_v$, deren Wärmeäquivalent sie ist.

Das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen (60), $c_p/c_v = k$, kann für den Fall des Fehlens von innermolekularer Arbeit leicht berechnet werden. Man bezieht dazu am einfachsten die spezifischen Wärmen auf die Volumeinheit, statt auf die Gewichtseinheit; sie seien dann c'_p und c'_v. Dabei ist $c'_p/c'_v = c_p/c_v$, weil gleiche Volume desselben Gases auch gleiches Gewicht haben. Die kinetische Energie der Moleküle in der Volumeinheit des Gases bei der Temperatur T sei $\mathfrak{E}$. Es ist dann in Arbeitsmaß $c'_v = \mathfrak{E}/T$; denn die bei Erwärmung um 1^0 zuzuführende Energie ist 1/T der schon vorhandenen. Bei der spezifischen Wärme c'_p kommt noch die äußere Arbeit hinzu, welche Produkt aus Druck und Volumzunahme ist. Der Druck ist aber $\frac{2}{3}\,\mathfrak{E}$ (81 Note) und die Volumzunahme ist 1/T; also ist $c'_p = c'_v + \frac{2}{3}\mathfrak{E}/T$. Dies gibt, mit dem schon gefundenen $c'_v = \mathfrak{E}/T$, $c'_p/c'_v = c_p/c_v = k = 1 + \frac{2}{3} = 1{\cdot}67$.

Dieser Wert $k = 1{\cdot}67$ ist in der Tat bei Quecksilberdampf gemessen worden (64, Tab. 23), ebenso auch bei den anderen Metalldämpfen und den Edelgasen, die alle die Molekularwärme rund 3 haben, woraus wir die Folgerung der Einatomigkeit schon entwickelt haben (114). Auf die anderen Werte von k in der Tab. 23 gehen wir alsbald ein (122).

119. Bei den festen Körpern ist die äußere Ausdehnungsarbeit, die gewöhnlich nur gegen den Atmosphärendruck zu leisten ist, unbedeutend, weil die Volumänderung nur gering ist. Größer ist die innere Ausdehnungsarbeit wegen der Größe der Molekularkräfte, gegen welche die Ausdehnung stattfindet (13). Das Maß dieser Kräfte ist hierbei der innere Druck P, der für Flüssigkeiten ungefähr bekannt und allerdings sehr groß ist (M 341). Dennoch ist bei der Geringfügigkeit der Volumänderungen auch die innere Ausdehnungsarbeit im allgemeinen nicht groß zu erwarten. Da sie aber in der spezifischen Wärme mit enthalten und je nach den Molekularkräften der verschiedenen Körper verschieden groß ist, so sind bei den festen Körpern keine so einfachen Gesetzmäßigkeiten der spezifischen Wärmen zu erwarten wie bei den Gasen.

In der Tat gilt die für die festen Elemente gefundene Gleichheit der Atomwärme (55) nur angenähert (Tab. 21). Hierbei ist zu bemerken, daß das Eintreten der Atomwärme an Stelle der Molekularwärme Einatomigkeit, d. h. gesonderte Beweglichkeit der einzelnen Atome anzeigt und daß im festen Zustand außer der kinetischen Energie der Moleküle (Atome) auch noch ebenso viel potentielle Energie bei der Erwärmung zugeführt werden muß (78). Es wäre daher für die Atomwärme der festen Elemente, falls sie einatomig

zeigt sich keine Temperaturänderung, weil keine äußere Arbeit geleistet ist; die innere Arbeit ist zu klein um in dieser Weise bemerkt zu werden.

sind, rund 2·3 Kal/kgr°C = 6 Kal/kgr°C zu erwarten (114). Dies trifft auch nahe zu; Tab. 21 zeigt 6·4 Kal/kgr°C. Man kann dies als sicheres Zeichen der Einatomigkeit dieser Körper nehmen und den vorhandenen Überschuß über 6 als Ausdehnungsarbeit auffassen[1]). Die Atomwärmen unterhalb 6 haben wir schon besonders betrachtet (57).

120. Bemerkenswert ist noch, daß die Molekularwärmen fester chemischer Verbindungen ungefähr als Summen der Atomwärmen der Bestandteile berechenbar sind[2]). Dies zeigt an, daß die Moleküle der Verbindungen im festen Zustand keine selbständige Bewegung haben, sondern daß die Wärmebewegung bloß in den Schwingungen der einzelnen Atome besteht, wie bei den festen Elementen (119). Es können schwingende Bewegungen der Atome sehr wohl auch bei der Kristallgitter-Gruppierung (M 249) derselben stattfinden, welche durch Kristallgestalt und sonstige Kristalleigenschaften bei den festen Körpern oft angezeigt ist.

121. Innermolekulare Bewegung (Wirkung III). — Bestehen Moleküle aus mehreren Atomen, so erhalten sie bei den Zusammenstößen im Gaszustand innermolekulare Bewegung. Dies zeigt sich an der Größe der Molekularwärmen (114) der mehratomigen Gase, die um so mehr ansteigen, je mehr Atome im Molekül sind (Tab. 23). Molekulare und innermolekulare Energie sind durch die Stöße in stetem Austausch miteinander. Ist die Temperatur konstant, so beträgt letztere Energie einen durchschnittlich gleichbleibenden Teil der ersteren (32). Wird die molekulare Energie, d. i. die Temperatur, bei Wärmezufuhr gesteigert, so steigt auch die innermolekulare Energie, und dies ist es, was an der Größe der Molekularwärme merklich wird. Tab. 23 zeigt, daß die Molekularwärmen c'_v (letzte Spalte) gruppenweise nahe gleich sind, entsprechend der Anzahl der Atome im Molekül. Quecksilberdampf als Beispiel eines einatomigen Gases zeigt die für Abwesenheit von innermolekularer Bewegung berechnete Molekularwärme nahe 3 Kal/°C (114); die zweiatomige Gruppe hat die Molekularwärme 4·8 bis 4·9, die dreiatomige schon mehr als das Doppelte eines einatomigen Gases. Dies bedeutet, daß hier die innermolekulare Energie schon größer ist als die molekulare, und dies steigert sich weiter bei 9 Atomen im Molekül (Alkoholdampf); bei 15 Atomen (Ätherdampf) ist die innermolekulare Energie schon das Zehnfache der molekularen.

Die gruppenweise Gleichheit der Molekularwärmen, je nach der Atomzahl im Molekül, zeigt an, daß es auf Bewegungen der ganzen Atome oder doch deren Hauptmassen im Molekül ankommt, was damit übereinstimmt, daß die einzelnen Atome selber nicht leicht durch die Wärmebewegung beeinflußbar sich zeigten (115).

122. Mit der gruppenweisen Gleichheit und dem Ansteigen der Molekularwärmen c'_v, wie es die letzte Spalte der Tab. 23 zeigt, ist notwendigerweise die in der zweiten Spalte ersichtliche gruppenweise Gleichheit und das Sinken des Verhältnisses k der beiden spezifischen Wärmen der Gase verbunden. Denn es ist $k = c_p/c_v = c'_p/c'_v$ (118) und die Differenz $c_p' - c'_v$, die

---

[1]) Auffallend ist die ebenfalls über 6 gehende Atomwärme des flüssigen Quecksilbers (Tab. 21). Ob hier wegen besonders großem inneren Druck und großem Ausdehnungskoeffizienten die Ausdehnungsarbeit besonders groß ist, oder ob Schwingungen der Atome vorliegen oder sonst Unbekanntes, ist ungewiß.

[2]) Es muß dabei jedem Element eine besondere Atomwärme zugeschrieben werden, die für einige Elemente von 6·4 abweicht (z. B. für C 1·8 ist), was aber auch bei den reinen Elementen im festen Zustande vorkommt und die dafür angegebenen Gründe haben kann (119).

Ausdehnungsarbeit gleicher Volume, ist bei allen Gasen (genügender Verdünnung) nach Gay-Lussacs und Daltons Gesetz gleich. c'_p und c'_v steigen also gemeinsam an; wenn aber zwei Größen mit gleichbleibender Differenz ansteigen, so nähert sich ihr Verhältnis der Einheit. Es muß also k mit wachsender Atomzahl im Molekül dem Wert 1 sich nähern, wie es die Tabelle nach den Messungen (63, 64) auch zeigt (65).

Eine Messung des Verhältnisses k, die meist leichter auszuführen ist als die der spezifischen Wärmen selbst, ist, wie man sieht, ein gutes Mittel zur Zählung der Atome im Molekül, besonders wenn die Zahl klein ist. Dies ist in gewissen Fällen für Atomgewichtsbestimmungen wichtig geworden (125).

123. Temperaturabhängigkeit von k. — Die Bewegungen der Atome im Molekül können Schwingungen um die Gleichgewichtslagen oder auch Drehungen des ganzen Moleküls um dessen Schwerpunktsachsen sein. Da dies periodische Bewegungen sind, kommt wieder der quantenmäßige Energieaustausch nach Maßgabe der Periodenzahl in Betracht (vgl. 57). Danach ist zu erwarten, daß bei tiefen Temperaturen die innermolekularen Bewegungen wegen Mangel an Energie unterbleiben. In der Tat ergibt beispielsweise Wasserstoff unter 50° abs. die kleine spezifische Wärme eines einatomigen Gases und dementsprechend $k = 1{\cdot}67$.

Bei hohen Temperaturen steigen dagegen die spezifischen Wärmen der zwei- und mehratomigen Gase ein wenig, offenbar weil die Energie der innermolekularen Bewegungen mehr als proportional der Temperatur zunimmt. Dementsprechend ist das Ansteigen um so merklicher, je größer die Atomzahl im Molekül ist.

124. Chemische Zersetzung durch Wärme, „thermische Dissoziation". — Alle Moleküle zerfallen bei genügend gesteigerter Temperatur in einfachere Atomgruppen, zuletzt in einzelne Atome; dies ist Folge der gesteigerten innermolekularen Bewegungen, bei deren großen Amplituden oder zentrifugalen Kräften die chemischen Kräfte nicht standhalten. HJ zerfällt schon deutlich bei Rotglut, HCl braucht Weißglut; Wasserdampf beginnt merklich bei 1000° C zu dissoziieren; das Molekül J_2 zerfällt ebenfalls bei leicht erreichbarer Temperatur; dagegen kommen für merklichen Zerfall von N_2, H_2 nur die sehr hohen Temperaturen der Sonnen in Betracht.

Eine scharfe Temperaturgrenze ist indessen für keine dieser Zersetzungen angebbar; es steigt nur die Zersetzung bei Überschreitung je einer gewissen Temperatur sehr schnell an. Dies ist verständlich, da die Geschwindigkeiten der Moleküle nicht einheitlich sind (88) und daher auch die innermolekulare Energie nicht gleichmäßig über alle Moleküle verteilt ist. Zusammenstöße bei besonders hoher Geschwindigkeit kommen bei einzelnen Molekülen auch bei tiefer Temperatur vor; weil aber starke Abweichungen von der Mittelgeschwindigkeit selten sind, ist gut merkliche thermische Dissoziation immer an eine gut angebbare Temperaturgrenze gebunden. (Vgl. die ganz andere „elektrolytische Dissoziation", E 184, 201).

125. Nebenwege der Atomgewichtsbestimmung. — Der ursprüngliche und Hauptweg zur Ermittelung der Atomgewichte, mit dem des Wasserstoffs als Einheit, besteht in der quantitativen Analyse möglichst vieler Verbindungen des betreffenden Elements und Aufsuchung der kleinsten in einem Molekulargewicht der Verbindungen enthaltenen Menge des Elements, deren ganzzahlige Vielfache alle größeren, in den Molekulargewichten der übrigen Verbindungen enthaltenen Mengen sind. Diese kleinste Menge ist das Atomgewicht (M 23). Hierbei wird die Molekulargewichtsbestimmung der Verbindungen vorausgesetzt, wofür Avogadros Satz die jetzt wohlgesicherte Grundlage gibt (83), anwendbar aber nur auf Verbindungen, die gasförmig oder doch unzersetzt verdampfbar sind. Liegen nur wenige solche Verbindungen vor oder vielleicht gar keine, so ist der Hauptweg der Molekulargewichtsbestimmung und damit auch der Atomgewichtsbestimmung versperrt. Je weniger Verbindungen benutzbar sind, desto mehr können überhaupt immer Zweifel übrig bleiben, ob unter den benutzten Verbindungen nicht

vielleicht keine einzige mit nur 1 Atom des Elements im Molekül war; waren es beispielsweise nur Verbindungen mit 2, 4, 6 Atomen im Molekül, so ergäbe sich das Atomgewicht verdoppelt.

Zur Beseitigung solcher Zweifel oder wo der Hauptweg ganz versperrt ist, sind Nebenwege wertvoll, selbst wenn sie nur ungefähr, aber ohne Gefahr einer Vervielfachung, das Atomgewicht angeben; die Steigerung der Genauigkeit kann dann meist durch die quantitative Analyse gut besorgt werden. Wenn beispielsweise von einem Element M nur das Oxyd vorhanden ist, so ermittelt man die mit 16 Gewichtsteilen Sauerstoff verbundene Menge des Elements, und diese muß dann entweder das Atomgewicht selber sein oder irgendein naheliegendes Vielfaches davon, je nachdem das Oxyd MO oder M_2O oder M_2O_3 usw. ist, was zu unterscheiden der Nebenweg imstande sein muß. Man umgeht in dieser Weise sogar die Molekulargewichtsbestimmung.

Ein solcher Nebenweg ist durch die nahe Gleichheit der Atomwärmen 6·4 der festen Elemente bei nicht zu tiefer Temperatur gegeben (55, 119): Man mißt die spezifische Wärme des rein dargestellten, festen Elements, dividiert sie in 6·4 und hat damit das angenäherte Atomgewicht. So wurde beispielsweise beim Indium verfahren als es neu entdeckt war; es zeigte sich so, daß das Oxyd In_2O_3 sein muß.

Ein anderer Nebenweg ist durch die spezifische Wärme des Elements in Gasgestalt gegeben, besonders durch das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen, dessen Ermittelung geradezu einer Zählung der Atome im Molekül gleichkommt (122). Die Ermittelung des spezifischen Gewichts des gasförmigen Elements, welche das Molekulargewicht liefert (83), gibt dann mittels der Zahl der Atome im Molekül auch sofort das Atomgewicht. Dieser Weg ist besonders wertvoll wenn das Element überhaupt nur in Gasgestalt zur Verfügung steht, wie es z. B. für die Edelgase He, Ne, Ar, Kr, Xe der Fall war. Diese Elemente geben außerdem auch keine deutlichen chemischen Verbindungen, so daß der Hauptweg für sie ganz versperrt war. Da sie nach den spezifischen Wärmen einatomig sich zeigten, ist das leicht ermittelbare Molekulargewicht für sie auch zugleich das Atomgewicht.

Es gibt noch einen Nebenweg, der auch eine Zählung der Atome im Molekül liefert, wenn auch in ganz anderer Weise; es ist der Weg der Isomorphien. Isomorph heißen Stoffe gleicher Kristallgestalt. Nach der Kenntnis vom inneren Bau der Kristalle (M 249) bedeutet dies Gleichheit des Zusammenbaues der Atome in der chemischen Verbindung, daher auch Gleichheit der Atomzahlen im Molekül. So sind beispielsweise $CaCO_3$, $MgCO_3$, $ZnCO_3$, $FeCO_3$, $MnCO_3$ isomorph; sie kristallisieren alle in Rhomboedern (O, Abb. 55). Danach ist die gleiche Molekülzusammensetzung der Karbonate anzunehmen, und es ist das Atomgewicht aller dieser 5 Metalle — Ca, Mg, Zn, Fe, Mn —, die mit 1 Atomgewicht, d. i. mit 12 Gewichtsteilen Kohlenstoff in diesen Karbonaten verbundene Menge. Die Atomgewichts-Bestimmung ist damit durch eine einzige quantitative chemische Analyse erledigt, sobald man eine Verbindung des unbekannten Elements gefunden hat, die mit der gleichen Verbindung eines bekannten Elements isomorph ist. So wurde das Atomgewicht des Cs mittels der Isomorphie von Zäsiumalaun und Kaliumalaun ermittelt.

Eine gute Kontrolle aller Atomgewichtsbestimmungen gibt das natürliche System der Elemente (M 23, E 192). Denn es erhält hier jedes Element nach dem Atomgewicht seinen Platz im System, wobei es sich so einordnen muß, daß Elemente mit ähnlichen Eigenschaften untereinander zu stehen kommen. Atomgewicht und Eigenschaften des Elements und seiner Verbindungen kommen so zu gegenseitiger Kontrolle.

Das Hochfrequenzspektrum gibt außerdem die Ordnungszahl des Elements (M 23, E 502) und damit seinen genauen Platz im System, was gleichzeitig eine angenäherte Angabe für das Atomgewicht bedeutet.

Die besondere Ermittelung der Atomgewichte der radioaktiven Elemente (s. E Abb. 237) ergibt sich aus ihren Umwandlungen (E 557 u. f.).

Das Kanalstrahlspektrum (Massenspektrum) liefert sogar die kleinen Unterschiede der Atomgewichte der isotopen Elemente (E 518).

Damit ist ersichtlich, daß die Kenntnis der relativen (und damit auch der absoluten) Gewichte der Atome jetzt von vielen Seiten her aufs beste gesichert ist. Die erreichte Genauigkeit ist je nach der aufgewandten Mühe ungleich; am größten ist sie bei den ältest bekannten Elementen.

Chemische Energie.

126. Meßweise. — Diese schon von Robert Mayer betrachtete Energieform (M 156) hat das Besondere, bei chemischen Umsetzungen zum Vorschein zu kom-

men, während sie sonst, verborgen, sehr langer Aufbewahrung fähig ist. Wir haben sie in Tab. 24 (70) als vierte Energieform verzeichnet.

Es sei ein Beispiel betrachtet, das das Wesentliche zeigt. In 1 kgr Kohle, zusammen mit dem Sauerstoffvorrat in der Luft, der zu ihrer Verbrennung nötig ist, hat man einen großen Energievorrat dieser Form. Der Vorrat ist mit dem Stück Kohle lange unverändert und unscheinbar aufbewahrbar in dieser Form der „chemischen Energie". Sein Vorhandensein und seine Größe wird erst offenbar, wenn die Form vernichtet wird, wenn die Kohle mit dem Sauerstoff verbrennt. Es erscheint damit die andere, auffällige Energieform „Wärme", welche dann weitere Umwandlungen zuläßt. Man treibt so mit der chemischen Energie der Kohle die Dampfmaschinen. Ist die Verbrennung der Kohle erfolgt, mit Kohlensäure als Endprodukt, so ist der Vorrat von chemischer Energie verschwunden. Ist dabei keine andere Energieumwandlung eingetreten, als die in Wärme, so ist die entstandene Wärmemenge das richtige Maß für die verschwundene chemische Energie.

Ganz allgemein und mit allseits zutreffendem Erfolg wird chemische Energie in solcher Weise nach Umwandlung in Wärme gemessen, wie es in der Energietabelle 24 vermerkt ist; von der Wärme aus ist dann auch die Umrechnung in Meterkilogramme gegeben. Im Beispiel der Kohle und vieler anderer Fälle läßt man die Verbrennung oder sonstige chemische Umwandlung in einem Kalorimeter vor sich gehen und mißt die „Verbrennungswärme" oder sonstige „Reaktionswärme". Man findet für 1 gr Kohle 8 Kalorien oder 8000 Kal/kgr (Tab. 25). Dies ist über 3·4 Millionen mkgr äquivalent, und dieser große Arbeitsvorrat war in dem kgr Kohle und dem Sauerstoff verborgen, solange sie noch unverbrannt waren.

Tab. 25. **Verbrennungswärmen**
Kal/gr.

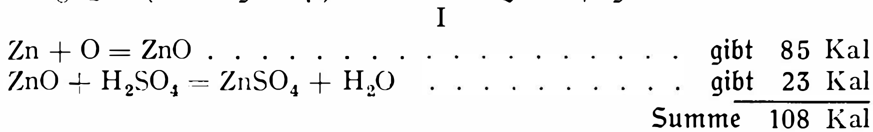
Wasserstoff	34·2	Sumpfgas	13·1
Kohle	8·0	Benzol	10·0
Diamant	7·8	Alkohol	7·2
Kohlenoxyd	2·4	Zucker	4·0
Schwefel	2·2	Eiweiß	5·7
Phosphor	5·7	Olivenöl	9·4

Ein anderes Beispiel, das ebenfalls die großen chemischen Energiemengen in kleinem Raum und auch die Leichtigkeit der Verfügbarmachung durch „Auslösung" (M 150) zeigt, ist die Pulverladung eines Geschützes oder irgendeine Sprengladung.

127. Übereinstimmung mit dem Energiegesetz. — Viele kalorimetrische Untersuchungen haben gezeigt, daß die Verwandlung in Wärme in der Tat das richtige Maß für die chemischen Energien gibt, mit dem man nach dem Energiegesetz rechnen kann. Metallisches Zink enthält z. B. durch seine Fähigkeit, mit Schwefelsäure zu Zinksulfat sich zu verbinden, chemische Energie, wie die Kohle mit dem Sauerstoff. Man kann aber im Falle des Zinks die Energie leicht in mehrfacher Weise messen. Entweder man verbrennt das Zink mit Sauerstoff und löst danach das gebildete Zinkoxyd in verdünnter Schwefelsäure, mißt beide Male die Wärmen und addiert sie, oder man löst das Zink unmittelbar

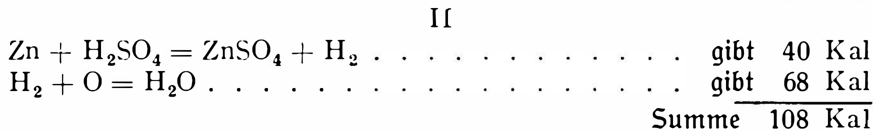
in verdünnter Schwefelsäure und verbrennt nachher den dabei entwickelten Wasserstoff, wieder mit Messung der beiden zu addierenden Wärmemengen. Man erhält in beiden Fällen dieselbe Summe, wie es nach dem Energiegesetz sein muß (M 158), weil in beiden Fällen vom selben Anfangszustand aus, nämlich $Zn + O + H_2SO_4$, derselbe Endzustand, nämlich $ZnSO_4 + H_2O$, erreicht wird. Im einzelnen sind die Umsetzungen mit den zugehörigen Wärmemengen für 65 gr Zink (1 Atomgewicht) in den beiden Fällen folgende:

I



$Zn + O = ZnO$	gibt	85 Kal
$ZnO + H_2SO_4 = ZnSO_4 + H_2O$	gibt	23 Kal
	Summe	108 Kal

II



$Zn + H_2SO_4 = ZnSO_4 + H_2$	gibt	40 Kal
$H_2 + O = H_2O$	gibt	68 Kal
	Summe	108 Kal

Daß man chemische Energie, z. B. bei Lösung von Zink in Schwefelsäure, auch als elektrische Energie messen und, wenn man will, auch auf dem Wege über die elektrische Energie in Wärme sich verwandeln lassen kann, wieder mit quantitativ widerspruchsfreiem Erfolg, dies wird in der Elektrizitätslehre eingehend erörtert (E 206 u. f.). Die chemische Energie erscheint dabei überhaupt als ein Sonderfall elektrischer Energie (E 203—208); über ihre schwierige Abgrenzung s. 130 und E 209.

128. Der Vorgang bei Umwandlung der chemischen Energie in Wärme, d. i. in Bewegungsenergie von Molekülen, ist leicht begreiflich. Verbrennt beispielsweise Kohle mit Sauerstoff, so gruppieren sich die C-Atome mit je 2 O-Atomen neu zusammen zu je einem CO_2-Molekül, und dies geschieht unter Betätigung der chemischen Kräfte der betreffenden Atome, deren Arbeitsleistung kinetische Energie der Atome ergibt, die dann als innermolekulare Energie im fertigen CO_2-Molekül vorhanden ist, soweit sie nicht zur Trennung der vorherigen Atom-Bindungen diente (vgl. 130). Die neu gebildeten Moleküle haben daher heftige innermolekulare Bewegungen, und diese gehen bei den Zusammenstößen der Moleküle in die molekulare Bewegung über, die am Thermometer als Wärme erscheint. Es ist dies die Umkehrung des früher betrachteten Überganges von molekularer in innermolekulare Bewegung (32, 121 u. f.).

Welches die bei einer Verbrennung oder einem anderen chemischen Vorgang entstehende Temperaturerhöhung ist, dies hängt außer von der Verbrennungswärme (Umsetzungswärme, Reaktionswärme) vor allem von den spezifischen Wärmen der Verbrennungsprodukte und vom Wasserwert sonstiger etwa miterhitzter Stoffe ab, sowie von den Wärmeverlusten nach außen.

Vor dem Ausgleich der innermolekularen mit der molekularen Energie haben die neugebildeten Moleküle einen inneren Bewegungszustand, der einer höheren Temperatur entspricht als das Thermometer anzeigen würde. Es sind dann „molekular-lokal" hohe Temperaturen vorhanden. So in Flammen, was das gute Leuchten mancher ziemlich kalter Flammen erklärt und was auch die Ursache der guten elektrischen Leitfähigkeit der Flammen sein dürfte (E 510).

129. Grenzen der Anwendbarkeit des Temperaturbegriffes. — In solchen Fällen des nicht zustandegekommenen Ausgleichs zwischen innermolekularer und molekularer Bewegung, oder auch zwischen den kinetischen Energien der verschiedenen Moleküle im Raumelement, ist der Begriff „Temperatur" nur mit Vorsicht anzuwenden. Die Temperatur eines Körpers ist durch die „mittlere kinetische Energie seiner Moleküle" gegeben (33). Sind die Energien der Moleküle und Atome eines Raumelements in derjenigen bestimmten Verteilung (88, 121), die durch das Aufeinanderwirken der Moleküle nach genügend langer Zeit beim Fehlen neuer Einwirkungen sich herstellt, so bedeutet die Temperaturangabe eine entsprechend bestimmte Aussage über den Wärmezustand im Raumelement. Ist aber eine der unendlich vielen möglichen anderen Verteilungsweisen der Energie vorhanden, so fehlt einer Angabe über mittlere kinetische Energie der Moleküle und damit auch der „Temperatur" diese bestimmte Bedeutung; sie ist daher ohne weiteres nicht zu brauchen. Dies gilt während des Ablaufs chemischer Vorgänge, wie auseinandergesetzt (128). Aber auch bei Fluoreszenz- und Phosphoreszenz-Vorgängen und bei anderem „kalten Leuchten" (O 117, 119), wo ebenfalls ungleichmäßige Einwirkungen auf einzelne Moleküle stattfinden, sind die kinetischen Energien nicht in der dauernden Endverteilung, welche bei Anwendung des Temperaturbegriffes vorausgesetzt wird.

130. Die als Wärme erscheinende chemische Energiemenge abhängig vom molekularen Anfangs- und Endzustand. — Die Umgruppierung der Atome bei der Verwandlung von chemischer Energie in Wärme setzt die Lösung der ursprünglichen Bindungen der Atome voraus. Diese Lösung muß oft durch eine gewisse Vorerhitzung der gegebenen Stoffe erst eingeleitet werden, damit die Umgruppierung beginnen kann. Es muß z. B. bei Verbrennungen zuerst an einer Stelle Entzündungstemperatur hergestellt sein, worauf dann die entstehende Wärme von selber die erforderliche hohe Temperatur unterhält. Die vorhandenen Moleküle müssen meist erst in ihre Atome zerteilt sein, damit diese sich umgruppieren können. So müssen, wenn Wasserstoff mit Sauerstoff verbrennen, d. i. die Umsetzung $2H_2+O_2 = 2H_2O$ stattfinden soll, zunächst die O_2-Moleküle zerteilt werden. Ebenso kann Kohle nicht brennen ohne daß die C-Atome aus den Bindungen in der festen Kohle gelöst sind. Die nötige Trennungsarbeit wird beim Fortgang der Verbrennung aus der Verbrennungswärme genommen. Daher ist die Verbrennungswärme des Diamanten, mit seinen durch seine Härte angezeigten sehr großen Molekularkräften, wesentlich geringer als die von gewöhnlicher, weicher Kohle (vgl. Tab. 25).

Ebenso ist auch die molekulare Beschaffenheit der Endprodukte der Umsetzung maßgebend für die als Umsetzungswärme gemessene chemische Energie. Es geht dies mit Sicherheit daraus hervor, daß Übergänge von einem molekularen Zustand in einen anderen — z. B. von rotem Phosphor in gelben — im allgemeinen von Wärmeabgabe oder -aufnahme begleitet sind.

Immerhin sind die Unterschiede der Reaktionswärmen, d. i. der gemessenen chemischen Energien, je nach molekularem Anfangs- und Endzustand verhältnismäßig geringfügig, wie das Beispiel von Diamant und Kohle zeigt. Dies ist gleichbedeutend mit großem Überwiegen der chemischen Kräfte über die Molekularkräfte, und es stimmt dies mit der sehr engen Vereinigung, meist gegenseitigen Durchdringung der Atome im Molekül (M 24), im Vergleiche mit den meist losen molekularen Aneinanderlagerungen.

Findet Volumänderung beim Ablauf der Umsetzung statt, so ist auch Arbeitsaustausch mit der Umgebung in der gemessenen Wärmemenge mit einbegriffen (vgl. 113 u. f.).

131. Sprengstoffe. — Chemische Energie ist nicht nur in Stoffen, die chemischer Bindung fähig sind, zu finden, wie in Kohle mit Luftvorrat, sondern auch in zersetzungsfähigen Stoffen. Hierher gehören viele Explosivstoffe. Es sind dies besonders gewisse Stickstoffverbindungen, deren Moleküle leicht dadurch zerfallen, daß ihre Atome in andere, viel festere Bindungen übergehen. Hierbei

leisten die chemischen Kräfte der zu engerer Zusammenlagerung kommenden Atome Arbeit, die ganz in derselben Weise wie bei der Bildung von Molekülen aus vorher getrennten Bestandteilen als Wärme zum Vorschein kommt. Als wohl einfachstes Beispiel sei der sehr explosible Stickstoffwasserstoff genannt, N_3H, der nach der Gleichung $2N_3H = 3N_2 + H_2$ unter Energieabgabe zerfäll-, Nitroglyzerin, der wirksame Bestandteil des Dynamits, zerfällt in CO_2, Nt. H_2O und O_2 und liefert dabei 1·5 Kal/gr. Verglichen mit den Verbrennungs₂ wärmen der meisten Stoffe (Tab. 25) ist dies nicht viel; jedoch wird kein unwirksamer Luftstickstoff miterhitzt und die Zersetzungprodukte sind alle gasförmig, wodurch — zusammen mit der hohen Temperatur — der für Sprengwirkung erforderliche große Druck ausgeübt wird[1]).

132. Es ist damit in allen Fällen klar, worin die chemische Energie besteht. Es ist nicht notwendig, sie als besondere Energieform aufzufassen; sie ist potentielle Energie der Atome, so wie die Wärme als kinetische Energie der Moleküle sich zeigte (80). Nur die Unmöglichkeit, diese Energien der Atome und Moleküle in jedem Fall im einzelnen zu verfolgen und in Rechnung zu setzen, die besondere Art, wie sie den Sinnen erscheinen und wie sie daher auch gemessen werden müssen, war und ist bestimmend für die Unterscheidung von Wärme und von chemischer Energie als besonderen Energieformen. Daß die somit als chemische Energie unterschiedene potentielle Atomenergie ihren Sitz in den elektromagnetischen Feldern der Atome hat und somit elektromagnetische Energie ist, wie übrigens alle Energie, dies wird in der Elektrizitätslehre eingehend gezeigt (E 208, 209, 587).

133. Chemische Energie ist die Hauptgebrauchsform der Energie für irdische Bedürfnisse. — Heizmittel gegen die Winterkälte, Feuerungsmittel für industrielle und häusliche Zwecke sind zumeist die der Erdrinde in Gestalt der Steinkohle oder flüssiger Kohlenwasserstoffe entnommenen Vorräte von chemischer Energie.

Aber nicht nur als Wärmequellen dienen diese Vorräte; in den Dampfmaschinen und anderen Verbrennungsmotoren wird ihre chemische Energie auf dem Wege über Wärme in gewöhnliche kinetische und potentielle Energie umgewandelt und damit beliebigen mechanischen Verwendungen zugeführt. Inwieweit die Umwandlungsfähigkeit der chemischen Energie über Wärme in Arbeit beschränkt ist, werden wir bei eingehender Behandlung der Wärmemotoren untersuchen (246 u. f.).

Chemische Energie ist auch das Wesentliche in allen Nahrungsmitteln der Tiere und Menschen. Alle Energieleistung dieser Lebewesen samt ihrer Körperwärme entstammt der chemischen Energie der von ihnen täglich aufzunehmenden Nahrung. Die Nahrung verbrennt im Körper mit dem eingeatmeten Sauerstoff, soweit sie nicht zu Aufbau oder Erneuerung des Körpers dient. Wie im einzelnen die Verbrennung vor sich geht, ist für die Berechnung des Arbeitswertes der Nahrung nach dem Energiegesetz gleichgültig, wenn nur sicher steht, daß die einer vollständigen Verbrennung entsprechenden End-

[1]) Das alte Schießpulver wirkt durch Verbrennung von Schwefel und Kohle mit dem Sauerstoff des Salpeters; es gibt nur 0·7 Kal/gr, liefert Kohlensäure und Stickstoff, die den Druck ausüben, daneben aber unwirksame Kaliumverbindungen (K_2CO_3, K_2SO_4, K_2S) aus dem Salpeter.

produkte, Wasser und Kohlensäure nebst stickstoffhaltigen Abfallstoffen und Aschenbestandteilen erscheinen (M 158). Diese Produkte werden aber tatsächlich vom lebenden Körper ebenso dauernd abgegeben als Nahrung aufgenommen wird, und die Unerläßlichkeit der Sauerstoffzufuhr ist ebenfalls bekannt[1]).

Daher genügt es, zur Feststellung des Arbeitswertes von Nahrungsmitteln ihre Verbrennungswärme durch Verbrennung gewogener Mengen in einem Kalorimeter festzustellen. Einige Angaben für charakteristische Nährstoffe, wie Kohlehydrate (z. B. Zucker), Eiweißstoffe, Fette (z. B. Olivenöl) finden sich in Tab. 25. Es sind auch besondere Versuche an Lebewesen in Kalorimetern ausgeführt, die zeigten, daß die tägliche Wärmeabgabe tatsächlich gleich ist der Verbrennungswärme der täglichen Nahrung, was einem Nachweis der Gültigkeit des Energiegesetzes auch bei Mitwirkung von Lebensvorgängen bedeutet.

Wenn Arbeit nach außen abgegeben wird, ist diese zusammen mit der abgegebenen Wärme äquivalent der chemischen Energie der Nahrung. Die für einen arbeitenden Mann täglich erforderliche Nahrung ist zusammengesetzt aus etwa

500 gr	Kohlehydraten	mit	2000	Kalorien chemischer Energie,
130 gr	Eiweiß	„	740	„ „ „ ,
100 gr	Fett	„	940	„ „ „ ,

was zusammen 3680 Kal ausmacht. Da durchschnittlich $^1/_{10}$ der aufgenommenen Nahrung unverbraucht wieder abgeht, so bleiben für den täglichen Energiebedarf rund 3300 Kal übrig. Davon können die äußeren Arbeitsleistungen sehr gut bestritten werden. Ein Bergsteiger z. B. kann im Tag 4000 m Höhenunterschied überwinden, wobei sein eigenes Gewicht samt Traglast 100 kgr betragen kann, was 400000 mkgr Arbeit = 940 Kalorien ausmacht. Die übrigen 3300 — 940 = 2360 Kalorien gehen dann als Wärme an die Umgebung, und dies ist auch ungefähr der im Kalorimeter gemessene, gewöhnliche tägliche Wärmeverlust eines körperlich Arbeitenden. Bei vollkommener Ruhe werden nur etwa 1700 Kal Wärmeabgabe gemessen; es ist dann aber auch weniger Nahrung erforderlich, oder es erfolgt Aufspeicherung von chemischer Energie (hauptsächlich in Gestalt von Fettablagerung) im Körper.

Die Körperwärme ist übrigens nicht ganz als unmittelbare Verbrennungswärme der Nahrungsmittel aufzufassen; ein Teil davon ist Reibungswärme von Muskelarbeit, die aus der chemischen Energie der Nahrungsmittel im Inneren des Körpers geleistet wird. Solche Muskelarbeit ist auch im äußerlich ruhenden Körper ununterbrochen im Gange: Das Herz unterhält den Blutkreislauf; Atmungs- und Verdauungsorgane sind in andauernder Bewegung. Allein schon die Arbeit des Herzens, dieses zum Gefäß geformten Muskels wird auf 18000 mkgr = 42 Kal im Tag geschätzt; aufgespeichert bleibt nichts von ihr, weder als kinetische noch als potentielle Energie; sie wird ganz Reibungswärme in den Blutbahnen.

---

[1]) Dieser Stoffwechsel ist einschließlich des Sauerstoffverbrauchs und der Kohlensäureabgabe auch quantitativ kontrolliert. Es ist dadurch — soweit zu sehen — sichergestellt, daß die Lebensvorgänge den Atomen nichts anhaben, sie auch weder vermehren noch an Zahl vermindern, sondern nur umgruppieren, ganz wie es die Chemie an leblosen Stoffen stets schon gezeigt hatte, wenn auch in den Lebewesen Atomgruppierungen zustandekommen, die künstlich nicht hergestellt werden können, nämlich die großen, Geist festhaltenden Atomgruppierungen (86).

134. Unmittelbare Verwandlung von chemischer Energie in mechanische Arbeit. — Solche Verwandlung geht im lebenden, arbeitenden Muskel vor sich im Gegensatz zur Dampfmaschine und den anderen Wärmemotoren, welche die chemische Energie der Kohle oder sonstigen Treibstoffe erst in Wärme und dann diese in mechanische Arbeit verwandeln (246 u. f.).

Wir haben den Muskel schon als Sitz elastischer Kräfte betrachtet und als einen Molekular-Mechanismus erkannt (M 283). Die Kräfte treten bei Nervenwirkung auf, durch welche die schon betrachtete chemische Umsetzung im Muskel ausgelöst wird, die im Ergebnis einer Verbrennung der im Blute gelösten Nährstoffe gleichkommt. Hierbei bilden sich die besonderen, mit den großen Kräften einander anziehenden Moleküle, was eine Umwandlung der vorher vorhandenen chemischen Energie in potentielle Energie des nun gespannten Muskels bedeutet. Die chemischen Kräfte der sich umgruppierenden Atome arbeiten also hier nicht an ungeordneter innermolekularer und molekularer Bewegung, was Wärmeentstehung wäre; sondern die Umgruppierung scheint in so geordneter Weise vor sich zu gehen, daß die Anziehungsrichtungen der Atome in den neugebildeten Molekülen großenteils übereinstimmen mit der Richtung der Muskelfasern. Nur wenig Unordnung, d. i. nur wenig Wärme tritt dabei auf, im Gegensatz zu gewöhnlichen Verbrennungen, wo alle Arbeit der chemischen Kräfte in ungeordneter Atom- und Molekülbewegung sich erschöpft.

Solche ungeordnete Bewegung in Ordnung zu bringen, d. i. in Bewegung großer Massen übergehen zu lassen, dies ist die Leistung der Wärmemotoren; es zeigt sich, entsprechend dem schon behandelten Erfahrungssatz (111), daß diese Ordnungsaufgabe nur teilweise lösbar ist, daß stets ein Teil der Wärme unausgenutzt übrigbleiben muß. Der Muskel umgeht dies in der angedeuteten Weise, indem in ihm die Unordnung von vornherein mindestens großenteils vermieden wird.

Ein gewisser Teil der verschwindenden chemischen Energie erscheint allerdings auch im Muskel als Wärme. Man kann diese Wärmeentwickelung im arbeitenden Muskel zugleich mit der geleisteten Arbeit messen. Die Summe beider Energien ist gleichzusetzen der nicht leicht unmittelbar zu messenden verschwundenen chemischen Energie, weil andere Energieformen nicht auftreten, woraus man unmittelbar berechnet, welcher Bruchteil der chemischen Energie als Muskelarbeit verfügbar wird. Diese Angabe kann „**Wirkungsgrad**" **des Muskels** genannt werden. Man fand ihn in verschiedenen Fällen zwischen 0·25 und 0·75 (oder mehr), je nach der Art des Muskels. Wärmemotoren können so viel nicht leisten ohne große Temperaturunterschiede zur Verfügung zu haben (254), die im lebenden Organismus fehlen und die er auch gar nicht vertragen würde. Er bedarf der Temperaturunterschiede auch nicht, dank seinem Molekular-Mechanismus, der ohne den Umweg über die Wärme arbeitet, so wie für ihn auch alle gewohnten Maschinenteile entfallen.

Solcher Molekular-Mechanismus ist freilich nur in dem, den Lebewesen eigenen, teils festen teils flüssigen Zustande der Materie möglich, wobei sowohl das Zusammenhängen der kräftegebenden Moleküle als auch das freie Zuströmen der energiebringenden Atome und das Abströmen der verbrauchten Stoffe gesichert ist.

IV. Ausbreitung der Wärme.

In dreierlei völlig voneinander verschiedenen Weisen kann Wärme von Stelle zu Stelle kommen: durch Mitführung, durch Leitung und durch Strahlung. Wir betrachten diese Vorgänge der Reihe nach.

1. Mitführung.

135. Bei dieser Ausbreitungsweise ist die Wärme mit dem warmen Körper bewegt. Es ist dies — nach Kenntnis von der Natur der Wärme — nur eine Übereinanderlagerung der ungeordneten Molekularbewegung mit der gleichzeitigen geordneten Bewegung, die als Bewegung des ganzen Körpers sichtbar ist.

Innerhalb flüssiger und gasförmiger Körper erfolgt diese Ausbreitung der Wärme selbsttätig durch die Strömungen, welche infolge der spezifischen Gewichtsunterschiede auftreten und die wir schon eingehend betrachtet haben (25 u. f., 41 u. f.). Es ist dies die gewöhnlichste und wirksamste Ausbreitungsweise der Wärme in Körpern dieser beiden Aggregatzustände. Wir haben ihre allgemeine Wichtigkeit auch schon in Einzelfällen hervorgehoben, Winde und Meeresströmungen behandelt, und wir kommen im Zusammenhang mit den anderen Ausbreitungsweisen noch gelegentlich darauf zurück.

Wärmeübertragung durch Strömung in Flüssigkeiten und Gasen gehört ebenso wie Leitung und Strahlung zu den von selbst verlaufenden Ausbreitungsvorgängen der Wärme. Auch Strömungen lassen aber Wärme nur von einem heißeren zu einem kälteren Körper übergehen, nie umgekehrt, wie es dem allgemeinen Erfahrungssatz 111 entspricht; denn der Übergang der Wärme von dem sie fortführenden Körper in einen anderen findet doch zuletzt nur durch Leitung an den Orten der Berührung der Körper statt (vgl. 138).

2. Wärmeleitung.

136. Bei der Ausbreitung durch Leitung bewegt sich die Wärme nicht mit dem Körper, sondern durch ihn hindurch. Es wird hier die ungeordnete Molekularbewegung von Molekülschicht zu Molekülschicht weitergegeben, und insofern dabei die Energie dieser Bewegung ungeändert bleibt, kann die Wärme bei Wärmeleitungsvorgängen einfach wie ein Stoff von unveränderlicher Menge behandelt werden.

Auch dieser Vorgang ist alltäglich. In festen Körpern, wo die Ausbreitung durch Strömung ausgeschlossen ist, ist Wärmeleitung die Haupt-Ausbreitungsweise. Doch ist die Wärmeleitfähigkeit verschiedenen Stoffen in sehr verschiedenem Maße eigen. Metalle sind meist sehr gute Wärmeleiter; Holz,

Glas und fast alle nichtmetallischen Stoffe sind schlechte Wärmeleiter. Man weiß das aus alltäglicher Erfahrung schon mit dem Wärmesinn der Haut. Einen Metallstab, der an einem Ende glühend gemacht ist, kann man alsbald auch am anderen Ende nicht mehr gut anfassen; ein Glasstab kann dicht an glühender Stelle in der Hand gehalten werden. Ein Metallstück von Zimmertemperatur fühlt sich kalt an, ein Holzstück warm; ersteres leitet schnell Wärme aus der Hand weg und kühlt dadurch die Haut, Holz tut das nicht, und der Wärmesinn zeigt bekanntlich immer nur die Temperatur der Haut an (3).

137. „Kälteleitung". — Kühlt man einen Metallstab am einen Ende, etwa in Eis, so wird er alsbald auch am anderen Ende kalt. Dies sieht aus wie Kälteleitung, aber es ist nur Wärmeleitung in der entgegengesetzten Richtung; Kälteleitung gibt es ebenso wenig als etwas Besonderes, wie Kälte überhaupt (4).

138. Temperaturgefälle. — Alle solche Erfahrung ist zusammengefaßt in dem schon früher bemerkten Satz (6): Wärme bewegt sich durch Leitung stets nur von Orten höherer zu Orten niedrigerer Temperatur; sie folgt dem „Temperaturgefälle", so wie Wasser von selber immer nur bergab, niemals bergauf fließt.

„Temperaturgefälle" ist dabei ein Begriff ähnlich „Druckgefälle" oder „Geschwindigkeitsgefälle" (M 383, 401); er ist quantitativ zu fassen und bedeutet das Verhältnis von Temperaturunterschied zum Abstand, in welchem er sich findet (Einheit ^{0}C/cm).

Gute Wärmeleiter dulden keine großen Temperaturgefälle in sich; sie gleichen die Temperaturen schnell durch die Leitung aus, bringen die Gefälle zum Verschwinden. Bei den schlechten Wärmeleitern erfolgt der Ausgleich langsam.

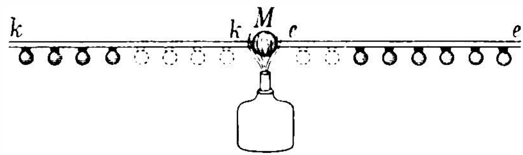


Abb. 68. Wärmeleitung.

Die Wärmeleitung macht es, was eine andere allgemeine Erfahrung zeigt (6): daß Körper, die lange genug einander berühren, von selber stets gleiche Temperatur annehmen.

139. Quantitative Erfassung der Wärmeleitfähigkeit. — Will man verschiedene Wärmeleiter miteinander vergleichen, so kann man verfahren wie es Abb. 68 zeigt. An der Metallkugel M sind die beiden Stäbe e e (Eisen) und k k (Kupfer) gleicher Abmessung aus den zu vergleichenden Stoffen befestigt. Die Stäbe tragen unten kleine Holzkügelchen mittels Wachs angeklebt. Erhitzt man M, so erhalten die Stäbe Wärme durch Leitung, und sobald an einer Stelle Wachsschmelztemperatur erreicht ist, wird dies durch Abfallen des betreffenden Holzkügelchens ersichtlich. Es zeigt sich so beispielsweise bei Eisen (e e) und Kupfer (k k) wenige Minuten nach Beginn der Erhitzung der in der Abbildung ersichtliche Unterschied; die punktierten Kügelchen sind abgefallen. Kupfer leitet danach besser die Wärme als Eisen.

Aber dieser Schluß könnte auch verfehlt sein; denn der Versuch ist nicht rein. Es kommt bei ihm nicht nur die Wärmeleitfähigkeit, sondern auch die spezi-

fische Wärme der beiden Stoffe zur Geltung (149)[1]). Kupfer hat eine kleinere spezifische Wärme als Eisen (Tab. 21), es würde daher auch bei gleicher Wärmezufuhr, bei gleichguter Leitung, heißer werden als das Eisen, und dies verdirbt den Schluß.

Die Mitwirkung der spezifischen Wärme wird aber nie fehlen, wenn Temperaturänderungen beim Leitungsvorgang vorkommen; um ein einwandfreies Maß für die Wärmeleitfähigkeit zu gewinnen, muß ein Leitungsvorgang ohne Temperaturänderungen benutzt werden. Solche Vorgänge gibt es; man nennt sie „stationär" (beharrend). Der einfachste Vorgang dieser Art ist das Hindurchströmen der Wärme durch eine Platte, deren beide Oberflächen einen gleichbleibend gehaltenen Temperaturunterschied haben, wie es beispielsweise bei der Wand eines Dampfkessels der Fall ist, durch welche die Wärme der Feuerung ins Wasser strömt.

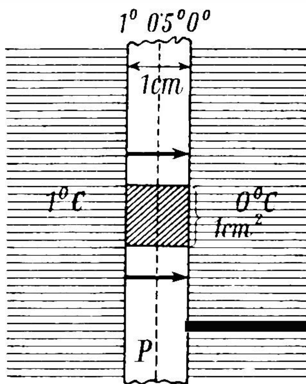


Abb. 69. Bemessung der Wärmeleitung.

Es stehe in Abb. 69 die ebene Platte P senkrecht zur Zeichnungsebene, so daß sie im Schnitt erscheint, der ihre Dicke von 1 cm zeigt; links grenze sie an ein Bad von dauernd 1°C, rechts an eines von dauernd 0°C. Stets wird dann Wärme in Richtung der Pfeile durch die Platte strömen, wobei in ihrer Dicke (bei einheitlicher Beschaffenheit) ein gleichförmiges Temperaturgefälle (138) sich herausbildet, so daß in unserem Falle auf je 1 mm Dicke 0·1° Temperaturunterschied kommt, die Mittelschicht der Platte also z. B. 0·5° Temperatur haben wird, und diese Temperaturverteilung im Inneren der Platte bleibt ebenso dauernd erhalten wie die beiden Endtemperaturen. Jede andere Temperaturverteilung würde Häufung von Wärme in einer der Schichten geben, weil Zu- und Abströmung der Wärme nicht gleich wären, wäre also noch nicht stationär.

Die Wärmemenge, welche so unter dem Einfluß eines festgelegten Temperaturgefälles durch je 1 cm² der Plattenfläche in der Zeiteinheit fließt, ist einwandfreies Maß der Wärmeleitfähigkeit des Stoffes der Platte.

140. Maß der Wärmeleitfähigkeit. — Die Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes ist danach definiert und meßbar durch die Wärmemenge, welche den Einheitswürfel (in der Abb. 69 schräg schraffiert) bei 1° Temperaturunterschied der Endflächen in der Zeiteinheit durchströmt, oder — allgemeiner — welche beim Temperaturgefälle Eins (1°C/cm) in der Zeiteinheit durch die senkrecht zum Gefälle stehende Flächeneinheit geht. Die Einheit der Leitfähigkeit ist danach Kal/(°C/cm)sek cm² = Kal/°C cm sek.

Man sieht, daß Messungen von Wärmeleitfähigkeiten eine kalorimetrische Aufgabe sind; es müssen Wärmemengen gemessen werden. Es ist dabei nicht nötig, den einfachen Fall der planparallelen Platte zu verwirklichen; es können auch andere Fälle von Wärmeleitung benutzt werden, die alle auf

[1]) Verschiedenheit der Wärmeabgabe der Stäbe nach außen, die ebenfalls stören würde, fällt bei gleicher Oberflächenbeschaffenheit weg.

diesen einfachen Fall zurückführbar sind[1]). Diese Zurückführung geschieht mittels Rechnung, indem für die Grenzflächen jedes einzelnen Raumelements des wärmeleitenden Körpers in jedem Zeitelement gilt, daß die ein- oder austretenden Wärmemengen proportional sind der Flächengröße und proportional dem senkrecht zur Fläche vorhandenen Temperaturgefälle, was auch die Grundlage der Theorie der Wärmeleitung ist (144). Daß die Proportionalität mit dem Temperaturgefälle zutrifft, dies zeigt sich aus den Meßergebnissen bei verschiedenen Temperaturgefällen.

141. Zahlenwerte der Leitfähigkeit fester Körper. — Tab. 26 zeigt einige Meßergebnisse, wobei als Einheit der Wärmemenge 10^{-3} Kal genommen ist[2]). Wir betrachten zunächst die festen Körper. Obenan stehen die Metalle als beste Wärmeleiter, über allen das Silber. Legierungen, wie Neusilber, leiten teilweise ziemlich schlecht. Noch zehn- und mehrmal schlechter leiten aber Stoffe wie Marmor, Glas, Holz; es kommen hier Unterschiede gegen Silber vor wie 1:1000, was ganz der gewöhnlichen Erfahrung entspricht (136).

Tab. 26. **Wärmeleitfähigkeiten.**

10^{-3} Kal in der Sekunde durch 1 cm³ bei 1⁰ Temperaturdifferenz der Enden.

Silber	1·006	Marmor	0·0082
Kupfer	0·89	Glas	0·001
Aluminium	0·48	Eichenholz ǁ z. Faser	0·0015
Zink	0·26	" ⊥ " "	0·0007
Eisen	0·16	Quecksilber	0·018
Nickel	0·14	Wasser	0·0012
Blei	0·08	Luft (bei 0⁰)	0·00005
Neusilber	0·07	Wasserstoff (bei 0⁰)	0·0004
		Kohlensäure (bei 0⁰)	0·00003

142. Sehr Bemerkenswertes zeigt ein Vergleich der Wärmeleitfähigkeit mit dem elektrischen Leitvermögen (Tab. 44, Bd. III); man sieht bei beiden nahe die gleichen Abstufungen. Silber ist bester Wärmeleiter und Elektrizitätsleiter, danach folgt Kupfer; Eisen leitet wesentlich schlechter, Neusilber noch schlechter, und die schlechtest wärmeleitenden Stoffe, wie Glas und dergleichen sind auch elektrische „Isolatoren".

Dieser Zusammenhang der beiden Leitvermögen zeigt an, daß die Fortführung von Wärme und von Elektrizität in den Körpern nicht sehr verschiedene Vorgänge sein können. Elektrische Erfahrungen zeigen, daß in den guten Leitern stets freie Elektronen vorhanden sind, die auch durch Atome hindurch sich bewegen können (E 13, 148, 444, 490 u. f.). Wird durch diese Elektronen, welche die metallische Elektrizitätsleitung besorgen, auch die Wärmeleitung in den guten Leitern bewirkt, so ist jener Zusammenhang verständlich. Die Elektronen müßten dann an der Wärmebewegung der Moleküle (Atome) teilnehmen, und

---

[1]) Bei Benutzung geeigneter nichtstationärer Leitungsvorgänge kann die Kenntnis der spezifischen Wärme des Stoffes an Stelle besonderer kalorimetrischer Messung treten, wobei dann Temperaturmessungen genügen (vgl. das Beispiel im Anhang W I, 4).

[2]) Dies ist die auf 1 gr Wasser (statt 1 kgr) bezogene Kalorie, manchmal auch „kleine Kalorie" genannt (vgl. Note zu 48).

sie könnten diese Bewegung in der Tat sehr viel schneller fortpflanzen als es durch die Kräfte der benachbarten Moleküle aufeinander möglich ist; denn die freien Elektronen nehmen wegen ihrer geringen Masse leicht sehr große Geschwindigkeiten an und sie können Molekülschichten durchqueren und somit auf größere Abstände wirken. Wie sehr gering die Fortpflanzung der Wärmebewegung durch die Molekularkräfte allein ist, dies zeigt die sehr schlechte Wärmeleitung aller der Stoffe, wie Glas usw., die freie Elektronen nicht enthalten.

143. Körper, die nach verschiedenen Richtungen ungleich beschaffen sind, „anisotrope" Körper, zeigen auch je nach der Richtung verschiedene Wärmeleitfähigkeit. So alle nicht regulären Kristalle. In der Tab. 25 ist Holz als Beispiel eines anisotropen Körpers angeführt.

144. Theorie der Wärmeleitung. — Hat man die Angaben für die Wärmeleitfähigkeit, samt spezifischer Wärme und spezifischem Gewicht eines Stoffes, so kann man jeden beliebigen, auch nichtstationären Wärmeleitvorgang in dem Stoff berechnen. Es geschieht dies durch Anwendung der schon erläuterten einfachen Kenntnisse (140) auf jedes Raumelement des betreffenden Körpers, was die Grundgleichung für alle Wärmeleitungsvorgänge gibt[1]). Das Folgende zeigt in einigen Beispielen bemerkenswerte Ergebnisse solcher Berechnung.

145. Eindringen der Temperaturschwankungen der Tages- und der Jahreszeiten ins Erdinnere. — Jede dieser beiden, durch die veränderliche Sonnenbestrahlung der Erdoberfläche gegebenen Schwankungen dringt durch Wärmeleitung in die Tiefe, und zwar stören beide einander nicht, sondern summieren sich bloß; sie können daher einzeln untersucht werden.

Die Rechnung[2]) ergibt, daß das Eindringen mit Abschwächung erfolgen muß, die um so stärker ist, je geringer die Wärmeleitfähigkeit des Erdbodens und je kürzer die Periodendauer der Schwankung ist, und zwar ist die Quadratwurzel der Dauer maßgebend. Es verhalten sich die Periodendauern der täglichen und der jährlichen Schwankungen wie 1:365, somit die noch merklichen Eindringungstiefen wie $\sqrt{1}:\sqrt{365} = 1:19$. In der Tat hat man Spuren der täglichen Temperaturschwankung bis etwa 1 m Tiefe, der jährlichen bis etwa 20 m Tiefe noch merken können.

Die Abschwächung ist sehr stark, wie folgende Zahlen für die jährliche Schwankung nach Edinburgher Beobachtungen zeigen. Es wurde gefunden

in der Tiefe von	1 m	2 m	4 m	8 m
die Schwankung	4·6°	3·3°	1·9°	0·6°.

Man berechnet daraus mittels der gemessenen spezifischen Wärme 0·53 Kal/°Cdm³ des Bodengesteins die Wärmeleitfähigkeit desselben zu $0{\cdot}004 \cdot 10^{-3}$ Kal/°Ccmsek, was für solchen Stoff auch paßt (vgl. Tab. 26).

Das Eindringen erfolgt mit Verspätung, die ebenfalls nach der Wärmeleitfähigkeit und der Periodendauer sich richtet. Sie wird für die jährliche Schwankung mit der gefundenen Wärmeleitfähigkeit zu rund $^1/_4$ Jahr für je 4 m Tiefe berechnet. Ist daher an der Erdoberfläche gerade Winter, so findet sich in 4 m Tiefe der vorige Herbst, in 8 m der vorige Sommer, jeweils mit der schon angegebenen Abschwächung; vom vorigen Frühling in 12 m Tiefe oder gar vom vorigen Winter in 16 m Tiefe ist nur wenig mehr zu merken.

---

[1]) Anhang W I, 1 enthält das Nähere hierzu; neue Naturkenntnis kommt dabei nicht vor.
[2]) Siehe Anhang W I, 4.

146. Abkühlung der Erde in den geologischen Zeiten. — Die Erde, eine nach aller Kenntnis zweifellos ursprünglich glühendflüssige Kugel, ist infolge dauernder Wärmeausstrahlung von ihrer Oberfläche in den Raum hinaus allmählich in den gegenwärtigen Zustand sehr vorgeschrittener Abkühlung gekommen.

Wieviel Wärme aus dem Erdinnern in der Zeiteinheit von der Erdoberfläche zur Ausstrahlung kommt, dies hängt von der Zufuhr aus dem Erdinneren ab. Betrachten wir die Vorgänge seit der Zeit der ersten Bildung einer festen Erdkruste, so erfolgt die Wärmezufuhr aus dem Inneren nach der Oberfläche nur mittels Leitung durch diese Kruste; Strömungsübertragung bis zur Oberfläche hin ist ausgeschaltet. Die Leitung ist aber bei der geringen Leitfähigkeit der Gesteine ein so langsamer Vorgang im Vergleich zur Weitergabe der Wärme durch Strahlung in den Raum hinaus[1]), daß alsbald nach Bildung der ersten festen Kruste schon nahe diejenige verhältnismäßig niedrige Temperatur an der Erdoberfläche sich einstellen mußte, die — wie es heute gilt (186) — durch die Strahlungsheizung von der Sonne her bedingt ist. Es war daher bald nach Bildung der festen Kruste auch die Möglichkeit für organisches Leben auf Erden vorhanden, so daß unsere Betrachtung sich auf die Zeit seit Eintreten dieser Möglichkeit beziehen wird.

Die innere Erdwärme mußte damals allerdings schon in geringen Tiefen unter der Erdoberfläche sehr merklich gewesen sein; es mag ein Temperaturgefälle von mehreren °C auf 1 m Tiefe vorhanden gewesen sein. Heute ist infolge der weiter fortgeschrittenen Wärmeverluste dieses Temperaturgefälle sehr gering geworden. Man weiß aus Temperaturmessungen in Bergwerken und bei Tunnelbauten, daß in Übereinanderlagerung mit dem vorher betrachteten, von der Sonnenwärme herrührenden Temperaturgefälle (145) eine Temperaturzunahme von 1° auf je 25 m Tiefe sich findet. Diesem sehr geringen Temperaturgefälle entsprechend findet heute so gut wie gar keine Heizung der Erdoberfläche aus der Tiefe mehr statt; man bedenke, daß eine 25 m dicke Schicht schlechten Wärmeleiters uns von einer nur um 1° erhitzten Wärmequelle trennt; da ist es auch nicht verwunderlich, daß die Temperatur des Meeresbodens selbst am Äquator nahe 0°C ist (27).

Der nun zu betrachtende Übergang vom einstigen, großen Anfangsgefälle der Temperatur zu dessen jetziger geringer Größe, bei nahe gleichbleibender Temperatur der Oberfläche, ist ein Vorgang nichtstationärer Wärmeleitung, der wieder mittels der Grundgleichung für alle Wärmeleitungsvorgänge (144) berechnet werden kann. Man berechnet am besten die Temperaturänderungen einer unendlich dicken Schicht von ursprünglich überall gleicher, hoher Temperatur, deren Oberfläche dann zu einer Anfangszeit $t = 0$ plötzlich auf niedrige Temperatur gebracht und weiter dauernd bei derselben gehalten wird[2]). Es

---

[1]) Man überzeugt sich davon leicht, wenn man die Angabe der Tab. 27 für 300°abs. mit der aus der Leitfähigkeit folgenden Wärmezufuhr vergleicht. Selbst bei einem Temperaturgefälle von 4°C/m würde nur weniger als $^1/_{50}$ der Wärme aus dem Erdinneren zugeleitet, die tatsächlich ausgestrahlt wird.

[2]) Die Betrachtung einer solchen Schicht statt der Erdkugel genügt vollkommen, da die Ausführung der Rechnung zeigt, daß schon in $^1/_{10}$ Erdradius Tiefe unter der Oberfläche der betrachteten Schicht auch nach 10^9 Jahren noch so gut wie ungeänderte Anfangstemperatur vorhanden ist, wonach die Begrenztheit der Erdkugel keine Bedeutung für die zu ziehenden Schlüsse hat.

ergibt sich, daß das zur Zeit $t = 0$ unendlich große Temperaturgefälle an der Oberfläche im Laufe der Zeit immer mehr herabsinkt, so daß es zu beliebiger Zeit t die Größe $\vartheta_0/\sqrt{\pi \varkappa t / cs}$ hat, wobei ϑ_0 die Differenz der hohen Anfangstemperatur des Inneren gegen die dauernde Oberflächentemperatur, $\varkappa$ die Wärmeleitfähigkeit, c die spezifische Wärme, s das spezifische Gewicht der betrachteten Schicht ist. Nimmt man $\vartheta_0 = 4000^0$, was etwa dem Erstarrungspunkt der Erdgesteine entspricht, und $\varkappa$ und cs mit den vorher gefundenen Werten (145), so ergibt sich das Temperaturgefälle an der Oberfläche zu den

Zeiten	$t = 0$	10000	1000000	100000000	Jahre
zu	∞	4·5	0·45	0·045	^{0}C/m.

Man sieht, daß das gegenwärtige Temperaturgefälle, 1^0C/25m $= 0{\cdot}04^0$C/m, nahe der Zeit $t = 10^8$ Jahren entspricht; rechnet man die ersten 1000 oder 10 000 Jahre ab, während welchen vielleicht der berechnete Vorgang nicht genügend der Wirklichkeit entspricht, so bleiben doch noch rund die 100 Millionen Jahre als Zeit seit Bestehen einer festen, gemäßigt warmen Erdrinde bis heute.

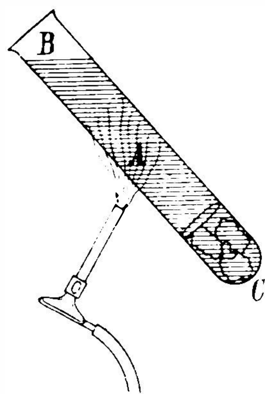


Abb. 70. Schlechte Wärmeleitung von Wasser.

Diese Zeit kann in Wirklichkeit noch länger gewesen sein; denn es sind Vorgänge bekannt, welche ein bei der Rechnung nicht berücksichtigtes Neuhinzukommen von Wärme im Erdinneren bedeuten. Besonders der unter Wärmeentwickelung erfolgende radioaktive Zerfall der schwersten Atome (E 554) gehört hierher[1]. Nach der durchschnittlichen Radioaktivität der Gesteine der Erdrinde würde die Temperatur des Erdinneren sogar steigen müssen, wenn die Radioaktivität in allen Tiefen dieselbe ist und wenn nicht die hohen Drucke des Erdinneren den Zerfall der Atome behindern (M 305). Hierüber fehlt genügende Kenntnis, und man kann daher hieraus nicht sagen, wie weit über 100 Millionen Jahre die gesuchte Zeit gewesen sei. Doch geben andere Wege Aufschluß; sie ergeben in der Tat eine längere Zeit — rund 1000 Millionen Jahre — für das Alter der festen Erdrinde (E 567) und damit für die Zeit zur Entwickelung von Lebewesen auf Erden.

147. Wärmeleitung in Flüssigkeiten. — Die sehr geringe Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeiten ist in Tab. 26 am Beispiel des Wassers und auch sogar des metallischen Quecksilbers zu sehen.

Eine gute Vergleichung der wirksamen Wärmeausbreitung durch Strömung in Flüssigkeiten mit der sehr unwirksamen durch Leitung erhält man, wenn man Wasser in einem etwas langen und weiten Glasrohre (Abb. 70) von halber Höhe her erhitzt. Die Wärme verbreitet sich von der bei A wirkenden Flamme schnell nach oben bis B durch Strömung (135), während unten von A bis C, wohin die Wärme nur durch Leitung kommen kann, alles kalt bleibt. Oben kocht zuletzt das Wasser, während an den bei C befestigten Eisstücken nicht die

[1]) Auch kann das Innere der ursprünglich flüssigen Erde heißer gewesen sein als die erstarrende Oberfläche; denn der Wärmeausgleich durch Strömungen ist bei so großen Massen sicherlich unvollkommen. Außerdem kann durch nachträgliches Erstarren tiefliegender Schichten noch beträchtliche Erstarrungswärme nachgeliefert worden sein (192).

mindeste Schmelzung bemerkbar wird. Befühlt man danach das Rohr außen bei A, so bemerkt man immer noch den schroffen Temperatursprung an der Grenze des oberen, heißen Teils gegen den unteren, immer noch kalt gebliebenen. Solche große Temperaturgefälle können nur in ganz schlechten Wärmeleitern bestehenbleiben.

Man sieht daraus, daß man Flüssigkeiten immer nur von unten, nicht von oben, gut erhitzen kann (ausgenommen Wasser unter 4°C). Das Beispiel des Meeres, das durch die Sonnenstrahlung von oben erhitzt wird und am Boden doch dauernd 0°C hat, zeigte dies ebenfalls schon (27).

Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten, wobei Strömung ganz ausgeschaltet sein soll, benutzt man demnach Erwärmung von oben. Die horizontale Flüssigkeitsschicht kann dabei zwischen zwei planparallelen Kupferplatten durch Oberflächenspannung gehalten sein.

148. Wärmeleitung in Gasen. — Noch viel schlechter als die Flüssigkeiten leiten die Gase.

Der Vorgang ist hier, bei den Gasen, gut gesichert bekannt. Es wirken hier weder Elektronen noch Molekularkräfte mit, sondern die Übertragung von Wärme, d. i. kinetischer Energie der Moleküle von Schicht zu Schicht, entlang dem Temperaturgefälle, erfolgt lediglich durch die Stöße der Moleküle. Es ist seit Kenntnis der Molekularbewegung der Gase (81) Vorausberechnung der Größe der Wärmeleitung für die Gase möglich gewesen, und das Ergebnis hat sich bewährt, was wieder eine Befestigung jener in der kinetischen Gastheorie (81 u. f.) zusammengefaßten Kenntnis bedeutet. Die Berechnung benutzt in der Hauptsache nur die einfachen, schon bei der Berechnung des Gasdruckes (34) und der inneren Reibung der Gase (94) entwickelten Gedankengänge[1]); die Verschiedenheiten der kinetischen Energien der Moleküle beim Vorhandensein eines Temperaturgefälles werden durch die Stöße ebenso auf Strecken gleich einer freien Weglänge übertragen, wie die tangentialen Geschwindigkeitsunterschiede bei der inneren Reibung. Das Ergebnis ist

$$\varkappa = K \cdot c_v \cdot \eta, \qquad 148)$$

wonach die Wärmeleitfähigkeit $\varkappa$ bei Gasen in einfacher Weise mit der inneren Reibung η und der spezifischen Wärme c_v zusammenhängt; K ist ein Zahlenfaktor, der bei einatomigen Molekülen 5/2, bei vielatomigen 3/2 beträgt.

Danach war für die Wärmeleitung der Gase dasselbe merkwürdige Verhalten zu erwarten wie für die innere Reibung η (96), nämlich nahe Unabhängigkeit vom Druck und Steigen proportional der Quadratwurzel der absoluten Temperatur, was die Messungen dann auch als richtig gezeigt haben.

Die Ausführung der Wärmeleitungsmessungen ist bei Gasen besonders erschwert durch die Mitwirkungsmöglichkeit nicht nur von Strömungen, sondern auch von Strahlung. In der Tat breitet sich Wärme durch ein Gas von Gefäßwand zu Gefäßwand am besten durch Strahlung aus; man ist daher auf Vergleichsversuche mit gasgefülltem und mit ausgepumptem Apparat angewiesen. Einige Ergebnisse sind in Tab. 26 enthalten. Man sieht die außerordentliche Kleinheit der Leitfähigkeit; am größten ist sie noch bei Wasserstoff, was nach der Gl. 148 dessen großer spezifischer Wärme c_v entspricht (Tab. 22).

[1]) Verwickelungen der Rechnung betreffen nur Nebendinge, deren Unsicherheiten das Ergebnis wenig beeinflussen.

Es ist bemerkenswert, wie sehr langsam hiernach Wärme, d. i. Energie ungeordneter Molekularbewegung in Gasen sich ausbreitet, während in einer Schallwelle die Energie geordneter Molekularbewegung mit fast der vollen Molekulargeschwindigkeit fortschreitet (87).

Wegen ihrer schlechten Wärmeleitung sind Gase die besten „Wärmeisolatoren"; sie schützen besser vor Wärmeverlusten als irgendwelche festen oder flüssigen Körper. Nur muß Strömung im Gas (135) ausgeschaltet sein. Dies geschieht z. B. durch einen eng umgrenzten Luftmantel, wie beim Kalorimeter Abb. 58. Ebenso schützen Doppelfenster im Winter vor Wärmeverlusten aus dem Zimmer mittels der zwischen den Fenstern eingeschlossenen Luftschicht. Die Pelze und Gefieder der Tiere sind schlecht leitende feste Körper mit viel eingeschlossener, noch viel schlechter leitender und am Fortströmen verhinderter Luft, ebenso Kleidung und Betten der Menschen.

149. Temperaturleitung. — Vorgänge von Temperaturausgleichung innerhalb eines Gasvolums, die nicht stationär sind und wobei also neben der Leitfähigkeit auch die spezifische Wärme maßgebend ist (139), verlaufen übrigens wegen der Kleinheit der auf die Volumeinheit bezogenen spezifischen Wärme $c_v s$ schneller als man nach der bloßen Leitfähigkeit erwarten würde. Es ist dabei $\varkappa / c_v s$ maßgebend (s das spezifische Gewicht)[1]) und dieses — auch „Temperaturleitfähigkeit" genannte — Verhältnis ist z. B. bei gewöhnlicher Luft nicht kleiner als bei Eisen und über 200 mal so groß als bei Wasser.

3. Wärmestrahlung.

150. Grunderfahrungen. — Daß Wärme auch in noch anderer Weise als durch Strömung und durch Leitung sich verbreiten kann, dies zeigen alltägliche Erfahrungen. Wir fühlen uns im Sonnenschein erwärmt von der Sonne; treten wir in den Schatten, wo gradlinige Ausbreitung von der Sonne her abgeschnitten ist, so fällt diese Erwärmung weg. Dies ist nicht Leitung, auch nicht Strömung von Sonnenwärme zur Erde; denn Leitung und Strömung sind nicht an gerade Linien gebunden und es fehlt im Raum zwischen Sonne und Erde überhaupt ein strömender oder leitender Körper.

Diese wärmende Wirkung in geraden Linien ist aber nicht immer mit sichtbarem Licht vereint, wie bei der Sonne; man kann ganz entsprechende Beobachtungen an einem heißen, aber nicht glühenden, dunklen Ofen machen; auch er wärmt, auf erhebliche Abstände fühlbar, in geraden Linien; man kann sich durch Schirme vor dieser Erwärmung schützen.

Es gibt also auch unsichtbare Wärmestrahlung (Scheele 1777).

a) Wärmestrahlung und Licht.

Die Geradlinigkeit der Wärmestrahlung fordert heraus zu Vergleichen mit dem Licht.

151. Spiegelung. — Man findet, daß auch die unsichtbaren Wärmestrahlen gespiegelt werden und zwar nach demselben Gesetz der Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel wie Licht (O 28). Dies führt zu einer Reihe von Beobachtungen, die in mehrfacher Beziehung Wesentliches zeigen (151—154).

Zwei metallene Hohlspiegel H_1 und H_2 sind in 5 oder mehr Metern Abstand einander gegenüber aufgestellt, wie es Abb. 71 zeigt. Eine Strahlungs-

[1]) Siehe Anhang W I, 3.

quelle A im Brennpunkt des einen Spiegels sendet dann alle gegen diesen Spiegel gehende Strahlung mittels zweimaliger Reflexion in den Brennpunkt B des anderen Spiegels; Einfalls- und Reflexionswinkel samt dem Einfallslot sind für einen der Strahlen am Spiegel H_1 in der Abbildung zu sehen.

Steht bei A eine Kerzenflamme, so kann man auf einem Papierstück bei B ihr Licht als hellen Fleck oder Bild der Flamme gesammelt sehen. Ein ebendorthin gebrachtes Thermometer, auf dessen bei B befindliches (am besten geschwärztes, vgl. 159) Quecksilbergefäß der Lichtfleck fällt, zeigt beträchtliche Erwärmung an. An Stelle des Thermometergefäßes dient noch besser die empfindliche Lötstellenfläche einer Thermosäule (44), deren Leitungsdrähte G zu einem Galvanometer führen, wie es die Abbildung zeigt. Der Ausschlag am Galvanometer zeigt noch viel schneller und empfindlicher die Erwärmung an als das Quecksilberthermometer.

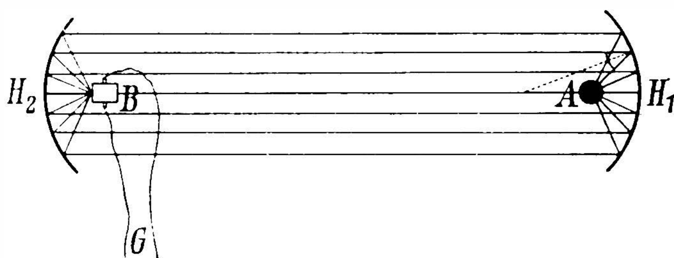


Abb. 71. Wärmestrahlung.

Derselbe Erwärmungsnachweis in B gelingt aber auch, wenn in A eine dunkle, nicht glühende, sondern nur etwa auf 400°C erhitzte (am besten berußte) Metallkugel sich befindet. Rückt man die Metallkugel oder auch die Thermosäule nur wenig aus dem Brennpunkt heraus, so bleibt die Erwärmungsanzeige aus; ebenso wenn ein Schirm aus Pappe oder Metall in der Strecke zwischen den beiden Spiegeln so eingeschoben wird, daß er das ganze in der Abbildung ersichtliche Strahlenbündel auffängt. Dies alles beweist zweifelsfrei und in auffallender Weise die geradlinige Ausbreitung, sowie die richtige Spiegelung der unsichtbaren, von der heißen Kugel ausgehenden, wärmenden Strahlung, gleich der Spiegelung von Licht.

152. „Kältestrahlung"; Gültigkeit des allgemeinen Erfahrungssatzes über Wärmeausbreitung. — Eine sehr bemerkenswerte Beobachtung ergibt sich, wenn man, während in B die Thermosäule ist, in A ein Stück Eis anbringt: Die Thermosäule zeigt dann Erkaltung an. Dies sieht aus wie Kältestrahlung von A über die Spiegel nach B. Aber Kälte als etwas Besonderes gibt es nicht (4), und ebensowenig gibt es eine Kältestrahlung; sondern es ist nur Wärmestrahlung in der entgegengesetzten Richtung, was hier beobachtet wird.

Diese Strahlen, die wie Licht reflektiert werden, gehen nämlich auch wie Licht hin und zurück denselben Weg, und eine Strahlung in beiden Richtungen findet hier wirklich statt, was im folgenden zu erläutern ist und durch alle Erfahrung bestätigt wird. A und B können ihre Wärme auf dem Wege über die Spiegel

durch Strahlung miteinander austauschen, so als wären sie durch einen leitenden Kupferstab miteinander verbunden oder als wären sie einfach in Berührung miteinander gebracht.

Die Beobachtung mit dem Eis zeigt, daß bei solcher Strahlungsverbindung die Wärme stets ebenso nur vom wärmeren zum kälteren Körper geht, wie bei Leitung (137, 138). Beim Versuch mit der Kerze oder der heißen Kugel in A waren diese wärmer als die Thermosäule in B; daher ging Wärme von A nach B. Beim Versuch mit dem Eise war die Thermosäule in B wärmer als das Eis in A; daher ging Wärme von B nach A, die Thermosäule gab Wärme an das Eis ab und wurde dabei kälter, und so erfolgte die zu beobachtende Kälteanzeige der Thermosäule.

Es bewährt sich also hier der schon vorangestellte Erfahrungssatz (6, 111), daß Wärme von selber stets nur aus einem Körper höherer Temperatur in einen niedrigerer Temperatur geht, auch beim Übergang durch Strahlung.

153. Strahlung und Temperaturgefälle. — Ein Unterschied gegen den Übergang durch Leitung besteht bei der Strahlung darin, daß bei der Leitung der ganze Ausbreitungsweg durch das Temperaturgefälle gegeben ist (138), während bei Strahlung die Temperatur durchstrahlter Körper gleichgültig ist; nur im Endergebnis kommt die Wärme auch bei Strahlung vom heißen zum kalten Körper. So führt der Ausbreitungsweg beim Eisversuche (152) von der Thermosäule, die schon kälter geworden ist als die Zimmerluft, durch die wärmere Zimmerluft und von dieser erst zum noch kälteren Eis. Dieser Unterschied gegen die Leitung ist, wie bald zu sehen (160), darin begründet, daß bei der Strahlung die Wärme überhaupt nicht als solche sich ausbreitet, sondern daß sie unterwegs Energie anderer Form ist, nämlich Energie elektromagnetischer Wellen. Um so bemerkenswerter ist es, daß doch im Endergebnis derselbe Erfahrungssatz gilt wie bei Leitung.

154. Alle Körper strahlen. — Noch einen wichtigen Schluß gestattet der Eisversuch (152). Da der Versuch zeigt, daß nicht nur die heiße Kugel, sondern auch die Thermosäule von Zimmertemperatur oder auch niedrigerer Temperatur strahlt, ist eine untere Temperaturgrenze für die Strahlung nicht zu erwarten, und es ist auch keine gefunden worden, außer nur der absolute Nullpunkt (37). Alle Körper jeder Temperatur strahlen, nur im allgemeinen der heißere mehr als der kältere. Beide Körper A und B (Abb. 71), welche durch die Spiegel miteinander verbunden sind, strahlen einander zu, die Thermosäule zum Eis und das Eis zur Thermosäule; im Ergebnis kommt immer die Differenz der beiden, einander entgegengerichteten Strahlungswirkungen zur Geltung. Wenn zwei gleichbeschaffene Körper einander gegenüberstehen, so strahlt der heißere mehr als der kältere, und daher ist das Ergebnis, der Wärmeübergang vom heißeren zum kälteren, bis zum Temperaturausgleich, unmittelbar klar. Die besondere Betrachtung des Falles zweier verschieden beschaffener Körper, deren Strahlung bei gleicher Temperatur verschieden sein kann, verschieben wir auf später (166 bis 170).

155. Brechung der Wärmestrahlen. — So wie das Spiegelungsgesetz, gilt auch das Brechungsgesetz für die unsichtbaren wärmenden Strahlen, wie für das sichtbare Licht. Man kann alle Versuche der Optik mit Linsen und Prismen an den dunklen Strahlen ausführen und kann ein Spektrum von ihnen entwerfen

(O 44 u. f.); nur muß zur Beobachtung an Stelle des Auges die Thermosäule oder eine andere genügend empfindliche Thermometerart verwendet werden.

Sehr lehrreich sind Beobachtungen am Spektrum der Strahlung der Sonne oder auch künstlicher Lichtquellen schon zu früher Zeit gewesen. Man suchte ursprünglich die Verteilung der wärmenden Wirkung unter den verschiedenfarbigen Strahlen des Spektrums. Führt man das (geschwärzte) Gefäß eines Quecksilberthermometers oder die empfindliche Fläche einer Thermosäule durch das Spektrum des Sonnenlichtes von Violett bis Rot (O Abb. 40), so findet man neben sehr schwacher Erwärmung im Violett zunehmende Wirkung bei den weniger brechbaren Strahlen, nämlich im Indigo, Blau, Grün, Gelb, und auch gute Wirkung im Rot. Das Bemerkenswerteste ist aber, daß auch jenseits des Rot, außerhalb des sichtbaren Endes des Spektrums noch Erwärmung zu finden ist. Dorthin fallen also unsichtbare wärmende Strahlen, die somit im Sonnenlicht neben dessen sichtbaren Bestandteilen ebenfalls vorhanden sind und die nach der Lage im Spektrum weniger brechbar als diese sich zeigen.

Diese geringe Brechbarkeit ist den unsichtbaren wärmenden Strahlen immer eigen, auch wenn sie von dunklen heißen Körpern kommen, denen sichtbare Strahlen fehlen.

156. Ultrarot. — Es besteht danach zwischen den unsichtbaren wärmenden Strahlen und dem Licht kein anderer Unterschied als nur der zwischen verschiedenfarbigen Lichtern, die auch verschieden brechbar sind und dadurch im Spektrum getrennt sich finden. Man kann mit den unsichtbaren Strahlen auch alle Versuche der Interferenz, der Beugung und der Polarisation ausführen, die beim Licht dessen Wellennatur nachgewiesen und die Wellenlängen meßbar gemacht haben (O 120 u. f.); nur muß immer statt des Auges die Thermosäule oder eine sonstige Thermometervorrichtung benutzt werden.

Es ist danach kein Zweifel, daß alle Wärmestrahlung, auch die unsichtbare, elektromagnetische Wellenstrahlung — „Ätherstrahlung" — ist, wie das sichtbare Licht. Die Wellenlängen der unsichtbaren Strahlen ergaben sich dabei noch größer als die des roten Lichtes, welche die größten im sichtbaren Spektrum sind, was ganz der Lage jenseits des Rot im Spektrum entspricht.

Die unsichtbaren Wärmestrahlen sind also ihrem Wesen nach tatsächlich dasselbe wie Licht, nur von etwas größerer Wellenlänge, wofür unsere Augen nicht eingerichtet sind; man benennt sie daher am besten ebenso wie jedes der verschiedenen sichtbaren Lichter, nämlich mit dem Namen einer Farbe, und nennt sie nach der Lage im Spektrum „ultrarotes Licht" oder kurz „Ultrarot". „Wärmestrahlen" kann man sie auch nennen; aber dieser Name ist nicht so gut bezeichnend. Denn wärmend sind — wie wir sahen (155) — auch die sichtbaren Lichter, und die Wärmewirkung ist auch diesen ebenso wesentlich eigen wie dem Ultrarot und nicht etwa von ihnen abtrennbar[1]). Die Wärmewirkung ist allen

[1]) Es war lange die unrichtige Vorstellung verbreitet, als wäre auch spektral abgesondertes, z. B. rotes Licht dadurch wärmend, daß ihm besondere wärmende Bestandteile beigemischt sind, was aber nicht der in der Optik wohluntersuchten Wirklichkeit entspricht. Spektral zerlegtes Licht ist nicht mehr weiter in verschiedenartige Bestandteile zerlegbar. Irrig ist auch die ebenfalls verbreitet gewesene Meinung, daß rotem Licht mehr Wärmewirkung eigen sei, als violettem Licht (wonach man die Farben der beiden Spektralenden als „warme Farben" bez. „kalte Farben" bezeichnete). Die bei der oben beschriebenen Beobachtung im Spektrum (155) von Violett nach Rot hin steigende Wärmewirkung hat ihre Ursache nur darin, daß in der

diesen Strahlen eigen, weil sie Ätherwellen sind, die Energie haben (158). Wenn wir von „Wärmestrahlung" oder „strahlender Wärme" reden, so meinen wir demnach alle Ätherwellen verschiedener Länge, die von den warmen Körpern ausgesandt werden, sichtbare und unsichtbare. Da alle diese hier zu betrachtende Strahlung durch die Temperatur der aussendenden Körper bedingt ist, kann sie zu bester Unterscheidung von sonstiger Strahlung auch „Temperaturstrahlung" genannt werden (vgl. 174).

Abb. 72[1]) zeigt eine allgemeine Skale aller Ätherwellen, auf die wir noch öfter bei Behandlung der anderen Ätherwellen in Optik und Elektrizitätslehre zurückkommen werden; in dieser findet sich auch das Ultrarot (UR) eingetragen. Die angeschriebenen Längen der Wellen (λ) schreiten von links nach rechts fort. Man sieht rechts neben dem Ultraviolett (UV, vgl. O 98) das kurze sichtbare Spektrum von Violett bis Rot (schraffiert) und rechts angrenzend das Ultrarot, das dann in die noch viel längeren „elektrischen Wellen" übergeht. Das, wie man sieht, außerordentlich umfangreiche „Spektrum" aller Ätherwellen ist in dieser Darstellung in Stücke abgeteilt, deren Wellenlängen je um das 10-fache sich unterscheiden; ein solches Stück kann eine „Großoktave" genannt werden in Analogie zur gewöhnlichen Oktave der Akustik, welche durch Schallwellenlängen im Verhältnis 1:2 begrenzt ist (A 50). Man bemerkt, daß die Farben des Lichtes nach ihren Wellenlängen so voneinander sich unterscheiden, wie die Tonhöhen des Schalles; während aber das Gehör über viele (gewöhnliche) Oktaven sich erstreckt, kann das Auge nur eine einzige Oktave sehen, nämlich die Wellen von etwa 0·0004 mm bis 0·0008 mm (0·4 μ bis 0·8 μ) Länge.

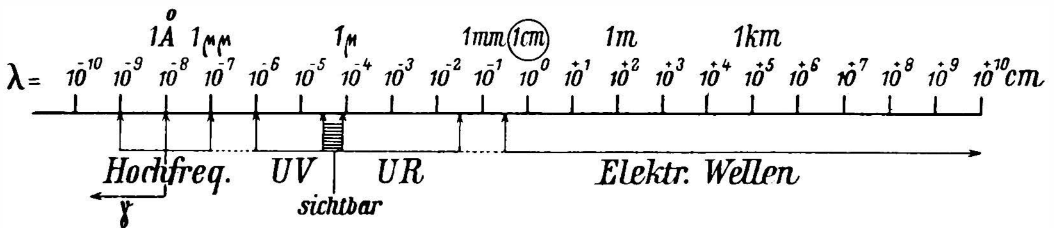


Abb. 72. Ätherwellenskale nach Großoktaven.

157. Durchlässigkeiten und Absorptionen für Ultrarot. — So wie für jede sichtbare Wellenlänge, so tritt auch beim Ultrarot die besondere Frage nach der Durchlässigkeit oder Undurchlässigkeit (Absorption) gegebener Körper auf; sie kann immer nur durch besondere Versuche entschieden werden, da dafür die den Molekülen und Atomen der Körper eigentümlichen Eigenschwingungsdauern maßgebend sind, die eben mit Hilfe solcher Versuche erst erforschbar wurden (O 85 u. f.). Wir geraten hierbei — wie überhaupt bei Behandlung des Ultrarot — in die Optik, wo solche Fragen eingehend im Anschluß an die sichtbaren Wellenlängen behandelt werden. Hier ist das Ultrarot im Zusammenhang mit den Wärmevorgängen zu betrachten, und hierbei genügen einige besondere

Strahlung der Sonne und der künstlichen Lichtquellen Rot in viel größerer Intensität vertreten ist als Violett (s. 172).

[1]) Entworfen von C. Ramsauer.

Angaben über das Verhalten der Körper. Die Prüfung erfolgt leicht mittels eines dunklen heißen Körpers als Strahlungsquelle und der Thermosäule als Nachweismittel, indem man den zu prüfenden Körper zwischen beide bringt. Dabei wird freilich das ganze, breite Wellengebiet des Ultrarot zusammen genommen. Wünscht man eingehende Angaben für besondere Wellenlängen, so muß spektrale oder sonstige Zerlegung benutzt werden; es sind in dieser Weise ultrarote Absorptionsspektren auch mit feiner Spektrallinienzerlegung untersucht worden.

Es finden sich nur wenige Stoffe, die für Ultrarot gut durchlässig sind. Bemerkenswert ist vor allem, daß Glas nur beschränkt durchlässig ist; es läßt nur das dem Rot nächstbenachbarte Ultrarot durch, bis etwa zur Wellenlänge 3000 $\mu\mu$ $= 3\ \mu$ (das sichtbare Rot endet bei 760 $\mu\mu$). Quarz ist nicht viel durchlässiger. Linsen und Prismen für längerwelliges Ultrarot müssen aus Flußspat ($CaFl_2$), Steinsalz (NaCl) oder noch besser Sylvin (KCl) bestehen, die der Reihe nach bis zu den Wellenlängen etwa 10, 15, 20 μ durchlässig sind.

Trockene, reine Luft ist für alles Ultrarot gut durchlässig; dagegen absorbiert Wasserdampf ziemlich stark das langwellige Ultrarot; auch von Kohlensäure sind spektrale Absorptionsbanden eingehend bekannt.

Flüssiges Wasser ist wenig durchlässig, weniger als Glas; es absorbiert schon von der Wellenlänge 1·4 μ an stark. Eine nahe konzentrierte Lösung von Jod in Schwefelkohlenstoff hat die bemerkenswerte Eigenschaft, für Ultrarot von 1·4 μ an gut durchlässig zu sein, während sie sichtbares Licht absorbiert und dementsprechend dunkel aussieht. Diese Lösung ist demnach ein Gegenstück zum Wasser; Absorption und Durchlässigkeit sind bei ihnen vertauscht.

158. Die Energie des absorbierten Ultrarot erscheint als Wärme. — Entsprechend dem Energiegesetz erscheint an Stelle absorbierter Strahlung jedesmal Energie in anderer Form, der Menge nach aber gleich der verschwundenen Energie der Strahlung. Zu allermeist ist es Wärme, die im absorbierenden Körper erscheint. Andere Möglichkeiten, die mehr bei den kurzen Wellen des sichtbaren Lichtes hervortreten als beim Ultrarot, behandeln wir in der Optik (O 92).

Die Wärmewirkung absorbierten sichtbaren und ultraroten Lichtes ist alltäglich; die Sonnenstrahlung wärmt; im Brennpunkt einer die Strahlung konzentrierenden Linse kann Papier entzündet werden. Diese Wirkung ist aber ganz an die Absorption gebunden. Körper, die nicht absorbieren, werden auch nicht warm; die Energie bleibt dann als Strahlungsenergie erhalten. Dies ist der Fall, wenn die Strahlung unabsorbiert durch den Körper geht, aber auch wenn sie vom Körper reflektiert wird. Am meisten erwärmt werden stark absorbierende Körper, die auch nicht reflektieren. Beim sichtbaren Licht erkennt man solche Körper als „schwarz", weil sie kein sie treffendes Licht ins Auge bringen, weder in der Draufsicht noch in der Durchsicht. Eine berußte Fläche ist für sichtbares Licht, aber auch für Ultrarot sehr nahe vollkommen schwarz; sie bringt alle auffallende Strahlung zur Absorption. Sehr rauhe Metallflächen reflektieren auch wenig (s. O 33) und sind daher, weil sie auch nichts durchlassen, ziemlich schwarz (oder „grau"), wie z. B. feinstes Metallpulver.

Schwarze Körper werden also durch Strahlung am besten erwärmt. Schwarzes Papier kommt im Linsenbrennpunkt sehr leicht zur Entzündung, weißes nicht.

Dunkle Kleidung nützt im Winter bestens die kärgliche Sonnenstrahlung aus; helle Kleidung schützt vor zu starker Wirkung der Sommersonne.

159. Meßmittel für Ultrarot. — Alle Nachweis- und Meßmittel für Ultrarot müssen dieses absorbieren, um die Energie als Wärme anzeigen zu können; sie müssen also vollkommen schwarz sein. Berußung erfüllt diese Bedingung in einfachster Weise, ebenso ein Überzug mit Platinmohr (elektrolytisch fein zerteilt abgeschiedenem Platin). Thermometer mit blankem Quecksilbergefäß sind nicht tauglich; sie müssen berußt werden, ebenso die empfindlichen Flächen der Thermosäulen, Bolometer und anderen Strahlungsmeßgeräte (s. E 169, 226).

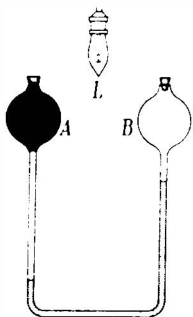


Abb. 73. Strahlungs-Differential-Thermometer.

Solche vollkommen absorbierenden Meßmittel gestatten auch einwandfreie Vergleichung des Energieinhalts, d. i. der „Intensität" oder „Stärke" von Strahlung aller Wellenlängen, sichtbar wie unsichtbar, während das Auge außerstande ist, nicht nur, Ultrarot zu beurteilen, sondern sogar auch die Intensitäten sichtbarer Lichter verschiedener Farben gesichert zu vergleichen (O 93).

Ein Beispiel für die Wirkung der Berußung gibt das Differential-Thermometer (Abb. 73), ein Doppel-Luftthermometer, mit einer berußten Glaskugel A und einer blanken B. Beide Kugeln enthalten nach Verschließung mit den Stöpseln Luft von gleichem Atmosphärendruck, so daß der sie verbindende Flüssigkeitsfaden beiderseits gleich hoch steht. Dies bleibt auch dauernd so, wenn die Temperatur der Umgebung beliebig sich ändert und Wärmeübertragung nur durch Strömung oder Leitung auf die beiden Kugeln wirkt. Ist aber Strahlung vorhanden, z. B. von der Lichtquelle L her, so wird die berußte Kugel A wärmer als die blanke, und der Flüssigkeitsfaden zeigt somit das Vorhandensein von Strahlung im umgebenden Raume an, wie es die Abbildung darstellt.

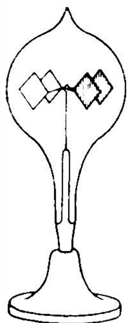


Abb. 74. Radiometer.

Auch das Radiometer ist hier zu erwähnen. Abb. 74 zeigt es in Gestalt der „Lichtmühle". Vier Flügel aus blankem Metall, jedoch einseitig berußt, ruhen drehbar auf einer Nadelspitze. Trifft Strahlung auf, so werden die berußten Seiten der Flügel erwärmt, und die Erwärmung macht sie zurückweichen, so daß dauernde Drehung in dem so bestimmten Sinne um die Nadel als Achse erfolgt. Das Zurückweichen ist verursacht durch die Stöße zwischen den Molekülen der Flügeloberfläche und den Gasmolekülen. Letztere gehen wärmer, d. i. mit größeren Geschwindigkeiten, von der erwärmten Oberfläche weg als sie hingekommen waren, und die Gegenkraft zur Kraft der Beschleunigung der Gasmoleküle treibt die Flügeloberfläche zurück. Die Wirkung tritt nur ein, wenn das Gas so verdünnt ist, daß die freien Weglängen (90) der von den Flügeln abgehenden Gasmoleküle etwa bis zu den Gefäßwänden reichen; andernfalls kehren diese Moleküle zu den Flügeln zurück ohne vorher wieder genügend verlangsamt zu sein. Ganz ohne Gas bleibt die Drehung ebenso aus wie in Luft von gewöhnlichem Druck[1]). Will man diese „Radiometerwirkung" zu Meßzwecken benutzen, so hängt man eine geschwärzte Platte exzentrisch an einem Torsionsfaden auf und beobachtet mit Spiegelablesung den bei der Bestrahlung sich einstellenden Drehungswinkel.

160. Vorgänge bei der Wärmeübertragung durch Strahlung. — Die elektromagnetischen Wellen, als welche alle Wärmestrahlung, sichtbare und unsichtbare, erkannt ist (156), werden von Körpern aller Temperaturen über

---

[1]) Der vom Vorhandensein eines Gases unabhängige Strahlungsdruck ist zu gering um leicht merklich zu werden (E 433).

dem absoluten Nullpunkt ausgesandt (154). Es ist daher sicher, daß die Wellen durch die Wärmebewegung der Moleküle und Atome der Körper erzeugt werden; *die Energie der Wellen ist dabei der Energie des Wärmeinhaltes der Körper entnommen.*

In der Tat verliert jeder ausstrahlende Körper Wärme. Heiße Körper, sich selbst überlassen, kühlen schnell ab und zwar auch dann, wenn Wärmeverluste durch Leitung und Strömung ausgeschlossen sind, wie man am Glühfaden jeder Glühlampe sieht, der nach Abschaltung der Zufuhr von Elektrischer Energie sofort erkaltet. Alle Energie, die der Glühfaden bei angeschaltetem elektrischem Strom dauernd zugeführt erhält, gibt er in Gestalt der sichtbaren und ultraroten Wellenstrahlung ebenso dauernd wieder ab; sie erscheint als Wärme dort, wo die Strahlung auftrifft und absorbiert wird (158). Hüllt man die angeschaltete Glühlampe in schwarzes Tuch ein, das alle Strahlung absorbiert und die infolgedessen in ihm sich sammelnde Wärme als schlechter Leiter zusammenhält, so gerät das Tuch bald in Brand.

Zusammenfassend ist zu sagen: Die Wärmeübertragung durch Strahlung erfolgt stets durch Wirkung eines ausstrahlenden Körpers auf einen absorbierenden Körper. Zwischen den beiden Körpern ist die Wärme *überhaupt nicht als Wärme* vorhanden, sondern als Energie der elektromagnetischen Wellen. Diese Energie ist aus der Wärme des strahlenden Körpers genommen, und sie erscheint wieder als Wärme im absorbierenden Körper.

b) Umfassende Wichtigkeit der Strahlung.

161. *Strahlung ein Haupt-Wärmeübertragungsmittel in der Natur.* — Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen der Wärmestrahlung ist Lichtgeschwindigkeit (E 430); in keiner anderen Weise, als nur durch Strahlung, kann Wärme mit so großer Geschwindigkeit übertragen werden; außerdem wirkt allein nur diese Übertragung auch durch die weiten, von Materie freien Himmelsräume. In dieser Weise können die großen, heißen Himmelskörper, die Sonnen, ihren als Wärme vorhandenen reichen Energieinhalt dauernd in die Ferne senden, wo Planeten den Teil davon auffangen können, der dem Querschnitt entspricht, welchen sie der Strahlung entgegensetzen.

So wird auch die Erdoberfläche von der Sonne aus dauernd warm gehalten. *Die Temperatur der Erdoberfläche* ist ganz durch die Sonnenstrahlung bestimmt; sie stellt sich im Mittel übers Jahr auf diejenige Höhe ein, bei welcher die Ausstrahlung von der Erdoberfläche in den Himmelsraum gleich ist der Einstrahlung von der Sonne her. Wir belegen dies später quantitativ (186); wir sahen aber auch schon, daß vom Erdinneren her nur mehr verschwindend wenig Wärme zur Oberfläche kommt (146).

Die Schwankungen der Sonneneinstrahlung innerhalb des Jahres, entsprechend Sommer und Winter, Tag und Nacht, klarem und bewölktem Himmel, machen sich dementsprechend auch an der Temperatur der Erdoberfläche in der bekannten Weise bemerklich. Daß dabei die höchste Sommertemperatur, auch die höchste Tagestemperatur, etwas verspätet nach dem höchsten Sonnenstand eintritt, dies ist durch die Mitwirkung der tieferen Erdschichten bedingt. Es nimmt zwar die Einstrahlung sogleich nach dem höchsten Sonnenstande ab; aber die Wärmeverluste ins Erdinnere nehmen auch ab und zwar noch stärker als die Ein-

strahlung, weil das Innere zur Zeit des höchsten Sonnenstandes schon beträchtlich vorgewärmt ist. Daher die Zunahme der Oberflächentemperatur auch noch eine Weile nach dem höchsten Sonnenstand[1]).

Entsprechend wirken auch Schwankungen der Ausstrahlung auf die Oberflächentemperatur der Erde; klare Nächte werden kalt, weil keine Wolken die Ausstrahlung auffangen und für die Erde zurückhalten.

Die Temperaturverteilung nach den Breitengraden versteht sich daraus, daß immer nur eine senkrecht die Strahlung auffangende Fläche maßgebend ist für die Einstrahlung, während für die Ausstrahlung die ganze, beliebig schiefe Erdfläche wirkt.

162. Temperaturverteilung in der Erdatmosphäre. — Die wärmende Wirkung der zur Erde kommenden Sonnenstrahlung tritt in klarer Luft nur in geringem Maße unmittelbar in dieser auf, weil sie nur wenig absorbiert (157); fehlt Bewölkung, so erscheint fast alle eingestrahlte Wärme am Erdboden, der absorbiert, und im Wasser der Meere (27, 54). Die Luft wird erst vom Erdboden aus erwärmt.

Die Erdatmosphäre ist in steter Bewegung (41). Steigt die erwärmte Luft auf, so kann sie das nicht, ohne dabei abzukühlen; denn sie gelangt an Orte niedrigeren Druckes (M 363) und dehnt sich daher, und dabei muß sie kalt werden entsprechend der Arbeitsleistung ihrer Dehnung. Herabsinkende Luft wird dagegen stets warm, weil an ihr die Arbeit der Zusammendrückung geleistet wird (61, 71). Keine warme Luft kann hinauf ohne kalt zu werden, und keine kalte kann herunter ohne warm zu werden. Daher nimmt die Temperatur mit zunehmender Höhe über dem Erdboden stets ab[2]). Je nach der geographischen Breite wird in bestimmter Höhe eine Jahresmitteltemperatur von 0°C erreicht: die Schneegrenze der Gebirge, die selber wegen ihrer Zerklüftung mehr Ausstrahlungs- als Einstrahlungsfläche bieten und daher nicht viel wärmer sind als die Luft der betreffenden Höhe.

163. Auch in kleinen, irdischen Räumen, bei der Zimmerheizung im Winter, ist Wärmeübertragung durch Strahlung wesentlich. Öfen und Heizkörper aller Arten wärmen die Zimmerluft nicht nur mittels Strömung (41), sondern sie strahlen auch, und offenes Kaminfeuer wirkt sogar fast nur durch Strahlung. Strahlungsheizung wärmt die Gegenstände im Zimmer, vor allem auch den Fußboden, und von diesen aus wird erst die Luft warm, ähnlich wie in der freien Atmosphäre (162). Strömungsverbreitung durchwärmt dagegen vor allem die Luft, besonders oben, läßt aber Gegenstände und Fußboden kalt; diese müssen erst von der Luft erwärmt werden.

164. Strahlung als allgemeines und mächtigstes Energieübertragungsmittel in der Natur. — Nicht nur Erwärmung spenden die Sonnen (161), sondern ihre Strahlung liefert auch Energien in anderer Form in größtem Maßstabe. Denn nicht nur Wärme kann bei der Absorption der Strahlung zum Vorschein kommen, sondern — wie in der Optik auseinandergesetzt wird (O 92) — auch chemische Energie, und außerdem kann die Wärme auch in andere Energieformen verwandelt werden. Letzteres geschieht besonders

---

[1]) Es kommen hier dieselben Betrachtungen zur Geltung, welche wir bei Untersuchung der Wärmeleitung ins Erdinnere anstellten (s. Anhang W I, 4a).

[2]) Die zugehörige Rechnung ist im Anhang W II, 4 zu finden.

beim Aufsteigen des Wasserdampfes mit der erwärmten Luft in der Atmosphäre; das oben in der Kälte verflüssigte Wasser steht dann in Wolken und Regen, zuletzt in Bächen und Flüssen als gehobenes Wasser mit seiner potentiellen Energie zur Verfügung und kann Mühlen und Turbinen treiben.

So zeigt sich, daß nahezu alle Energien, die wir auf Erden wirken sehen — auch die Energien der Lebewesen, der Dampfmaschinen und anderen Wärmemotoren (O 95, W 133, 246 u.f.), die Energien der Turbinen und Windmotoren (M 377, W 43), samt den von all diesen Vorrichtungen weiter gelieferten elektrischen Energien —, in Gestalt der Strahlung von der Sonne gekommen sind und immer noch weiter kommen.

Anderen Ursprungs sind nur die Energien der Vulkane und Erdbeben, der Ebbe und Flut und die Energien von Atomumwandlungen. Diese entstammen der Erdwärme, der potentiellen und der kinetischen Energie der Erdmassen, den Energien des Atominneren.

165. Solarkonstante. — Die Sonnenstrahlung, welche alle diese Energieleistungen und die Warmhaltung der Erdoberfläche bewirkt, kann in einfacher Weise gemessen werden, indem man den Sonnenstrahlen eine geschwärzte Fläche senkrecht darbietet und deren Erwärmung kalorimetrisch mißt. Abb. 75 zeigt eine dazu dienliche Vorrichtung — Pyrheliometer genannt — in einfachster Ausführung. Die berußte, schwarze Fläche f f ist Deckel einer ganz mit Wasser gefüllten zylindrischen Büchse b b, in welcher das Gefäß des nach unten gekehrten Thermometers t sich befindet. Die Büchse wirkt als Wasserkalorimeter (49); die nötige Mischung des Wassers wird durch Drehen der Büchse samt Thermometer am Knopfe k bewirkt. Man läßt die Sonnenstrahlung eine gemessene Zeit lang senkrecht die Rußfläche treffen, beobachtet den Anstieg des Thermometers, blendet dann ab und beobachtet eine weitere gemessene Zeit lang den Abstieg des Thermometers, um die in Rechnung zu ziehenden Wärmeverluste, die auch während der Einstrahlung stattfinden, zu erfahren. Die so gemessenen Kalorien werden dann proportional auf 1 m² auffangende Fläche und 1 sek Einstrahlungszeit umgerechnet, welche Angabe „Solarkonstante" genannt wird.

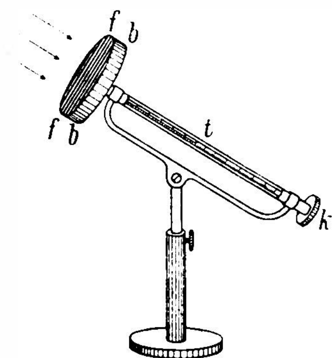


Abb. 75. Pyrheliometer.

Man hat auch sehr verfeinerte Pyrheliometer eingeführt; die Schwierigkeit einwandfreier Messung der wahren, ganzen Einstrahlung der Sonne liegt aber in den Störungen durch die Atmosphäre, die infolge von Trübung stets einen Teil der Einstrahlung absorbiert oder zerstreut. Messungen auf hohen Bergen lassen genügende Schlüsse auf die ganze, unverminderte Einstrahlung zu. Feinste Messungen sind zur Auffindung etwaiger zeitlicher Änderungen der Strahlung der Sonne erforderlich. Zu wichtigen Schlüssen allgemeiner Art (185—187) genügen schon folgende Angaben in runden Zahlen für die Solarkonstante:

Die Sonne liefert zur Erde

$$0{\cdot}4 \frac{\text{Kal}}{\text{m}^2\text{sek}} = 170 \frac{\text{mkgr}}{\text{m}^2\text{sek}} = 2{\cdot}2 \frac{\text{PS}}{\text{m}^2} .$$

Wären danach 0·4 l Wasser auf 1 m² ausgebreitet, was eine 0·4 mm dicke

Schicht bedeutet, so kann senkrechte Sonnenbestrahlung diese Schicht in jeder Sekunde um 1° erwärmen. Oder in Arbeitsmaß: Die Sonne bearbeitet jedes m^2 des Querschnittes der Erdkugel ständig mit 2·2 Pferdekräften. Die von der Erde im ganzen fortlaufend aufgefangene Sonnenenergie beträgt, nach dem Erdquerschnitt ($120 \cdot 10^{12} m^2$), $4{\cdot}8 \cdot 10^{13}$ Kal/sek $= 2{\cdot}1 \cdot 10^{16}$ mkgr/sek $= 270 \cdot 10^{12}$ PS.

Dies ist das Ausmaß der Leistung, welche die Sonne in der vorbetrachteten großen Mannigfaltigkeit auf Erden ständig vollbringt, übermittelt durch Strahlung.

c) Abhängigkeit der Aussendung (Emission) der Strahlung von der Beschaffenheit des Körpers.

Wir fanden, daß die Körper um so mehr Strahlung aussenden, je höher ihre Temperatur ist (154). Außerdem hängt aber die Aussendung auch von der Beschaffenheit der Körper ab. Wir untersuchen hier zunächst diese letztere Abhängigkeit durch Vergleichung verschiedener Körper bei gleicher Temperatur.

166. Aussendung und Absorption hängen zusammen. — Die Vergleichung der Aussendung verschiedener Körper von gleichen Temperaturen war nicht einfach durchführbar; denn der Hauptteil der ausgesandten Strahlung ist unsichtbar, und der sichtbare Teil, der überhaupt nur bei hohen Temperaturen erscheint, bot keinen deutlichen Anhalt; gleich heiße Körper schienen nicht deutlich verschieden zu glühen. Da aber die Aussendung ein Wellenerzeugungsvorgang ist und die Absorption als Resonanzerscheinung zutreffend aufgefaßt werden kann (O, 79, 88), wobei Gleichheit der Schwingungsdauern im absorbierenden Körper und im Wellenzug wesentlich ist (A 82, 83), war zu denken, daß ein absorbierender Körper auch zur Aussendung der Wellen, welche er absorbiert, vorzugsweise geeignet sein dürfte, daß somit Aussendung und Absorption in einfacher Weise zusammenhängen könnten.

Dieser Gedanke war wegen der Unbekanntschaft mit den Einzelheiten der Aussendung und der Absorption von Ätherwellen durch die Atome nicht unmittelbar weiter verfolgbar. Auch war eine Prüfung durch Versuche nicht einfach, weil Aussendung am besten bei hohen Temperaturen, Absorption aber am besten bei Zimmertemperatur beobachtbar ist und Vergleiche bei ungleichen Temperaturen wertlos sind.

167. Gedankenversuch über Aussendung und Absorption. — Es war aber ein anderer Weg gangbar, der Emission und Absorption mittels eines Gedankenversuchs in Zusammenhang brachte mit allgemeinster Erfahrung (111, 112) unter vollständiger Umgehung von Einzelheiten, die noch lange unbekannt bleiben mußten. Damit war sogleich große Sicherheit erreicht (Kirchhoff 1859). Das Ergebnis — eine genaue Formulierung des vermuteten Zusammenhangs — bewährte sich auch in aller Folge, und viele weitere Einsicht folgte noch daraus. Die Auffassung der Absorption als einer Resonanzerscheinung (166) zeigte sich hiermit auch hier wieder gültig.

Der benutzte Gedankenversuch ist erlaubt, weil in ihm nichts vorkommt, was der Wirklichkeit widerspräche und was nicht in Annäherung durchführbar wäre (vgl. M 86).

Das Wesentliche des Gedankenversuchs ist folgendes:

Es befinden sich in den Brennpunkten eines innen vollkommen spiegelnden Ellipsoides (Abb. 76) zwei verschiedene, gleichgroße, kleine Körper I und II von

gleicher Temperatur, die einander Strahlung zusenden, ganz wie die beiden Körper A und B im Hohlspiegelversuch der Abb. 71. Das Ellipsoid ist hier gewählt, um sämtliche Strahlung von I nach II und von II nach I gelangen zu lassen, wie es die Abbildung 76 andeutet. Es habe I das Emissionsvermögen e_1 und das Absorptionsvermögen a_1, d. h. es emittiere I die Energie e_1 in der Sekunde und absorbiere den Bruchteil a_1 von auffallender Strahlung. II habe das Emissionsvermögen e_2 und das Absorptionsvermögen a_2.

Es werde nun angenommen, daß $e_2 = ne_1$ sei, aber $a_2 = a_1$, d. h. es emittiere II n-mal besser als I, absorbiere aber nur gleich gut. Die Folge ist, daß II den n-fachen Wärmeverlust von I haben wird, der ihm mangels entsprechender n-facher Absorption nicht ersetzt wird; II muß also kälter werden, I aber wegen wenig Ausstrahlung bei guter Absorption heißer. Die ursprünglich gleichen Temperaturen der beiden Körper werden also ungleich unter Übergang von Wärme vom schon kälteren Körper auf den heißeren, und dieser Übergang könnte auch dauernd unterhalten werden, wenn dem Körper II dauernd Wärme zur Verfügung steht. Ein solches Ergebnis widerspräche vorhandener, vielseitig gesicherter Erfahrung, nämlich dem Satz, daß Wärme nicht dauernd von selber von einem kälteren Körper auf einen heißeren übergeht, welcher Satz auch mit viel anderer, allgemeiner Erfahrung — auch mit der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile — in fester Verbindung steht (111, 112).

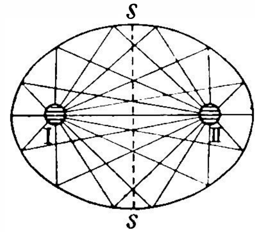


Abb. 76. Gedankenversuch zu Kirchhoff's Gesetz.

Danach kann die gemachte Annahme über Emission und Absorption von I und II nicht zutreffen; es müssen vielmehr die beiden Körper I und II so strahlen und so absorbieren, daß sie eine ursprünglich gleiche Temperatur dauernd beibehalten. Dies trifft aber nur dann zu, wenn der Körper großen Emissionsvermögens auch ein entsprechend großes Absorptionsvermögen hat, so daß er seinen Verlust ersetzen kann und nicht erkaltet, und wenn kleines Emissionsvermögen auch mit entsprechend kleinem Absorptionsvermögen verbunden ist, so daß nicht Wärme gesammelt wird. Es müssen also Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen bei den verschiedenen Körpern einander proportional sein.

Bei dieser überschlägigen Überlegung sind die von I und II nicht absorbierten Anteile der empfangenen Strahlung noch nicht berücksichtigt; dieselben werden reflektiert oder durchgelassen und gehen daher wiederholt zwischen I und II hin und her, bei jedem neuen Auftreffen neuer Absorption unterliegend, was sie schließlich ganz aufbraucht. Dies ist durch Rechnung leicht zu verfolgen. Man findet, daß I von der verausgabten Energiemenge e_1 wieder zurückerhält $e_1a_1(1—a_2)S$ und dazu von II e_2a_1S, wobei $S = 1/(a_1 + a_2—a_1a_2)$ die Summe einer geometrischen Reihe ist, die wegen des oftmaligen Hin- und Herganges der Strahlung sich ergibt. Da die Temperatur von I ungeändert bleiben soll, muß $e_1 = e_1a_1(1—a_2)S + e_2a_1S$ sein, was sich zu $e_1a_2 = e_2a_1$ vereinfacht und also wieder, wie die überschlägige Überlegung, die Bedingung der Proportionalität

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} \qquad 167)$$

gibt, bei der zugleich auch die Temperatur von II unverändert bleibt.

Dieses Ergebnis muß aber nicht nur für die Gesamtstrahlung der beiden Körper gelten, sondern sogar für jede Wellenlänge der Strahlung einzeln. Denn es könnten zwischen den beiden Körpern beliebige, für bestimmte Wellenlängen vorzugsweise durchlässige Schirme angebracht werden (s s, Abb. 76), wobei doch die Temperatur von I und II ungeändert bleiben und der vorherige Schluß also gelten müßte. Es gibt derlei auswählend absorbierende Schirme in so großer Mannigfaltigkeit, daß jede beliebige Wellenlänge im Verhältnis zu jeder anderen geschwächt werden kann, was die Sicherheit gibt, daß jene Proportionalität nicht auf einem Zusammenwirken verschiedener Wellenlängen beruht.

168. Kirchhoffs Gesetz. — Es gilt somit, da I und II vollkommen beliebige Körper von beliebiger Temperatur sind, das allgemeine Gesetz: Das Verhältnis des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen ist für alle Körper bei derselben Temperatur für dieselbe Wellenlänge dasselbe.

Das Emissionsvermögen kann dabei, nach dem Vorkommen in Gl. 167 in beliebiger, doch für alle Körper gleicher Einheit gemessen sein, und dasselbe gilt auch für das Absorptionsvermögen. Das einfachste Maß für das Emissionsvermögen e eines gegebenen Körpers ist die von 1 cm² seiner Oberfläche in 1 sek ausgestrahlte Energie (erg/cm²sek oder Kal/cm²sek). Das einfachste Maß für das Absorptionsvermögen a ist der absorbierte Bruchteil von auffallender Strahlung, wonach das Absorptionsvermögen eine bloße Zahl ist, die stets zwischen 0 und 1 sein muß. Ein vollkommen durchlässiger oder vollkommen spiegelnder Körper hat das Absorptionsvermögen 0; ein vollkommen schwarzer Körper hat das Absorptionsvermögen 1.

Vergleicht man einen beliebigen Körper I mit einem vollkommen schwarzen Körper II ($a_2 = 1$), so sagt Kirchhoffs Gesetz (Gl. 167) $e_1/a_1 = e_2$ oder $e_1 = e_2 \cdot a_1$. Dies bedeutet: Das Emissionsvermögen e_1 eines beliebigen, nicht schwarzen Körpers ist kleiner als das des schwarzen Körpers, e_2, bei gleicher Temperatur für die gleiche Wellenlänge, weil sein Absorptionsvermögen kleiner ist ($a_1 < 1$).

Ist der Körper I aber schwarz, wie II ($a_1 = a_2 = 1$), so ist auch sein Emissionsvermögen gleich dem des schwarzen Körpers ($e_1 = e_2$); alle schwarzen Körper haben also bei gleicher Temperatur für dieselbe Wellenlänge dasselbe Emissionsvermögen. Alle vollkommen spiegelnden und vollkommen durchlässigen Körper können dagegen nichts aussenden ($e_1 = 0$, weil $a_1 = 0$).

Es ist sehr bemerkenswert, daß danach für die Aussendung bei gegebener Temperatur nichts von der stofflichen Beschaffenheit des Körpers maßgebend ist als nur sein Absorptionsvermögen[1]).

169. Anwendungsfälle und Bewährungen. — Hat man einen Hohlwürfel aus Metallblech, dessen vier Seitenflächen außen von verschiedener Beschaffenheit sind, und füllt man ihn mit Wasser etwa von 100°, so kann man die Ausstrahlung der vier Flächen gleicher Temperatur vergleichen, indem man sie der Reihe nach einer Thermosäule gegenüber stellt; der Abstand von der Säule

[1]) Daß dieses — und damit auch das Emissionsvermögen — bei Gasen in einfacher Weise durch die stoffliche Beschaffenheit bedingt ist, zeigen wir in der Optik (O 75 u. f.).

kann leicht so groß genommen werden, daß Wärmeübertragung durch Leitung und Strömung der Luft ausgeschlossen ist. Es kann die eine Seitenfläche des Würfels spiegelnd poliert, die andere matt gerauht, die dritte etwa mit Glas überzogen und die vierte berußt sein. Man findet, daß die polierte Fläche sehr wenig strahlt, entsprechend ihrer fast vollkommenen Reflexion, die matte aber viel mehr und ebenso auch die glasbedeckte, letztere entsprechend der guten Absorption von Glas für das hier in Betracht kommende, bei 100° ausgestrahlte langwellige Ultrarot (157); weitaus am meisten strahlt aber die berußte Fläche mit dem größten Absorptionsvermögen.

Man macht daher Heizkörper, die möglichst gut strahlen sollen, am besten mattschwarz; Teekessel, die nicht abkühlen sollen, aber spiegelnd blank. Will man möglichst alle Wärmeverluste eines heißen Körpers verhindern, so umgibt man ihn mit einem Vakuum-Mantel, was Leitung und Strömung von Luft ausschließt, und versieht ihn außerdem mit einem spiegelnden Metallüberzug, um auch Strahlung zu verhindern.

Eine höchst wichtige Anwendung hat Kirchhoffs Gesetz für sichtbare Wellenlängen in der chemischen Analyse der Sonne und der fernen Gestirne gefunden, was wir in der Optik behandeln (O 89, 91).

Manchmal wird die Bedingung „bei derselben Temperatur" im Gesetz vergessen; dann entstehen Fragen wie die, warum ein roter Farbstoff, wie etwa Fuchsin, der grünes Licht stark absorbiert, nicht auch grünes Licht aussendet? Die Antwort ist, daß er das gewiß auch tut, aber nach dem Gesetz unmöglich stärker als ein vollkommen schwarzer Körper bei derselben Temperatur, der — wie etwa Ruß — bei Zimmertemperatur bekanntlich überhaupt nicht merklich leuchtet. Geht man aber zu hohen Temperaturen, wo merkliches Leuchten beginnt, so ist der Farbstoff zersetzt und seine Absorption und damit auch die Emission verändert.

Ausgiebige quantitative Proben hat Kirchhoffs Gesetz besonders in seiner Anwendung bei der Verwirklichung und eingehenden Untersuchung des vollkommen schwarzen Körpers bestanden (176).

170. Gültigkeitsgrenzen. — Es sind Vorgänge bekannt, die mit Kirchhoffs Gesetz nicht in Übereinstimmung sind. Phosphoreszierende und fluoreszierende Körper senden Licht aus, das sie nicht gleichzeitig auch absorbieren (O 104, 111, 112); erhitzter Natriumdampf scheint in gewissen Fällen[1]) das gelbe Licht nicht auszusenden, das er absorbiert. Man sieht aber aus der Herleitung des Gesetzes (167), daß seine Gültigkeit auch nur dort zu erwarten ist, wo absorbierte Wellenenergie als Wärme erscheint, nicht als Licht — wie bei Phosphoreszenz und Fluoreszenz — oder als chemische Energie (O 94 u. f.), außerdem überhaupt auch nur dort, wo der in der Fassung des Gesetzes vorkommende Temperaturbegriff anwendbar ist (129). Sind hiermit die Gültigkeitsgrenzen noch nicht entscheidend gegeben, so fordert dies noch besondere Untersuchung, worauf hier nicht einzugehen ist (vgl. 174).

d) Abhängigkeit der Aussendung von der Temperatur.

Die eingehende Untersuchung dieser Abhängigkeit hat sehr großen Umfang angenommen und hat entsprechend vielseitige Kenntnis geliefert.

171. Schon einfachste Beobachtungen zeigen, daß mit steigender Temperatur zweierlei Änderung der Aussendung erfolgt: Es steigt die ausgesandte Menge, es ändert sich aber auch die Beschaffenheit der Strahlung, sie wird allmählich immer kürzerwellig.

Die Änderung der Menge von tiefen Temperaturen an ist uns schon bei den Beobachtungen mit den Hohlspiegeln bemerklich geworden (154), und das

[1]) Bei Abwesenheit von Sauerstoff; der Fall ist noch nicht genügend geklärt.

weitere Steigen der Strahlung bei hohen und höchsten Temperaturen ist alltägliche Erfahrung an heißen Körpern.

Die Änderung der Beschaffenheit, d. i. der spektralen Zusammensetzung der Strahlung mit der Temperatur kann man leicht an einem elektrisch geheizten Draht im Dunkeln beobachten, wenn man den Heizstrom und damit die Temperatur des Drahtes allmählich steigert. Zuerst bleibt der Draht dunkel; man kann nur an der nahe gehaltenen Handfläche seine Strahlung merken, sie ist rein ultrarot. Von einer gewissen Temperatur an (etwa 600°C) wird der Draht sichtbar; er glüht rot, dann gelb, zuletzt weiß, wenn er nicht vorher geschmolzen ist. Der Übergang von der dunklen Glut zur ersten sichtbaren Rotglut ist für das Auge schwer verfolgbar; es scheint der Rotglut eine „Grauglut" vorauszugehen; aber dies ist nur Versagen der Farbenempfindung des Auges bei der anfänglich zu geringen Intensität des Rot. Beim Übergang von der Rotglut zur Gelbglut und Weißglut merkt man außer der Farbenänderung, d. i. der Änderung der spektralen Zusammensetzung des ausgesandten Lichtes, auch stark die Zunahme der Intensität.

172. Liniendarstellung. — Alle diese Änderungen der Aussendung mit der Temperatur kommen nach einwandfreien messenden Beobachtungen in den Linien (Kurven) der Abb. 77 (mit der beigeschriebenen Gleichung) zum Ausdruck. Der Weg bis zu so eingehender Kenntnis war nicht kurz, noch einfach; wir haben ihn und damit den Einzelinhalt der Abb. 77 noch weiter schrittweise zu verfolgen (173—179), stellen aber die gute Kenntnis im Großen hier gleich voran.

Auf der (punktierten) Grundlinie (Abszissenachse) der Abb. 77 sind die Wellenlängen λ (in mm) aufgetragen vom Ultraviolett durchs sichtbare Gebiet — Violett bis Rot — bis ins breite Ultrarot (vgl. Abb. 72). Die Höhen (Ordinaten) der einzelnen Linienpunkte geben jedesmal das Maß $\mathfrak{E}$ für die Energie, mit welcher die unten abzulesende Wellenlänge (und ihre Nachbarschaft[1])) ausgestrahlt wird und zwar bei der (absoluten) Temperatur T, welche der betreffenden Linie beigeschrieben ist.

Betrachten wir beispielsweise zuerst die zu T = 3000°abs. (Weißglut) gehörige Linie. Sie zeigt, daß bei dieser Temperatur das ganze sichtbare Spektrum ausgestrahlt wird, Violett aber am wenigsten, Rot am meisten; noch viel mehr wird aber Ultrarot ausgestrahlt, am meisten in der Gegend von $\lambda = 0{\cdot}001$ mm und dann abnehmend weiter noch ein großes Gebiet sehr viel längerer Wellen.

Bei T = 2000°abs. (Gelbglut) ist alle Strahlung sehr zurückgegangen, am meisten aber das Violett, was dem Auge als Gelblichkeit des Gesamtlichtes erscheint; die Hauptaussendung liegt jetzt bei $\lambda = 0{\cdot}0015$ mm; es ist alles nach den längeren Wellen hin verschoben.

Bei T = 1000°abs. = 727°C (Rotglut) ist die Strahlung verhältnismäßig so gering, daß sie im Maßstabe der Abbildung nur eben noch merklich auftragbar

[1]) Die Energie, welche einer einzelnen, scharf (ohne jeden Nachbarbereich) gegebenen Wellenlänge zukäme, ist Null. Die Ordinaten $\mathfrak{E}$ sind auf ein gewisses Einheitsbereich $\Delta\lambda$ von benachbarten Wellenlängen bezogen. Energien (je cm² strahlender Oberfläche und je sek) sind dementsprechend nicht die Ordinaten $\mathfrak{E}$ selber, sondern die senkrecht unter jeweils betrachteten Kurvenstücken liegenden Flächenstreifen $\mathfrak{E}\cdot\Delta\lambda$. Die ganze, unter einer Kurve liegende Fläche bis zur Abszissenachse gibt somit die gesamte bei der betreffenden Temperatur ausgestrahlte Energie (je cm² und sek).

ist; der sehr niedrig liegende Gipfel der Ausstrahlung ist jetzt bei $\lambda = 0{\cdot}003$ mm; kurzwellige Strahlung ist nur bis eben ins Rot hinein merklich, daher das Auge an Körpern dieser Temperatur nur düsteres Rot sehen kann[1]).

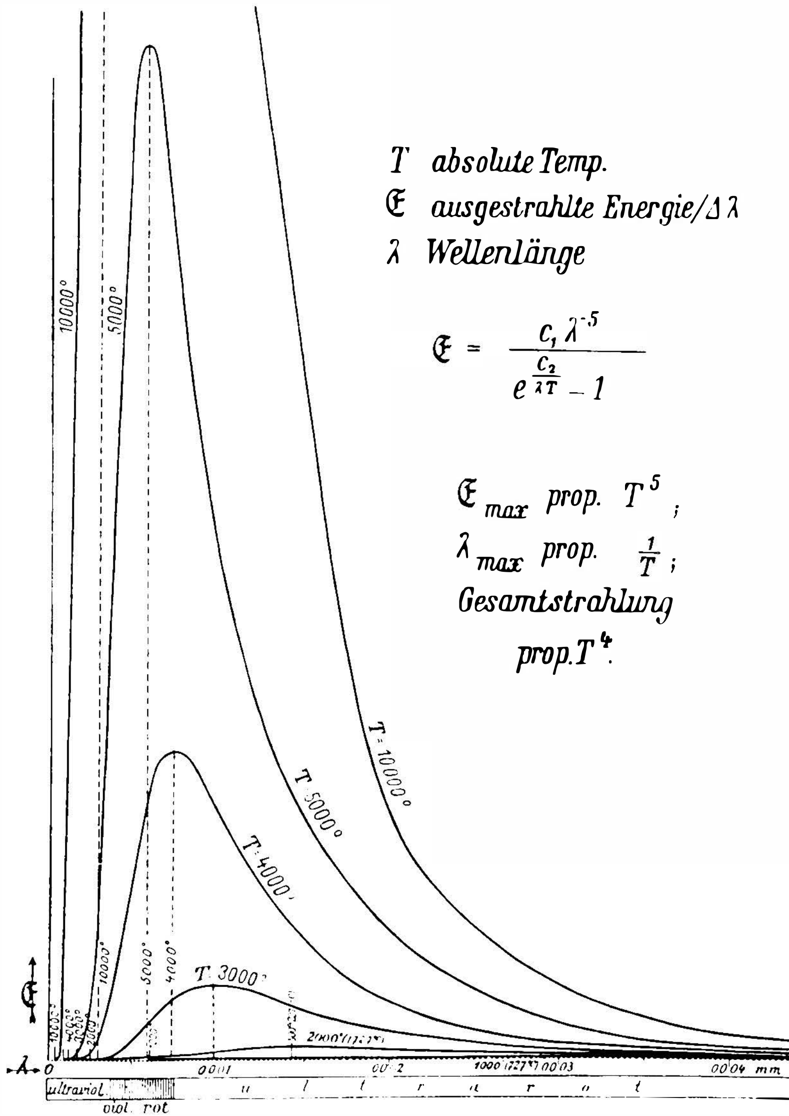


Abb. 77. Strahlung des schwarzen Körpers.

Die Linien der höheren Temperaturen, 4000°, 5000° und 10000° abs. zeigen

[1]) Sämtliche Kurven sind nach der kurzwelligen Seite hin nur bis zu Energien gezogen, die so gering sind, wie die des schon unmerklichen Gelb eines rotglühenden Körpers. Die Exponentialfunktion $e^{c_2/\lambda T}$ in der Gleichung für 𝔈 (Abb. 77) macht es, daß 𝔈 an diesen Stellen, nach kürzeren Wellen hin, äußerst klein wird. Die Stellen solchen Unmerklichwerdens sind in der Abbildung durch kurze Vertikalstriche mit beigeschriebenen Temperaturen gekennzeichnet.

ebenso abgestufte Eigentümlichkeiten: Je höher die Temperatur, desto mehr Strahlung aller Wellenlängen und desto mehr Vorrücken des Hauptanteils der Strahlung nach den kürzeren Wellen.

Man sieht hier maßmäßig dargestellt, was schon einfachster Beobachtung beim Übergang von der dunklen Rotglut zur hellen Weißglut merklich war (170).

173. Strahlung des schwarzen Körpers. — Die soeben betrachtete spektrale Verteilung der Strahlung kann nicht für alle Körper gelten; denn die Strahlung hängt nicht nur von der Temperatur ab, sondern nach Kirchhoffs Gesetz auch von dem Absorptionsvermögen des Körpers (168). Doch müssen nach diesem Gesetz alle schwarzen Körper in der Strahlung einander gleich sein, und daher hat die Temperaturabhängigkeit der Strahlung eines schwarzen Körpers eine allgemeine Bedeutung um so mehr, als sie auch für nichtschwarze Körper eine Richtschnur gibt. Die Strahlung nichtschwarzer Körper kann nämlich nach dem Gesetz immer nur geringer sein als die des schwarzen Körpers. Gelten also die betrachteten Linien mit der beigeschriebenen Gleichung (Abb. 77) für einen schwarzen Körper, was der Fall ist, so verlaufen die Linien für einen nichtschwarzen Körper ebenso, nur mit Einbuchtungen nach unten bei denjenigen Wellenlängen, die der Körper nicht vollkommen absorbiert.

Bemerkenswert ist es, daß fast alle Körper bei höheren Temperaturen stärker absorbierend werden als bei niedrigen Temperaturen (O 85); daher können besonders für hohe Temperaturen die Linien der Abb. 77 bei Überschlags-Überlegungen oder Rechnungen in guter Annäherung für fast alle Körper verwendet werden. Ein altes Beispiel hierfür ist der Erfahrungssatz: „Alle Körper beginnen bei gleicher Temperatur mit der Rotglut". Die zugrunde liegende Erfahrung wurde an einem Eisenrohr gewonnen, das, am einen Ende verschlossen, in einen Ofen gebracht war, so daß man vom außen befindlichen offenen Ende her das Innere des Rohres beobachten konnte. Waren verschiedene Körper in das Rohr gebracht, so sah man beim Anheizen doch alle gleichzeitig mit der Rotglut beginnen, einschließlich der Rohrwand selber, und das ganze Innere leuchtete so gleichmäßig, daß Einzelheiten kaum zu unterscheiden waren. Dies trifft allerdings nicht zu bei Körpern, die in der Hitze ganz durchsichtig bleiben, auch nicht für die Luft im Rohr. Solche Körper bleiben dunkel; sie senden nichts Sichtbares aus, weil sie nichts Sichtbares absorbieren. Die meisten Körper verhalten sich aber in der Hitze nahezu wie schwarz, entsprechend dem Beobachtungsergebnis.

174. Gültigkeitsbereich. — Es versteht sich, daß die so festgelegte Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur (Abb. 77) nur dort zutreffen kann, wo Temperatur maßgebend ist, nicht also wo der Temperaturbegriff gar nicht anwendbar ist (129), demnach nicht bei Fluoreszenz- oder Phosphoreszenzleuchten, auch nicht beim Leuchten chemischer Umsetzungen mit nur „molekular-lokal" hohen Temperaturen (128, O 119).

Man nennt die von uns hier behandelte Strahlung, welche Folge der wohldefinierten, mit den Thermometern meßbaren Temperatur der Körper ist, auch „Temperaturstrahlung", zum Unterschied von anders bedingten Wellenstrahlungen der eben genannten Arten.

Es haben somit alle hier behandelten Strahlungsgesetze, auch Kirchhoffs Gesetz, gesicherte Gültigkeit nur für Temperaturstrahlung (vgl. 170).

175. Gesamtstrahlung. — Die Abhängigkeit der Gesamtstrahlung von der Temperatur, d. i. der Ausstrahlung aller Wellenlängen zusammengenommen, war am frühesten durch Messungen feststellbar. Diese Gesamtstrahlung erscheint in der Abb. 77 als die ganze, unter der Linie der betreffenden Temperatur bis

zur Grundlinie befindliche Fläche (vgl. 1. Note zu 172). Die Messungen waren mit Körpern verschiedener Art ausgeführt, indem man ihre Strahlung bei verschiedenen Temperaturen messend verglich; sie zeigten, daß die Gesamtstrahlung proportional der 4. Potenz der absoluten Temperatur ansteigt (Stefan 1879).

Dies ist also der quantitative Ausdruck für das schon bei einfachsten Beobachtungen (151—154, 171) aufgefallene, sehr starke Ansteigen der Strahlung mit steigender Temperatur. Tab. 27 gibt einige Zahlen dafür; man sieht z. B., daß bei 3000°abs. (2727°C) 10000-mal so viel ausgestrahlt wird als bei 300°abs. (27°C), entsprechend der 4. Temperaturpotenz.

Tab. 27. **Gesamtausstrahlung bei verschiedenen Temperaturen.**

Temp. °abs	$10^{-3}\,\frac{\text{Kal}}{\text{cm}^2\ \text{sek}}$
0	0
300 (Erde)	0·0112
1000 (Rotglut)	1·38
3000 (Bogenlampe)	112
6000 (Sonne)	1790

(Berechnung s. Note zu 178).

Dieses Gesetz der 4. Temperaturpotenz ist auch in feste Verbindung gebracht mit den schon öfter erwähnten allgemeinsten Erfahrungen über Wärme (111, 112). Es geschieht dies mittels eines Gedankenversuchs, auf den wir in umfassenderem Zusammenhang noch besonders eingehen (257). Damit ist dem Gesetz eine besondere Sicherheit gegeben (Boltzmann 1884), und dies ist auch schon eine Stütze für die in Abb. 77 vermerkte Gleichung für E; denn dieselbe enthält das Gesetz als Teilaussage, indem sie die Kurvenfläche tatsächlich proportional T^4 gibt[1]).

176. Der vollkommen schwarze Körper. — Die genaue und einwandfreie Ermittelung der Temperaturabhängigkeit der Strahlung mit ihrer ganzen spektralen Verteilung, wie sie in Abb. 77 und der dazugehörigen, dort vermerkten Gleichung vorliegt, erforderte einen zuverlässig vollkommen schwarzen Körper. Derselbe mußte für alle Wellenlängen vollkommen schwarz sein und mußte, ohne diese Eigenschaft zu verlieren, auch Erhitzung bis zu beliebig hohen Temperaturen vertragen, um ihn als Strahlungsquelle benutzen zu können. Ruß, Platinmohr und dergleichen genügen diesen Bedingungen nicht sicher für die unsichtbaren, mit dem Auge nicht kontrollierbaren Wellen, und hohe Temperaturen verändern sie leicht.

Die gesuchte Verwirklichung des vollkommen schwarzen Körpers als Strahlers war aber durch Kirchhoffs Gesetz gegeben. Ein Loch an einem Hohlraum ist schwarz, wie jedes Kellerloch und die Pupille des Auges zeigt. Kein Lichtstrahl kehrt zurück, der von außen die Fläche des Loches getroffen hat. Denn

[1]) Es ist $\int_0^\infty E\,d\lambda = (\pi^4 c_1/15 c_2^4)T^4$. c_1 und c_2 sind unveränderliche Größen (178).

er fällt innen auf die Wand des Hohlraums, die nicht spiegelnd sei, wird dort zerstreut reflektiert, sofern er nicht absorbiert wird, und von den zerstreuten Strahlen trifft so gut wie keiner das Loch, wenn dasselbe klein ist im Vergleich zur ganzen Innenfläche des Hohlraums; vielmehr verfallen die zerstreuten Strahlen derselben weiteren Zerstreuung und Absorption an den von ihnen getroffenen Stellen der Innenfläche, wieder ohne in merklichem Bruchteil das kleine Loch zu treffen, und dies wiederholt sich bis zu vollständiger Absorption. Abb. 78 deutet diesen Verlauf an.

Es kommt demnach darauf an, einen Hohlkörper, der innen rauh und möglichst schon schwarz ist, mit sehr kleinem Loch zu haben; die Fläche des Loches muß dann in beliebig zu steigernder Annäherung für alle Wellenlängen der Wärmestrahlung als vollkommen schwarzer, absorbierender Körper wirken. Nach Kirchhoffs Gesetz muß diese Fläche dann aber auch für die Emission gleich der Fläche eines schwarzen Körpers wirken; sie muß diejenige Strahlung aussenden, die einem schwarzen Körper von der Temperatur der Innenwände des Hohlraums zugehören, an welchen der Absorptionsvorgang einfallender Strahlen, sowie auch der Emissionsvorgang verläuft.

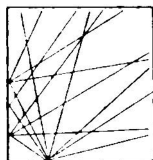


Abb. 78.
Schwarzer Körper.

177. Hohlraumstrahlung. — Da nach Vorigem die Öffnung an jeder beliebigen Stelle des Hohlraums und in jeder beliebigen Richtung angebracht sein kann und doch dieselbe Strahlung austreten läßt, welche dem vollkommen schwarzen Körper von Wandtemperatur zugehört, so folgt, daß diese Strahlung im ganzen Inneren des Hohlraums in jeder Richtung laufend vorhanden sein muß. Daraus folgt auch weiter, daß die in der Volumeinheit enthaltene Energie der Strahlung — die Strahlungsdichte oder Energiedichte — in einem solchen Hohlraum das Doppelte der Energiedichte nächst der Oberfläche eines freien, strahlenden, vollkommen schwarzen Körpers gleicher Temperatur sein muß, weil im Hohlraum überall hin- und hergehende Strahlung übereinandergelagert vorhanden sind. Man kann dann sagen: Die Strahlung im Raume — „Hohlraumstrahlung" — sei „im (dynamischen) Gleichgewicht mit dem schwarzen Körper" der gegebenen Temperatur[1]), was ähnlich dem Gleichgewicht zwischen einem Dampf und seiner Flüssigkeit (205) gemeint ist.

Solche Erfüllung eines Hohlraums mit der Wandstrahlung gilt auch dann, wenn nur ein Teil der Wände vollkommen schwarz und der andere Teil vollkommen spiegelnd ist, weil der spiegelnde Teil die vom schwarzen Teil empfangene Strahlung unverändert und unvermindert von sich gibt als wäre er selbst schwarz.

178. Messungen am vollkommen schwarzen Körper. — Bringt man einen, in Gestalt des Hohlraums mit kleiner Öffnung verwirklichten, vollkommen schwarzen Körper zusammen mit dem Gefäß eines Gasthermometers oder mit den Drähten eines mittels Gasthermometers geeichten Thermoelements oder Widerstandsthermometers (44) auf einheitliche, verschieden hoch zu wählende Temperatur und untersucht man jedesmal die aus dem Loch tretende Strahlung, so hat man die Grundlage für die — in der Abb. 77 schon vereinigte — eingehende und gut gesicherte Kenntnis von der Temperaturabhängigkeit der Strahlung des schwarzen Körpers.

[1]) Man hat dem Hohlraum, der ganz materiefrei sein kann, gelegentlich auch „die Temperatur" des Körpers zugeschrieben, mit dem die ihn erfüllende Strahlung im Gleichgewicht ist. Jedoch widerspricht solche Ausdrucksweise dem nach der Bewegung der Gasmoleküle nicht nur wohldefinierten, sondern nach dieser Bewegung auch allein kontrollierbaren Temperaturbegriff (33) und ist daher für klar gesichertes Vorgehen zu vermeiden.

Solcher Untersuchungen sind sehr viele mit steigernder Verfeinerung ausgeführt, sowohl mit Messung der Gesamtstrahlung, als auch besonders der spektralen Verteilung der Strahlung über die verschiedenen Wellenlängenbezirke.

Es war dabei zu beachten, daß man immer nur die Differenz der beiden, vom schwarzen Körper und von der Meßvorrichtung ausgehenden, gegeneinanderlaufenden Strahlungen messen kann (154). Es mußte daher auch die Meßvorrichtung — Thermosäule, Bolometer oder sonstige Thermometervorrichtung — vollkommen schwarz sein, um deren Strahlung in Rechnung setzen zu können, wozu Berußung oder Platinierung, aber auch hohlraumartige Ausbildung der Meßvorrichtung benutzt wurde. Bei den Messungen mit spektraler Zerlegung war jedesmal genaue Kenntnis des wirkenden Wellenlängenbereiches erforderlich, da die Wirkung sowohl diesem als der Strahlungsintensität proportional ist (vgl. 1. Note zu 172). Da Energien zu messen waren, mußten die Thermometervorrichtungen auf Wärmemengen geeicht werden, was meist durch Zufuhr gut bemeßbarer elektrischer Stromwärme erfolgte. Endlich mußte auch die Größe der strahlenden Öffnung des schwarzen Körpers und der räumliche Winkel ermittelt sein, unter welchem sie auf die Meßvorrichtung strahlt, damit auf allseitige Strahlung von 1 cm^2 strahlender Fläche umgerechnet werden kann.

Das Ergebnis aller dieser Messungen ist die Strahlungsgleichung des schwarzen Körpers:

$$\mathfrak{E} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}, \qquad 178)$$

welche wir in der Liniendarstellung der Abb. 77 schon benutzt und erläutert haben (172). $\mathfrak{E} \cdot \Delta\lambda$ ist die von 1 cm^2 schwarzer Fläche in 1 sek im Wellenbereich zwischen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ bei der Temperatur T ausgestrahlte Energie.

Dieser Gleichung schließen sich sämtliche vorhandene Messungen an, jede mit der Genauigkeit, die nach ihrer Durchführungsweise zu erwarten ist, wobei die Konstanten c_1 und c_2 die folgenden Werte erhalten: $c_1 = 8{\cdot}8 \cdot 10^{-16}$ Kal cm^2 sek^{-1} $= 3{\cdot}7 \cdot 10^{-5}$ erg cm^2 sek^{-1}, $c_2 = 1{\cdot}43$ cm^0C [1]) (e ist die „natürliche Zahl" der Mathematik, 2·71828...).

Zur Sicherung der Gleichung und der Konstanten konnten nur Temperaturen bis zu 1870°abs. verwendet werden; denn weiter aufwärts versagt das Grundmeßmittel für Temperaturen, das Gasthermometer (44, 45). Die Abb. 77 zeigt hauptsächlich Linien für höhere Temperaturen, die nach Gl. 178 gezeichnet sind und auf die wir noch zurückkommen; für die niederen Temperaturen ist der Ordinatenmaßstab der Abbildung zu klein. Die Berechtigung der Anwendung der Gl. 178 auch auf die höheren Temperaturen liegt nicht nur in der Bewährung der Gleichung bei den nachmeßbaren Temperaturen, sondern besonders in ihren guten Zusammenhängen mit einer Fülle sonstiger Kenntnis, was im folgenden zu erläutern ist (179—184).

179. Verschiebungssatz der Wellenlängen. — Die besondere, von vornherein nicht naheliegende Form der Gl. 178 ist allmählich mit Zuhilfenahme von Einzelkenntnissen entwickelt und gesichert worden.

Eine solche Kenntnis war schon frühe die Proportionalität der Gesamtstrahlung mit der 4. Temperaturpotenz (175), die bei den neuen Messungen mit dem schwarzen Körper vollkommen bestätigt worden ist. Dazu kam durch diese Messungen die Kenntnis, daß die Intensität der meistausgesandten

---

[1]) Die Gesamtstrahlung (175) ist mit diesen Konstanten $\int^{\infty} \mathfrak{E} d\lambda = 1{\cdot}38 \cdot 10^{-15} T^4$ Kal/cm^2 sek^0C^4 $= 5{\cdot}77 \cdot 10^{-5} T^4$ erg/$cm^2 sek^0C^4$ (vgl. Tab. 27).

Wellenlänge — die Gipfelhöhe der Linien der Abb. 77 — proportional der 5. Temperaturpotenz ist[1]).

Dazu war durch eine Erweiterung des schon genannten Gedankenversuchs (175, 257) der „Verschiebungssatz" gefunden worden (258), wonach die meistausgestrahlte Wellenlänge verkehrt proportional der absoluten Temperatur ist. Je höher danach die Temperatur ist, desto mehr rückt der Gipfel der Linien der Abb. 77 nach der Seite der kurzen Wellen; bei Verdoppelung der Temperatur halbiert sich die meistausgesandte Wellenlänge[2]). Dieser Satz, der eine Verfeinerung der alten Erfahrung (171) vom Übergang der dunklen Glut in Rot-, Gelb- und Weißglut bei steigender Temperatur darstellt, hat durch jenen Gedankenversuch feste Verbindung erhalten mit der schon erläuterten, zusammengefaßten allgemeinen Erfahrung über Wärme (111, 112) und ist daher gut gesichert; er zeigte sich außerdem bei den Messungen am schwarzen Körper ebenfalls vollkommen bestätigt.

Es sei bemerkt, daß der Verschiebungssatz auch unmittelbar die Schwierigkeit verstehen läßt, zum längstwelligen Ultrarot vorzudringen (vgl. die Lücke bei $\lambda = 1$ mm in der Wellenskale Abb. 72). Denn dasselbe wird nach dem Satz vorzugsweise nur von ziemlich kalten Körpern ausgesandt, die aber überhaupt nicht viel strahlen. Es wird z. B. bei 3000°abs. am meisten die Wellenlänge $\lambda = 0.001$ mm ausgesandt (Abb. 77), demnach $\lambda = 0.01$ mm am meisten bei 300°abs. = 27°C und $\lambda = 0.1$ mm am meisten bei 30°abs. = —243°C. Es müssen daher diese langen Ultrarot-Wellen immer mit viel Mühe aus dem Übermaß der kürzeren Wellen der gut strahlenden, heißen Körper möglichst rein ausgesondert werden, um Untersuchungen und Messungen an ihnen vorzunehmen.

180. Deutung der Strahlungsgleichung des schwarzen Körpers. — Alle diese Gesetzmäßigkeiten (175, 179) finden sich in der Strahlungsgleichung 178 des schwarzen Körpers zusammengefaßt. Doch würde diese Zusammenfassung auch bei Weglassung von —1 im Nenner bewirkt sein, nur daß dann nicht sämtlichen Messungen (178) am schwarzen Körper genügt wäre[3]). Somit ist Gl. 178, obgleich etwas verwickelt aussehend, doch die einfachste Möglichkeit der Zusammenfassung alles wohlgesichert Bekannten über die Strahlung des schwarzen Körpers.

Man darf daher an diese Gleichung mit Vertrauen Fragen knüpfen in bezug auf die Vorgänge bei der Strahlenaussendung im heißen, schwarzen Körper. Unzweifelhaft ist es, daß die Aussendung in der Erzeugung elektromagnetischer Wellen durch die Atome besteht, wobei die Energie der Wellen aus der Wärmeenergie des Körpers genommen wird (160). Die Atome (Moleküle) des Körpers verhalten sich dabei wie elektrische Oszillatoren (E 430) und, wie die Gültigkeit

[1]) Das durch die 5. Potenz sehr starke Ansteigen der Gipfelhöhe ist in der Abb. 77 deutlich auffällig. Die Gipfelhöhe der Linie für 10000°abs. wäre im Maßstab der Abbildung 4 m.

[2]) Die punktierten Lote von den Gipfeln (mit den beigeschriebenen Temperaturen) zeigen in Abb. 77 jeweils die betreffende Wellenlänge an; man sieht, daß bei 10000°abs. die meistausgesandte Wellenlänge sogar dem Ultraviolett angehört.

[3]) Ohne —1 im Nenner gäbe Gl. 178 E für das langwellige Ultrarot bei hohen Temperaturen deutlich zu klein. Im übrigen wäre die Form der Linien, wie in Abb. 77, auch ohne —1 in der Hauptsache richtig, den Messungen entsprechend, durch die Gleichung dargestellt: λ^{-5} gibt den starken Abfall nach den langen Wellen hin, wobei die Potenz 5 durch das Gesetz der Gesamtstrahlung und das der meistausgesandten Wellenlänge (175, 179) bestimmt ist; die Exponentialgröße im Nenner gibt den noch steileren Abfall gegen die kurzen Wellen hin, wobei das Vorkommen von T ausschließlich im Produkt $\lambda \cdot T$ dem Verschiebungssatz (179) Genüge leistet.

von Kirchhoffs Gesetz zeigt, zugleich wie Resonatoren (166, 167), und es müssen bei den Atomen eines schwarzen Körpers, der Wellen aller Längen absorbiert, alle möglichen Schwingungsdauern vertreten sein. Man kann dann fragen, warum die als Wärme im Körper enthaltene Energie so unter die Oszillatoren verschiedener Schwingungsdauern verteilt ist, wie es die Strahlungsgleichung angibt, während die Energie jedes einzelnen Oszillators demjenigen steten Wechsel unterworfen ist, welcher bei der Ungeordnetheit der die Energie liefernden Wärmebewegung unzweifelhaft anzunehmen ist.

Die Anwendung der schon einmal erwähnten Rechnungsweise (111), welche die Möglichkeiten des Verhaltens einer sehr großen Zahl von Einzelgebilden — wie der Moleküle in einem Gasvolum oder der Oszillatoren im schwarzen Körper — mit ungeordnet wechselnden Zuständen zu behandeln erlaubt[1]), hat ergeben, daß die Energie nicht in beliebig kleinen Mengen wechselnd unter die Oszillatoren verteilt sein kann, wenn die Gl. 178 gilt, sondern nur in bestimmten Mengenabteilungen, deren Größe nach den Schwingungsdauern (oder sonstigen wellenerzeugenden Periodendauern) der Oszillatoren sich einrichtet: Jedem Oszillator kommen Energiemengen zu, die seiner Schwingungsdauer verkehrt proportional, seiner Schwingungszahl n also proportional sind, die somit durch $h \cdot n$ gegeben sind, wenn h eine gewisse Proportionalitätskonstante ist (1900)[2]). Unter Annahme dieser eigentümlichen Energiezerteilung ergibt sich die richtige Strahlungsgleichung 178.

Es treten dabei an Stelle von deren beiden Konstanten c_1 und c_2 zwei neue Konstanten h und k ein[3]), mit dem Zusammenhang $c_1 = 2\pi c^2 h$, $c_2 = ch/k$, wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sek die Lichtgeschwindigkeit ist. Die beiden neuen Konstanten h und k können danach aus c_1 und c_2, die aus den Messungen am schwarzen Körper bekannt sind (178), unmittelbar berechnet werden. Man findet $h = 6{\cdot}55 \cdot 10^{-27}$ erg sek, $k = 1{\cdot}35 \cdot 10^{-16}$ erg/°C. Die Konstante h wird mit Rücksicht auf das Folgende „Wirkungsquant" genannt.

181. Quantenmäßiges Arbeiten der Atome und Moleküle. — Die in solcher Weise aus den Gesetzen der spektralen Verteilung der Strahlung des schwarzen Körpers gefolgerte Energiezerteilung in „Quanten", deren Größen hn durch die Atome, welche die Energie verarbeiten, bestimmt sind, nämlich durch die Schwingungszahlen (Periodenzahlen) n der Atome, hat sich alsbald nicht nur als eine den Strahlungseigentümlichkeiten des schwarzen Körpers genügende Annahme bewährt, sondern auch weitergehend als der Wirklichkeit entsprechend gezeigt durch eine Reihe von besonderen Tatsachen.

Bemerkenswert war sogleich, daß die Größe der Konstanten k, wie sie aus den Messungen am schwarzen Körper berechnet war (180), ganz der Bedeutung entsprach, die ihr nach dem Sinn der Rechnung zukommt, derart, daß aus k die Zahl N_0 der Moleküle in der Volumeinheit eines Gases richtig berechenbar wurde[4]) (vgl. 105).

Unter den weiteren Tatsachen, welche sogar fast unmittelbar das quanten-

---

[1]) Anhang W V.

[2]) Die Reihe der Schlüsse und die Rechnung zeigt Anhang W V, 10.

[3]) Es darf nicht stören, daß der Buchstabe k an anderer Stelle der Wärmelehre auch zur Bezeichnung von c_p/c_v benutzt ist.

[4]) Anhang W V, 8 und 10.

mäßige Arbeiten der Atome zeigen, und die im Laufe unserer sonstigen Betrachtungen hervorgehoben sich finden, sind besonders folgende zu nennen[1]):

Die Eigentümlichkeiten der spezifischen Wärmen der festen Körper bei tiefsten Temperaturen, wobei die Eigenschwingungszahlen der Atome maßgebend sich zeigten (57), sowie die Änderung des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen der Gase bei tiefen Temperaturen (123).

Die Erscheinungen der Fluoreszenz und Phosphoreszenz, wo der Austausch der Lichtenergien ebenfalls quantenmäßig nach Maßgabe der Schwingungszahlen stattfindet (O 106, 112, 116).

Die lichtelektrische Wirkung, deren eigentümliche Gesetze ebenfalls mit dem quantenmäßigen Arbeiten der Atome übereinstimmen (E 471), und ebenso eine Reihe weiterer in der Elektrizitätslehre zu behandelnder Vorgänge (E 473, 488, 498, 500, 511).

182. Die Quanten haben sich nicht als Energieeigenschaft gezeigt, sondern als Atomeigenschaft. — Bei allen diesen Vorgängen (181) wird die Energiezerteilung durch Atome bewirkt nach Maßgabe irgendwelcher, den Atomen (Molekülen) eigenen Periodenzahlen n. Es ist nicht ein allgemeines Zerteiltsein der Energie in Quanten, das sich zeigt[2]), sondern es ist eine Eigenschaft der Atome, die Energie in Quanten-Teilen zu verarbeiten. Dem entspricht auch die je nach der Periodenzahl n der Atome wechselnde Größe der Quanten hn.

Die Einzelvorgänge bei der Energieaufnahme und Abgabe der Atome — wozu auch Lichtabsorption und Emission gehört — sind wenig bekannt (O 115) oder unbekannt (E 544); aber die Tatsache der Quantenmäßigkeit dieser Vorgänge (181) ist gut gesichert.

Bemerkenswert ist es, daß die Wellenaussendung des schwarzen Körpers und überhaupt heißer Körper — der gewöhnlichen Lichtquellen —, obgleich sie nach der gewonnenen Kenntnis aus Beiträgen hn der einzelnen Atome zusammengesetzt ist, doch keine entsprechenden Abteilungen in den fertigen, ausgesandten Wellen erkennen läßt (O 129, 161). Dies zeigt, daß die Wellenaussendung Ergebnis des Zusammenwirkens vieler Atome sei (s. O 165). Bei der Lichtabsorption liegen entsprechende Beobachtungen vor über Energieheranziehung aus der Umgebung des absorbierenden Atoms (O 113, 165), was ebenfalls als Zusammenwirken vieler Atome zu deuten ist. Gesondertes Auftreten emittierter Energiequanten in Gestalt vereinzelter Wellenzüge kann bei äußerst hohen Periodenzahlen n und damit äußerst kurzen Wellen[3]) erwartet werden, wo

[1]) Diese Tatsachen würden bei Fortsetzung ihrer Verfolgung das Walten des Energiequants hn sogar für sich allein und in viel einfacherer Weise erkennbar gemacht haben, als die zeitlich etwas vorausgegangenen verwickelten Überlegungen über die Strahlung des schwarzen Körpers. Mehrere der zu nennenden Vorgänge haben auch gute Wege zu wiederholter Ermittelung der Konstante h ergeben. Der bleibende Wert jener verwickelten Überlegungen besteht darin, daß sie festen Zusammenhang zwischen den Strahlungseigentümlichkeiten des schwarzen Körpers und den oben zu nennenden Vorgängen herstellen, und um der Wichtigkeit dieses Zusammenhangs willen haben wir jene Überlegungen im Anhang W V, 1—10, eingehend dargestellt.

[2]) Man bemerkt dies auch bei der Berechnung, wenn man deren Sinn genügend aufmerksam beachtet (Anhang W V, 10).

[3]) Vgl. die Wellenskale Abb. 72.

dem einzelnen Quant eine entsprechend große Energiemenge $h\nu$ zugehört (E 552), so daß die ausgestrahlte Gesamtenergie nur wenige oder einzelne Quanten umfaßt, die somit unverschmolzen auffindbar sein können. Dem entsprechende Erscheinungen haben sich bei äußerst kurzwelliger Strahlung auch gezeigt (O 165, E 473); beim gewöhnlichen Lichte fehlen sie. Es ist eine willkürliche Behauptung[1]), daß überall im Licht gesonderte Energiequanten („Photonen") vorhanden seien.

e) Temperaturmessung durch Strahlung.

Nach so ausgiebiger, vielseitiger Sicherung der Gesetze der Strahlung des schwarzen Körpers war es gerechtfertigt, diese Strahlung als Temperaturmaß zu benutzen besonders dort, wo das Grundmeßinstrument für Temperaturen, das Gasthermometer, versagt (45). Dieses Versagen tritt in der Tat gerade bei den hohen Temperaturen (über 1600°C) ein, wo die Strahlung stark und auch bis ins sichtbare Gebiet hineinreichend ist, wo also Strahlungsmessung am leichtesten ausführbar ist.

183. Ausführungsweisen. — Es stehen viele Wege für solche Temperaturmessung offen. Grundvoraussetzung ist, daß die zu messende Temperatur T einem schwarzen Körper mitgeteilt wird — etwa durch genügend lange Berührung — und daß dann irgendeine mit der Temperatur möglichst einfach zusammenhängende Eigenheit der Strahlung des Körpers gemessen wird. Es kann die Gesamtstrahlung benutzt werden, die T^4 gibt (175); es kann auch die meistausgestrahlte Wellenlänge genommen werden, die $1/T$ gibt (179); es kann aber auch eine Feststellung der spektralen Verteilung der Strahlung gemacht werden, die dann ebenfalls auf die Temperatur zu schließen erlaubt, so wie jeder Linienform der Abb. 77 eine bestimmte Temperatur entspricht.

Man sieht, daß diese Art der Temperaturmessung eine Verfeinerung des alten Mittels ist, hohe Temperaturen nach dem Glühzustand — Rotglut, Gelbglut, Weißglut — zu beurteilen, wobei aber jetzt der Anschluß an die wohldefinierte, zuerst durch das Gasthermometer allein verwirklichte Temperaturskale (33, 44) gesichert ist, da die Strahlungsgesetze des schwarzen Körpers mit Benutzung eben dieser Temperaturskale ergründet sind.

Bei der Ausführung kommt zustatten, daß die meisten Körper bei hoher Temperatur von selber mindestens annähernd wie schwarz sich verhalten (173), außerdem daß oft Temperaturen von Hohlräumen zu messen sind, die jedenfalls wie schwarz wirken (176), wie es z. B. ein Glühofen der Industrie ist, an dem ein kleines Schauloch zur Messung angebracht werden kann. Temperaturen leuchtender Flammen können ebenfalls unmittelbar aus ihrer Strahlung gemessen werden, wenn sie — allenfalls in Vervielfältigung hintereinandergestellt — eine genügend dicke, absorbierende Schicht bilden. Auch nicht vollkommen schwarze Körper können unmittelbar gemessen werden, wenn man nur Wellenlängen benutzt, für welche vollkommene Schwärze besteht.

Da Messungen im sichtbaren Teil der Strahlung am leichtesten ausführbar sind, weil hierfür das Auge zur Verfügung steht, wird im Allgemeinen durch Lichtmessung — „photometrisch" — verfahren — „optische Pyrometrie". Es genügt dazu Beobachtung in einer einzigen Farbe, z. B. durch ein rotes Glas, wenn gleichzeitig eine kleine Glühlampe im Gesichtsfeld ist, deren Strom meßbar verändert werden kann; man stellt die Stromstärke so ein, daß der Faden der Glühlampe und das Licht des zu messenden Körpers auf gleiche Helligkeit kommen; die abzulesende Stromstärke kann dann nach vorausgegangener Eichung unmittelbar die Temperatur ergeben. Die Eichung erfolgt am vollkommen schwarzen Körper, dessen Temperaturen durch Messung seiner Gesamtstrahlung ermittelbar sind.

[1]) Nach rein formellem Schluß aus einer „Quantentheorie" (vgl. Einl. 14, Bd. I).

Man kann auch mit zwei Farben photometrieren, z. B. Rot und Grün, indem man eine möglichst unveränderliche, gleich einem schwarzen Körper leuchtende Hilfslichtquelle bekannter Temperatur zum Vergleich nimmt. Ist der zu messende Körper in beiden Farben gleich hell mit der Hilfslichtquelle, so hat er die gleiche Temperatur wie diese; ist er im Rot heller, so ist er kälter; ist er im Grün heller, so ist er heißer. Das Quantitative ist nach der Strahlungsgleichung 178 zu berechnen.

Einige Beispiele durch Strahlung gemessener hoher Temperaturen bietet Tab. 28; auch die Angaben über hohe Schmelzpunkte in Tab. 30 sind auf Strahlungsmessung gegründet, wie überhaupt außer dem Gasthermometer nur die Strahlungsmessung wohlgegründete Angaben über hohe Temperaturen liefert. Auf die ebenfalls durch Strahlungsmessung gefundenen Temperaturen der Leuchtgestirne (Tab. 29) kommen wir noch zurück (185, 188).

Tab. 28. **Temperaturen bei verschiedenen Glühzuständen und von Lichtquellen.**

Grauglut	900° abs
Rotglut	1000
Hefnerlampe	1670
Gelbglut	2000
Wolfram-Glühlampen	2500
Weißglut . } Bogenlampe }	3000
Sonne	6000

184. Heiße Körper als Beleuchtungsmittel. — Fast alle unsere künstlichen Lichtquellen sind heiße Körper. Sie erfüllen ihren Zweck am besten, sparsamsten, wenn die in ihnen aufgewendete Energie möglichst vollkommen als Energie sichtbaren Lichtes ausgestrahlt wird. Ist die Lichtquelle ein schwarzer Körper, wie es angenähert Kerzen- und Leuchtgasflammen mit ihren Kohlenstoffpartikeln, Glühlampen mit ihren Metallfäden, Bogenlampen mit den glühenden Kohlen sind, so geben die Linien der Abb. 77 unmittelbar Auskunft über die Sparsamkeit; denn die Flächen unterhalb der Linien bemessen die ausgestrahlte Energie, und zwar gilt für jeden Wellenlängenbezirk der betreffende senkrechte Streifen der Fläche (vgl. 1. Note zu 172). Es gibt demnach der senkrecht über dem sichtbaren Spektrum bis zur betreffenden Linie liegende Teil der Fläche die nutzbare Energie; der Rest der Fläche ist unsichtbare und daher für Beleuchtung verlorene Energie.

Die Linien der Abb. 77 zeigen schon nach dem Augenmaß, daß der sichtbare Teil ein um so größerer Bruchteil der ganzen Fläche ist, je höher die Temperatur steigt; die Gl. 178 gibt das Genauere. Sie zeigt, daß der sichtbare Bruchteil unter Rotglut (900°abs.) so gut wie Null ist, bei 2000°abs. (ungefähre Temperatur der alten Kohlefaden-Glühlampen) 0·01 wird, bei 3000°abs. (nahe Wolfram-Schmelzpunkt) 0·1, bei 5000°abs. 0·3. Je heißer daher eine solche Lichtquelle, desto sparsamer ist sie. Die Kohlen des elektrischen Bogens und die Drähte hellster heutiger Glühlampen haben die nach ihrer Strahlung leicht zu messende Temperatur von etwa 3000°abs. (Tab. 28); nur 0·1 ihrer Strahlung ist daher sichtbares Licht, 0·9 ist für Beleuchtung verlorenes Ultrarot. Dieser Ultrarot-Reichtum kann leicht ersichtlich gemacht werden, wenn man die Strah-

lung z. B. einer Bogenlampe durch ein Kölbchen voll Jodlösung in Schwefelkohlenstoff konzentriert, das als Linse wirkt (Abb. 79). Die Lösung läßt nur Ultrarot durch (157), so daß der Brennpunkt nicht sichtbar wird; ein hingehaltenes Stück Papier wird aber sofort entflammt. Die Gegenprobe mit einem Kölbchen voll Wasser, das fast nur das sichtbare Licht durchläßt (157), zeigt viel geringere Wärmewirkung im Brennpunkt.

Gesteigerte Sparsamkeit ohne Temperaturerhöhung kann mittels nichtschwarzer Körper erreicht werden. Dies ist der Fall beim Gasglühkörper, der im Ultrarot nichtschwarz ist, es also nicht unnötig aussendet. Dieser Glühkörper wird daher auch viel heißer in der Bunsenflamme als ein schwarzer Körper, der eben wegen seiner vielen Ultrarot-Ausstrahlung, die ihn kühlt, nur Rotglut erreichen könnte, weil die Flamme seine großen Energieverluste nicht genügend schnell ersetzen kann.

Es ist die der Wärmebewegung eigene Ungeordnetheit, welche der Umwandlung von Wärmeenergie in ausschließlich sichtbare Lichtenergie durch Temperaturstrahlung (174) entgegensteht. Andere Vorgänge, die nicht Temperaturstrahlung sind — Phosphoreszenz, Fluoreszenz, kaltes Leuchten bei chemischen Umsetzungen, elektrisch erregtes Leuchten von Gasen —, geben sichtbares Licht ohne die Beimischung der Unmenge des unsichtbaren Ultrarot. Eine sehr vollständige Umwandlung von chemischer Energie in Energie sichtbaren Lichtes durch kaltes Leuchten bei chemischer Umsetzung findet sich bei den Leuchttieren — Johanniskäfern — verwirklicht (O 119).

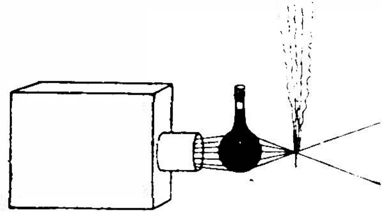


Abb. 79. Nachweis des vielen Ultrarots im elektr. Bogenlicht.

185. Temperatur der Sonne. — Die Solarkonstante (165) gibt die auf 1 m^2 in Erdentfernung fallende Sonnenstrahlung; rechnet man um auf die Fläche der ganzen, um die Sonne gelegten Kugel von Erdbahnradius, die die gesamte Sonnenstrahlung auffängt, so findet man die von der ganzen Sonnenoberfläche ausgehende Strahlung, unter der — soweit bekannt — berechtigten Annahme gleichmäßiger Ausstrahlung nach allen Richtungen, zu $1{\cdot}1 \cdot 10^{23}$ Kal/sek[1]).

Auf 1 cm^2 Sonnenoberfläche kommen danach 1·8 Kal/cm^{2}sek, und dies entspricht einer Temperatur von 6000^{0}abs. (175, 178, Tab. 27). Damit ist die Temperatur der Sonnenoberfläche gefunden, sofern sie vollkommen schwarz ist. Dieses ist mit einiger Annäherung anzunehmen; denn von außen herankommende Strahlung kann in den Gasmassen der Sonnenatmosphäre nicht reflektiert, nur vollkommen absorbiert werden.

Der Temperatur von 6000^{0}abs. entspricht in der Tat eine spektrale Verteilung

---

[1]) Die Masse (E 434) dieser sekundlich von der Sonne abgegebenen Energie von 0·1 Quadrillionen Kalorien beträgt 5·3 Millionen Tonnen. Es ist unbekannt, was aus diesen großen, von der Sonne, so wie von den vielen anderen Fixsternen mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum eilenden Energiemengen wird; nur wenig davon wird von Planeten und anderen bekannten Himmelskörpern aufgefangen, um nach einiger Umwandlung schließlich aber auch wieder ausgestrahlt in den Raum zu gehen.

der Strahlung, die mit der des Sonnenlichtes nahe übereinstimmt (vgl. Abb. 77), und dies zeigt noch besonders, daß die Sonne nahezu wie ein schwarzer Körper strahlt. Die vom schwarzen Körper bei 6000°abs. meistausgestrahlte Wellenlänge ist nach dem Verschiebungssatz (179) 0·00048 mm (blaugrün); die im Sonnenlicht meistvertretene Wellenlänge ist etwa 0·00050 mm (grün), was 5800°abs. entspräche, womit die rund 6000° auch durch die spektrale Verteilung gut gesichert sind.

Beim Lichte eines 6000° heißen Strahlers also hat alles Irdische sich entwickelt; es ist daher verständlich, daß die Wahrnehmungsorgane für Strahlung, die Augen der Lebewesen auf Erden gerade der zu 6000° gehörigen spektralen Verteilung nahe angepaßt sind. Wir sehen etwa die Wellenlänge 0·00057 mm am hellsten (gelbgrün), was von der im Sonnenlicht meistvertretenen Wellenlänge nicht weit entfernt ist. Lebewesen auf Planeten kälterer Sonnen dürften mehr rot- oder ultrarot-empfindliche Augen haben, auf Planeten heißerer Sonnen wirkten violett- und ultraviolett-empfindliche Augen am vorteilhaftesten.

186. Planetentemperaturen. — Wir haben schon die Leistungen betrachtet, welche der vom Erdquerschnitt aufgefangene Teil der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche vollbringt (164, 165). Hauptleistung ist die Unterhaltung der Oberflächentemperatur der Erde; es ist dies diejenige Temperatur, bei welcher die Oberfläche ebensoviel ausstrahlt als sie von der Sonne empfängt (161). Da für die Ausstrahlung die ganze Erdoberfläche ($4r^2\pi$), für die Auffangung der Einstrahlung aber nur der 4-mal kleinere Erdquerschnitt ($r^2\pi$) wirksam ist, kommt zur Berechnung dieses Gleichgewichtes von Ein- und Ausstrahlung nur $\frac{1}{4}$ der Solarkonstante (165), d. i. eine Einstrahlung von 0·1 Kal/m²sek in Betracht, und die Gleichgewichtstemperatur wird diejenige sein, bei welcher die Ausstrahlung eben diese Größe von 0·1 Kal/m²sek hat, d. i. (175, 178, Tab. 27) 292°abs. = 19°C. Dies stimmt in der Tat nahe genug mit der mittleren Erdtemperatur (Mittel aller Jahresmitteltemperaturen der einzelnen Oberflächenteile der Erde) überein, die 15°C ist. Dabei wurde die Erde als schwarzer Körper angenommen. Das ist sie allerdings nicht; denn ihre Gesteine und Wolken reflektieren viel Licht. Wenn aber die Erde auch nicht schwarz, sondern nur grau ist, d. i. wenn sie von Wellen aller Längen den gleichen Bruchteil reflektiert, so gilt doch die Berechnung, weil dann nach Kirchhoffs Gesetz Emission wie Absorption den gleichen Faktor erhalten.

Das Zutreffen des Ergebnisses ist daher verständlich, und man kann danach mit Recht ebenso auch die Oberflächentemperaturen der anderen Planeten des Sonnensystems berechnen, indem man deren Solarkonstanten verkehrt proportional dem Entfernungsquadrat (O 17) von der Sonne einsetzt. Man findet so die Mitteltemperaturen: für Merkur 200°C, Venus 70°C, Mars —40°C, Neptun —200°C, und dies dürfte ebensogut mit der Wirklichkeit übereinstimmen wie bei der Erde, sofern auch diese Planeten wie schwarz oder grau sich verhalten, und sofern sie keine wesentliche Eigenwärme mehr an der Oberfläche zeigen[1]). Man sieht, daß in Neptuns Abstand von der Sonne nicht mehr viel bis zum absoluten Nullpunkt der Temperatur fehlt. So tiefe Mitteltemperaturen können entwickeltes organisches Leben wohl nicht gestatten; denn dieses erfordert regen

[1]) Jupiter dürfte wegen seiner Größe noch viel Eigenwärme haben. Auch Mars scheint etwas wärmer zu sein, da er nur an den Polen Eis zeigt. Messungen von Planetentemperaturen sind mit Thermoelementen im Brennpunkt großer Spiegelfernrohre möglich.

Austausch der Atome der Moleküle (134), wozu teilweise flüssiger Aggregatzustand nötig ist, während in tiefster Kälte alles erstarrt. Aber auch zu hohe Temperaturen schließen Leben aus; denn dasselbe ist an sehr große Moleküle gebunden (86), die bei hohen Temperaturen nur zerfallen (124)[1].

Nach vorhandenen geologischen Zeichen war die Erde wiederholten Schwankungen ihrer Mitteltemperatur ausgesetzt (Eiszeiten, Steinkohlenzeit). Es ist nicht erwiesen, daß etwa Schwankungen der Temperatur der Sonne die Ursache gewesen sind; doch würde eine Erniedrigung der Temperatur der Sonnenoberfläche von nur 300° schon 15° Erniedrigung der Erdtemperatur und damit Vereisung auch mittlerer Breiten geben[2].

187. Erhaltung der Sonnentemperatur. — Die ständige, sehr große Energieabgabe der Sonne durch Strahlung, mehr als 10^{23} Kalorien je Sekunde (185), müßte sehr merkliches Sinken der Sonnentemperatur (um mehr als 1500° im Jahrtausend bei der spezifischen Wärme 1) zur Folge haben, wenn nur ein beschränkter, vorgegebener Wärmevorrat vorhanden wäre. Das Nichtstatthaben solchen, in historischen Zeiten merklichen Sinkens beweist, daß Energieersatz stattfinden muß.

Von außen kommender Ersatz ist nicht bekannt. Wohl können Massen aus dem Himmelsraum die Sonne treffen und ihr aus kinetischer Energie Wärme bringen; aber die zur Erhaltung der Sonnentemperatur nötige Massenzufuhr wäre so groß, daß sie nicht unbemerkt bleiben könnte.

Vorräte chemischer Energie auf der Sonne selbst reichten in möglichen Mengen auch nicht zur Erhaltung der Sonnenwärme aus. Radioaktive Vorräte von Atomenergien (E 554) können dagegen wirksam sein (vgl. 146), ohne daß allerdings genügende Kenntnis darüber vorläge.

Eine Hauptquelle des Wärmeersatzes für die Sonne ist aber zweifellos die potentielle Gravitationsenergie der Sonnenmassen selber. Es liegt hier eine eigentümliche Wirkung vor, die nur bei allergrößten Massen sich zeigen kann. Wenn die Oberflächenschichten der Sonne durch Ausstrahlung Wärme verlieren, so sinkt ihre Temperatur, und es erfolgt die entsprechende Zusammenziehung. Dadurch kommen sie dem Sonnenmittelpunkt näher, was Verlust von potentieller Gravitationsenergie bedeutet. Dieser Verlust erscheint als Wärme im Sonneninneren, das die zusammenfallenden Massen unelastisch auffängt. Inneres und Äußeres der Sonne ist aber beim flüssigen oder gar gasigen Zustand in dauernder Mischung durch Strömungen infolge der Temperaturunterschiede, so daß alsbald der Wärmeverlust des Äußeren wieder ersetzt ist.

Es kann sogar sein, daß der Strahlungsverlust mehr als ersetzt wird aus der Gravitationsenergie; es würde alsdann der Gesamtwärmeinhalt der Sonne

---

[1]) Wenn ein Planet — wie es bei Merkur wohl sicher der Fall ist — stets dieselbe Seite der Sonne zuwendet (wie der Mond der Erde gegenüber, M 225), so ist an dem Punkt seiner Oberfläche, der stets die Sonne im Zenith hat, eine höhere Temperatur zu erwarten, als oben berechnet, und um diesen Punkt herum sind dann Zonen mit allen Zwischentemperaturen bis zum absoluten Nullpunkt herab, womit auch für die Möglichkeit organischen Lebens Raum gegeben ist, sofern nicht die kalten Gegenden alle Flüssigkeiten und Gase durch Verdichtung festhalten.

[2]) Auch Veränderungen in der Zusammensetzung der Erdatmosphäre können Temperaturänderungen geben. Kohlensäure absorbiert Ultrarot (157), hält also die Ausstrahlung der Erdoberfläche zurück, während sie der kürzerwelligen Einstrahlung nicht hinderlich ist; erhöhter Kohlensäuregehalt der Luft kann also temperaturerhöhend wirken.

sogar steigen infolge ihres Wärmeverlustes. Die Gesamtmasse der Sonne hätte dann eine negative spezifische Wärme; sie würde erwärmt durch Wärmeabgabe. Dies ist zwar bei der Sonne nicht anzunehmen, wohl aber bei anderen Fixsternen, worauf wir noch zurückkommen (189); bei der Sonne liegt aller Kenntnis nach nur sehr verlangsamtes Sinken der Temperatur vor. Die Überrechnung des Vorganges zeigt, daß eine von der Erde aus noch nicht merkliche Verringerung des (schlecht begrenzten) Sonnendurchmessers schon genügen würde, um die gegenwärtigen Strahlungsverluste auszugleichen. Daß solche Gravitationswirkung nur bei sehr großen und außerdem räumlich sehr ausgedehnten, wenig dichten Massen[1]) zu erwarten ist, die sowohl große Gravitationskräfte als auch große Abstandsänderungen als Wege zur Arbeitsleistung bei Schrumpfung bieten, ist verständlich; Gravitation und ihre Äußerungen treten überhaupt nur bei großen Massen hervor (vgl. M 214).

Man sieht, daß dauernde Leuchten im Himmelsraum nur allergrößte und räumlich sehr ausgedehnte Massen sein können; die kleineren und schon dicht gewordenen Massen sind der zunehmenden Erkaltung unterworfen. Es scheint jeder Größenordnung von materieller Anhäufung ihre besondere Aufgabe zugewiesen. So fanden wir auch die Möglichkeit für einen Planeten, eine Atmosphäre und damit organisches Leben tragen zu können, an eine gewisse Mindestmasse gebunden (89); und ähnlich wie im Großen zeigt sich auch im Kleinen, bei den Molekülen, ein größengebundener Unterschied der Möglichkeiten (86).

188. Fixsterntemperaturen. — Diese können aus der Verteilung der Helligkeit im Spektrum des Gestirns ermittelt werden. Wie Abb. 77 zeigt, gibt gerade bei den hier in Betracht kommenden Temperaturen von 2000°abs. (Gelbglut) aufwärts die spektrale Verteilung der Strahlung ein sehr auffallendes Kennzeichen für die Temperatur, indem die größte Intensität mit steigender Temperatur allmählich von Ultrarot bis Ultraviolett durchs ganze Spektrum wandert. Die Schwierigkeit genauer Messung ist nur durch die geringe Gesamtintensität des zur Erde kommenden Lichtes bedingt; wenn aber auch die Ergebnisse der verschiedenen Beobachter um 100° oder mehr verschieden sind, so geben doch schon runde Zahlen, wie sie in der 2. Spalte der Tab. 29 zusammengestellt sind, wertvolle Einsichten.

Tab. 29.

Leuchtgestirn	T°abs.	Größenklasse	Abstand Lichtj.	absolute Helligk.	2R
α im Orion (rot)	↑ 3000°	0·9	300	45000	420
Viele kl. rote Sterne	↓ 3000	8	10	0·001	0·1
Arktur	↑ 4000	0·2	40	90	67
Polarstern	↑ 6000	2·1	160	150	16
Sonne	↓ 6000	—26·1		1	1
Wega	9000	0·1	27	100	4
Sirius (weiß) . .	↓ 10000	—1·6	8·7	30	1
κ im Drachen (weiß)	20000	3			

[1]) Die mittlere Dichte der Sonne ist nur 1·4 gr/cm³ (M 213).

Man sieht da Temperaturen von 3000° bis zu 20000°; auch die Sonne mit 6000° (185) ist mit aufgenommen. Die Sterne mit nur 3000° erscheinen im Vergleich zu den meisten anderen rot, was besonders bei α im Orion im Vergleich zum benachbarten Sirius sehr auffällt; eine künstliche Lichtquelle von 3000° würde man allerdings schon „weiß" nennen wollen (vgl. Tab. 27). Arktur mit 4000° erscheint gelb. Bei 10000° (Sirius) ist Violett im Spektrum heller als alle anderen Farben. Alle diese Zahlen beziehen sich nur auf die Oberflächen der Gestirne; das Innere muß immer viel heißer sein; denn die Oberfläche ist durch die Ausstrahlung beständiger Kühlung unterworfen.

189. Absolute Helligkeiten und Durchmesser der Gestirne. — In der 3. Spalte der Tab. 29 sind die „Größenklassen" der betreffenden Sterne angegeben. Man versteht darunter die Abstufungen der Helligkeiten, mit welchen die Sterne uns erscheinen, und man zählte ursprünglich die hellsten Sterne, wie Sirius, zu 1. Klasse und die stufenweise weniger hellen zur 2., 3., ...Klasse. Bis zur 6. Klasse reicht noch die Sichtbarkeit mit freiem Auge; die Sterne der weiteren Klassen sind teleskopisch. Allmählich ging man mehr quantitativ vor und setzte fest, daß das Helligkeitsverhältnis je zweier benachbarter Klassen 2·51 sein solle. Dies entsprach ungefähr der ursprünglichen, schätzungsweisen Einteilung, nur daß jetzt die hellsten Sterne teilweise Größenklassen unter 1 und sogar, wie Sirius, negative Klassen bekamen und auch Bruchteile von Klassen zur Bezeichnung kleinerer Helligkeitsstufen eingeführt wurden. Die Sonne bekommt hierdurch, entsprechend den Lichtmessungen, die Größenklasse —26·1. Dies bedeutet beispielsweise im Vergleich zu Sirius, dessen Größenklasse —1·6 ist, daß die Sonne die $2{\cdot}51^{(-1{\cdot}6\,+\,26{\cdot}1)} = 96\cdot 10^8$-fache Helligkeit des Sirius hat, oder — nach dem Entfernungsquadratgesetz (O 17) —, daß die Sonne in $\sqrt{96}\cdot 10^4 =$ 98000-fachem Abstand ebenso hell wie Sirius erscheinen würde. Kennt man den Abstand der verschiedenen Gestirne, was teilweise der Fall ist, wie die 4. Spalte der Tabelle zeigt[1]), so kann man ihre Helligkeiten auf gleichen Abstand umrechnen, wodurch man — mit der Sonne als Einheit — die Zahlen der 5. Spalte erhält („absolute Helligkeiten"). Diese Zahlen zeigen die sehr großen Unterschiede in der Lichtaussendung der verschiedenen Gestirne.

Diese Unterschiede in der Lichtaussendung sind nur zu einem Teile durch die Temperaturunterschiede bedingt, im übrigen jedenfalls auch durch Unterschiede in den Größen der strahlenden Oberflächen der Gestirne. Beispielsweise entspricht die 30-fache Helligkeit des Sirius im Vergleich zur Sonne ganz dem Temperaturunterschied der beiden Gestirne, woraus auf gleiche Flächengröße (gleiche Durchmesser 2R) zu schließen ist (letzte Spalte der Tabelle); dagegen ist die sehr geringe Helligkeit der roten Sterne 8. Größenklasse (2. Zeile der Tabelle) im Vergleich zu α im Orion mit derselben Temperatur ganz als Unterschied der Oberflächengröße zu deuten, woraus die Durchmesserangaben (2R, letzte Spalte) genommen sind. Da mittels Gl. 178 in jedem Falle aus der Temperatur die Helligkeit berechenbar ist, welche bei gleicher Oberflächengröße zu erwarten wäre, so kann mit der Kenntnis der wirklichen, absoluten Helligkeit auch in jedem Falle

[1]) Im Vergleich zur 1. und 2. Auflage enthält die Tabelle in den Zeilen 1, 3 und 4 der Spalten 4, 5 und 6 verbesserte Zahlen, entsprechend neueren Parallaxenmessungen (die bei den großen Abständen der betreffenden Sterne immer schwierig sind; vgl. O 27).

die wirkliche Oberflächengröße, und somit auch die Durchmessergröße 2R im Vergleich zur Sonne berechnet werden, was die Zahlen der letzten Spalte der Tabelle gibt.

Man kann zu diesen Durchmesserangaben einiges Vertrauen haben, insofern mehrere derselben, besonders die für α im Orion, auf ganz anderem Wege nachgeprüft und bestätigt worden sind (O 154)[1]).

Die Durchmesser-Unterschiede bei den verschiedenen Gestirnen sind sehr bemerkenswert. Es gibt sehr große und sehr kleine Sonnen; die größte bekannte ist α im Orion[2]); unsere Sonne gehört schon zu den kleineren, und noch kleiner sind die vielen, auch in der Größenklasse kleinen roten Sterne.

Nach dem über die Wirkung des Schrumpfens der Sonnen infolge der Ausstrahlung Überlegten (187) kann gedacht werden, daß die großen Sterne noch eine große Zukunft ihres Leuchtens vor sich haben, da sie noch viel schrumpfen können; ihre Temperaturen dürften also wohl noch im Steigen begriffen sein. Die schon kleinen Sterne sind wohl schon im Absteigen der Temperatur begriffen, das durch noch weiter mögliches Schrumpfen nur verlangsamt wird. Die Pfeile in der 2. Spalte der Tabelle deuten diese, gewaltigen Zeiträumen zugehörigen Temperaturgänge an.

---

[1]) Im allgemeinen dürfen aber die bei der erläuterten Berechnung gemachten Annahmen nicht vergessen werden: Gültigkeit des Entfernungsquadratgesetzes (keine Lichtabsorption zwischen Gestirn und Erde); vollkommene Schwärze der Leuchtgestirne; gleichmäßig über die ganze kugelig gedachte Oberfläche verteilte Helligkeit (wonach aus der Oberfläche richtige Durchmesser, auch richtige Volume, und bei vorhandener Massenkenntnis richtige Dichten folgen). Es gibt Sterne, die sehr weiß, aber doch sehr wenig hell leuchten, was mit den gemachten Annahmen hohe Temperatur bei kleiner Größe bedeuten würde; wenn aber diese Sterne nicht als schwarze Körper leuchten oder wenn unterwegs Lichtabsorption erfolgt oder wenn die Oberfläche nur stellenweise, nicht gleichmäßig leuchtet, sind die berechneten Durchmesser (und daraus berechnete abnorm große Dichten) falsch. Hierauf wird selbst in astronomischen Werken gewöhnlich gar keine Rücksicht genommen. Die große Lückenhaftigkeit des Wissens von den Gestirnen wird — trotz ihrer Selbstverständlichkeit — meist durch Rechnung mit Annahmen verdeckt. Zu den bei aller vorhandenen Kenntnis noch nicht genügend verständlich gewordenen Himmelsvorgängen gehört auch das nicht selten zu beobachtende Aufleuchten „neuer Sterne“.

[2]) Eine obere Grenze der Größe kann den sehr heißen Himmelskörpern durch den der Gravitation entgegenwirkenden Strahlungsdruck gesetzt sein (E 433).

V. Aggregatzustandsänderungen.

190. Die Übergänge vom festen in den flüssigen Zustand, sowie vom flüssigen in den gasförmigen Zustand sind mit Wärmeverbrauch verbunden, entsprechend der bei diesen Übergängen gegen die Molekularkräfte zu leistenden Arbeit. Nach Kenntnis der Verschiedenheit des molekularen Zusammenhaltes in den drei Zuständen (M 248 u. f., 315 u. f., 346) sind die mit diesen Übergängen, dem Schmelzen und dem Verdampfen, verbundenen Erscheinungen meist unmittelbar verständlich. Die Übergänge sind umkehrbar; nur in Nebenerscheinungen sind die umgekehrten Vorgänge, Erstarrung und Verflüssigung, teilweise gesondert zu betrachten.

A. Schmelzung und Erstarrung.

191. Diese Vorgänge sind jeweils an eine bestimmte, der betreffenden Stoffart eigene Temperatur gebunden, den „Schmelzpunkt" oder „Erstarrungspunkt". Es ist dies diejenige Temperatur, unterhalb derer der Stoff dauernd fest, oberhalb derer er dauernd flüssig ist.

Die Ermittelung eines Schmelzpunktes oder Erstarrungspunktes bietet im allgemeinen keine Schwierigkeiten; doch muß man stets darauf achten, Fest und Flüssig gleichzeitig nebeneinander zu haben (196). Tab. 30 zeigt die sehr verschiedene Höhenlage bei verschiedenen Stoffen. Helium erstarrt erst so dicht beim absoluten Nullpunkt, daß genaue Angabe schwierig ist; dann folgen andere bei gewöhnlicher Temperatur gasförmige Stoffe mit tiefer Lage des Erstarrungspunktes, was stets Zeichen geringer Molekularkräfte ist. Bei Eis (Wasser) ist 0° selbstverständlich, da der Nullpunkt der Temperaturskale so gewählt ist (5). Ein Teil der Metalle hat hohe Schmelzpunkte; Aluminium schmilzt bei beginnender Rotglut, Eisen bei beginnender Gelbglut. Wolfram und manche Oxyde verlangen Weißglut.

Tab. 30. **Schmelzpunkte oder Erstarrungspunkte.**

	°C		°C
Helium		Indium	+ 155
Wasserstoff	—259	Lithium	180
Stickstoff	—210	Zinn	231·8
Kohlenoxyd	—200	Wismut	269·2
Äther	—118	Kadmium	320·9
Chlor	—102	Blei	327·7
Kohlensäure	— 78·2	Zink	419·4
Quecksilber	— 38·89	Aluminium	656
Eis (Wasser)	0	Silber	960·5
Phosphor	+ 44	Gold	1063
Paraffin	46	Kupfer	1083
Kalium	63	Eisen	1600
Schwefel	115	Platin	1760

192. Schmelzwärme. — Der Wärmeverbrauch beim Schmelzen, oder auch die ebenso große Wärmeabgabe beim Erstarren — Erstarrungswärme — kann leicht in Kalorimetern gemessen werden. Tab. 31 gibt einige Ergebnisse. Auffallend ist die große Schmelzwärme des Eises, 80 Kal/kgr (vgl. 23, 56, 194).

Tab. 31. **Schmelzwärmen.**

	Kal/kgr
Eis (Wasser) . .	80·3
Zink	28·1
Silber	21·1
Zinn	14·3
Schwefel	9·4
Blei.	5·4
Phosphor	5·0
Quecksilber . . .	2·8

Ein sehr einfacher, doch lehrreicher kalorimetrischer Versuch kann am Beispiel des Eises ausgeführt werden, wenn man 1 kg zerstückeltes trockenes Eis von 0° mit 1 kgr Wasser von 80°C übergießt. Das Eis schmilzt, und nach kurzem Rühren des Gemisches ist alles flüssig. Prüft man die Temperatur, so findet man nur 0°. Man hat also 2 kgr Wasser von 0° erhalten; alle 80 Kalorien, die im warmen Wasser enthalten waren, sind fort, verschwunden, ohne daß irgendein Körper wärmer geworden wäre; sie sind verbraucht, um aus 1 kgr Eis von 0° 1 kgr Wasser von ebenfalls 0° werden zu lassen. Dies ist die charakteristische Bedeutung der Schmelzwärme, daß sie eine Wärmemenge ist, die nur zu Aggregatzustandsänderung, ohne jede Temperaturänderung, verbraucht wird.

Kein fester Körper kann schmelzen, ohne daß seine Schmelzwärme verbraucht wird, und ebenso kann keine Flüssigkeit erstarren, ohne daß ihr die ebenso große Erstarrungswärme entzogen wird. Führt man 1 kgr Eis von —10° andauernd Wärme zu, so wird es zuerst $10 \cdot 0{\cdot}5 = 5$ Kalorien aufnehmen, entsprechend seiner spezifischen Wärme (Tab. 21), wodurch es zur Temperatur 0° kommt. Alsdann erfolgt die Aufnahme der 80 Kalorien Schmelzwärme ohne jede Temperaturerhöhung. Danach erst erfolgt Temperatursteigerung des nunmehr flüssigen Wassers von 0° und zwar um je 1° für jede weiter zugeführte Kalorie, wie es seiner spezifischen Wärme entspricht.

Die große Schmelz- und Erstarrungswärme des Wassers ist von besonderer klimatischer Wichtigkeit; sie unterstützt den mildernden Einfluß, welchen schon die große spezifische Wärme des Wassers auf die Temperaturextreme an der Erdoberfläche ausübt (54). Es würden die Wintertemperaturen der mittleren und hohen Breiten schneller und tiefer unter 0° sinken, wenn nicht infolge der Allverbreitung des Wassers in Flüssen und Seen ein Haltepunkt der Temperatursenkung bei 0° eintreten müßte, da kein Liter Wasser kälter als 0° werden kann, ehe ihm die 80 Kalorien entzogen sind, deren Verlust flüssiges Wasser um 80° kälter machen würde.

193. Der Vorgang beim Schmelzen ist gleich dem bei chemischer Zersetzung (124); in beiden Fällen wird Arbeit durch die Wärmebewegung geleistet, bei der chemischen Zersetzung zur Trennung der Atome in den Molekülen, beim

Schmelzen zur Trennung der Moleküle voneinander. Ebenso ist der Vorgang des Erstarrens gleich dem bei Bildung neuer chemischer Verbindungen (128); es wird in beiden Fällen aus vorhandener potentieller Energie — von Atomen im einen Falle, von Molekülen im anderen Falle — Energie der Wärmebewegung.

194. Schmelzwärme und Schmelzpunkt. — Gewöhnlich wird die Schmelzwärme, wie die spezifische Wärme, auf die Gewichtseinheit des Stoffes bezogen, wie es auch in Tab. 31 der Fall ist (Einheit Kal/kgr). Es ist dann kein deutlicher Zusammenhang ersichtlich zwischen Schmelzwärme und Schmelzpunkt. Bezieht man aber die Schmelzwärmen auf gleiche Molekülzahlen, d. i. auf je 1 Molekulargewicht (bez. Atomgewicht), somit auf mehr naturgegebene Vergleichsmengen, und nimmt man für die Schmelzpunkte absolute Temperatur, so findet man Schmelzwärme und Schmelzpunkt bei den metallischen Elementen ungefähr einander proportional. Dies ist verständlich, weil sowohl Schmelzwärme als Schmelzpunkt von den Molekularkräften des betreffenden Stoffes abhängen, die bei den einatomigen Metallen (119) einfaches Verhalten erwarten lassen. Der Proportionalitätsfaktor, mit dem die absolute Schmelztemperatur zu multiplizieren ist, um die Schmelzwärme des Atomgewichts zu erhalten, ist etwa 2 bis 3. Daß die Proportionalität nur ungefähr gilt, ist nicht zu verwundern, da die zur Möglichkeit des Schmelzens nötige Atomenergie doch etwas anderes ist als die Arbeit des Schmelzens selbst (193). Bei Verbindungen sind die Schmelzwärmen meist wesentlich höher als es jener Proportionalität entspräche; so auch beim Eis. Es sind demnach hier die in der Schmelzwärme enthaltenen Zertrennungsarbeiten an den Atomgruppierungen des festen Zustandes besonders groß. Ein einfaches Beispiel solcher Gruppierungen haben wir am Kochsalz betrachtet[1]) (M 249). Im flüssigen Zustand sind die Moleküle frei beweglich; die Gruppierungen sind zertrennt.

195. Beständigkeit der Schmelzpunkte. — Die Schmelzwärme bedingt es, daß ein im Schmelzen oder im Erstarren begriffenes Gemisch von Fest und Flüssig jederzeit — trotz Wärmezufuhr oder -abfuhr — genau die Temperatur des Schmelzpunktes haben muß. Denn wird Wärme zugeführt, so wird sie zum Schmelzen von Festem verbraucht; wird Wärme abgegeben, so wird sie durch Erstarren von Flüssigem ersetzt. Man ist daher immer sicher, die Schmelztemperatur des betreffenden Stoffes zu haben, wenn man feste und flüssige Teile desselben im Gemisch beisammen sieht.

Man benützt daher im Schmelzen begriffene Stoffe, deren Schmelzpunkte bereits gut ermittelt sind und die genügend leicht in reinem Zustande zu haben sind (z. B. Sn, Cd, Ag, vgl. Tab. 30), als Bäder bekannter und gleichbleibender Temperatur, besonders für hohe Temperaturen, deren gesicherte Messung nicht einfach ist. Daher auch die gute Wahl des Eisschmelzpunktes als Temperaturfixpunkt (5).

196. Unterkaltung. — Es kommt vor, daß Flüssigkeiten unter ihren Erstarrungspunkt gekühlt werden können ohne zu erstarren. Dieser „unterkaltete" Zustand ist „labil": schüttelt man die Flüssigkeit genügend kräftig, so tritt Erstarrung ein. Dabei steigt die Temperatur infolge des Erscheinens von Erstarrungswärme sofort zum Erstarrungspunkt hinauf. Am sichersten kann Unterkaltung beseitigt werden durch Einbringen eines wenn auch nur kleinen Stückchens des festen Stoffes. Man sieht daraus, daß es beim Erstarren nur darauf ankommt, daß die Moleküle irgendwo in der Flüssigkeit die geeigneten Lagen zueinander bekommen, um die für den festen Zustand wesentlichen Kräfte aufeinander auszuüben. Ist eine in dieser Weise fest gewordene Molekülgruppe einmal vorhanden, so übt sie dann auf ihre Nachbarschaft die drehenden Richtkräfte aus, welche die Anlagerungen weiterer Moleküle bewirken (M 249).

---

[1]) Die Schmelzwärme von NaCl, 124 Kal/kgr, ist sogar noch größer als die des Wassers.

Man bemerkt, daß Unterkaltung den Satz nicht stört, daß Fest und Flüssig im Gemisch stets Schmelztemperatur sichern.

Die Möglichkeit des unterkalteten, labilen Zustandes, trotz der unzweifelhaft außerordentlich großen Zahl von Molekülen, die jederzeit in einer nicht allzu kleinen Flüssigkeitsmenge in geeigneten Lagen zu ihren Nachbarn sich befinden müssen, zeigt, daß es beim Erstarren nicht auf vereinzelte Molekülpaare ankommen kann, die den Anfang zu machen hätten, sondern auf große Gruppen von Molekülen, die in geeignete Lagerung kommen müssen und von denen dann die Richtkräfte auf die weiteren Moleküle ihrer Umgebung ausgehen.

197. Schmelzen von Gemischen. — Wenn verschiedene Stoffe gemischt sind, fehlt der einheitliche Schmelzpunkt, der somit oft als Reinheitskennzeichen von Stoffen dienen kann.

Etwas Besonderes tritt ein, wenn die zusammenbefindlichen verschiedenen Moleküle oder Atome Gruppierungen miteinander bilden, wie das in Metalllegierungen und in Lösungen der Fall ist[1]). Es ist dann wieder ein einheitlicher Schmelzpunkt oder Erstarrungspunkt vorhanden, aber er liegt meist tiefer als der der einzelnen Bestandteile. Es tritt „Schmelzpunktserniedrigung“ ein.

Besondere Beispiele bieten Wismutlegierungen. So hat eine Legierung aus 5 Gew.-T. Bi, 3 Gew.-T. Pb, 1 Gew.-T. Cd und 1 Gew.-T. Sn den Schmelzpunkt von nur rund 70°C, obgleich die Schmelzpunkte der Bestandteile über 200° und 300° liegen (Tab. 30).

Wässerige Lösungen erstarren stets unter 0°; so z. B. eine Kochsalzlösung mit 22 v. H. NaCl bei —21°.

Bei genügend verdünnten Lösungen irgendwelcher Art ist die Schmelzpunktserniedrigung (Gefrierpunktserniedrigung) — gegenüber dem Schmelzpunkt des reinen Lösungsmittels — proportional der Anzahl der gelösten Moleküle, unabhängig von der Natur der Moleküle[2]).

Dieser Satz kann zur Ermittelung des Molekulargewichts von Stoffen dienen, die unverdampfbar sind, bei welchen daher die Hauptmethode (83) unanwendbar ist. Es muß nur ein geeignetes Lösungsmittel für den betreffenden Stoff vorhanden sein, das seine Moleküle nicht verändert, z. B. nicht — wie Wasser — dissoziiert (E 184). Benzol, Essigsäure sind für viele Fälle geeignete Lösungsmittel. Man löst eine gewogene geringe Menge des Stoffes in gewogenem Lösungsmittel von bekanntem Gefrierpunkt, ermittelt den nun erniedrigten Gefrierpunkt und erfährt aus der Erniedrigung die Zahl der gelösten Moleküle, indem das Lösungsmittel durch einen Stoff bekannten Molekulargewichtes hierauf geeicht ist. Die Zahl der Moleküle, zusammen mit dem bekannten Gesamtgewicht, gibt das Gewicht des Einzelmoleküls.

[1]) Die komplexen Moleküle der Lösungen behandeln wir besonders in der Elektrizitätslehre (E 199).

[2]) Jedes gelöste Molekül stört die zum Festwerden erforderliche Zusammenlagerung der Lösungsmittelmoleküle (196), weil es andere räumliche Beschaffenheit und andere Kräfte hat als die Lösungsmittelmoleküle. Dabei kommt es nicht weiter darauf an, woraus die störenden Moleküle bestehen. Ebenso bewirken die Lösungsmoleküle den osmotischen Druck (M 368) und die Dampfspannungserniedrigung (223), welche ebenfalls proportional der gelösten Molekülzahl und unabhängig von der Natur der Moleküle sind.

198. Kältemischungen. — Mischt man Kochsalz und Eis in geeigneter Feinzerteilung miteinander, so tritt Verflüssigung mit gleichzeitigem Sinken der Temperatur ein. Denn das Gemisch hat erniedrigten Gefrierpunkt (197), kann also bei 0° nicht fest sein, sondern muß schmelzen[1]), und dabei verbraucht es Schmelzwärme, wodurch es sich selbst kühlt. Die Erkaltung hat ihre Grenze beim Erstarrungspunkt des Gemisches, der bei Eis und NaCl in richtigem Mengenverhältnis —21° sein kann.

Andere Salze wirken noch vorteilhafter als Kochsalz; so kann man z. B. mit kristallisiertem Kalziumchlorid und Schnee —55° erreichen.

Auch schon beim Lösen von Salzen in Wasser kann Abkühlung eintreten, da Verflüssigungswärme des festen Salzes verbraucht wird; es steht aber die Bildungswärme der komplexen Lösungsmoleküle entgegen, so daß man immer eine Differenzwirkung hat.

199. Volumänderungen beim Schmelzen. — Da der Schmelzvorgang eine Auseinandertrennung der Moleküle ist (193), ist Vergrößerung der durchschnittlichen Molekülabstände, also Volumvergrößerung beim Schmelzen zu erwarten. Dies trifft in den allermeisten Fällen auch zu: das spezifische Gewicht des festen Körpers ist größer als das der Flüssigkeit; feste Teile sinken in der Flüssigkeit unter.

Die Volumvergrößerung beim Schmelzen ist aber im allgemeinen klein; die Moleküle verlieren schon bei geringen Abstandsänderungen ihre für den festen Zustand wesentlichen Gleichgewichtslagen (vgl. M 316).

Wenn die Zusammenlagerung der Moleküle im festen Zustand besonders sperriger, raumbeanspruchender Art ist, kann sogar Volumverringerung beim Schmelzen eintreten: größeres spezifisches Gewicht der Flüssigkeit als des festen Körpers; Schwimmen des letzteren auf ersterer. Dies ist beim Wasser der Fall; das Eis schwimmt auf dem Wasser. Zu den wenigen sonst bekannten Körpern dieser Art gehört auch Wismutmetall.

Das absonderliche Verhalten des Wassers, beim Gefrieren sich zu dehnen, kann als Fortsetzung seines schon im flüssigen Zustande abnormen Verhaltens unter 4°C betrachtet werden, das wir schon früher erörterten und der Bildung komplexer Moleküle in der Kälte zuschrieben (23).

Dieses Verhalten des auf der Erde so verbreiteten Wassers hat verschiedene wichtige Folgen. Nicht nur daß Wasserleitungsrohre beim Einfrieren platzen, Fugen in Mauern beim Frieren nach Wassereindringen in jedem Winter sich erweitern, sondern wichtig ist derselbe zerkleinernde Vorgang im Ackerboden für das Gedeihen der Pflanzen. Kalte Winter geben fruchtbare Sommer; die durch Zersprengen der Gesteinsteile neu geschaffenen freien Oberflächen machen den Pflanzenwurzeln neue Nährstoffe zugänglich. Von großer klimatischer Wichtigkeit ist das Schwimmen des Eises auf dem Wasser; würde es untersinken, wie andere feste Körper in ihrer Flüssigkeit, so müßten alle Gewässer der mittleren und höheren Breitengrade der Erde dauernd vereisen, weil das im Winter am Boden sich sammelnde Eis der Sonnenwärme entzogen bliebe (27).

200. Schmelzpunkt und Druck. — Mit den Volumänderungen beim

---

[1]) Man kann so Eis auch bei Temperaturen unter 0° zu schnellem Schmelzen bringen, wenn man es mit Kochsalz bestreut, was z. B. für vereiste Straßenbahnschienen im Winter dienlich ist.

Schmelzen hängt aufs engste ein Einfluß des Druckes auf die Schmelztemperatur zusammen. Stoffe die, wie die meisten, beim Schmelzen sich dehnen, werden durch Druck am Schmelzen gehindert; der Schmelzpunkt steigt also mit Druckerhöhung; Druck verfestigt diese Körper. Entgegengesetzt sich verhaltende Körper, wie das Wasser, werden durch Druck am Frieren gehindert; der Schmelzpunkt sinkt mit Druckerhöhung; Eis wird durch Druck geschmolzen.

Das Quantitative dieser Zusammenhänge ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{dT}{dp} = T\frac{V-v}{\varrho}, \qquad 200)$$

worin T der absolute Schmelzpunkt, ϱ die Schmelzwärme (in erg/gr), V bzw. v das reziproke spezifische Gewicht (das Volum von 1 gr) des flüssigen bzw. des festen Stoffes und dT die Änderung des Schmelzpunktes bei der Druckänderung dp ist (letztere in dyn/cm²)[1]). Für Eis ergibt sich daraus eine Erniedrigung des Schmelzpunktes um 0·0075° bei Druckerhöhung um 1 Atm. Die Wirkung ist also bei kleinen Drucken geringfügig, was auch für die anderen gewöhnlichen Körper gilt. Die bei Atmosphärendruck gemessenen Schmelzpunkte können daher meist fast unverändert auch für Vakuum geltend genommen werden; sie sind fast absolute Konstanten der betreffenden Stoffe[2]).

Hohe Drucke haben aber entsprechend merklichen Einfluß. Im Erdinnern, wo Drucke bis zu Millionen von Atm. vorkommen (M 305), können die Schmelzpunkte der beim Erstarren sich zusammenziehenden Gesteine und Metalle um Tausende von Graden erhöht sein, wonach der großenteils feste Zustand des Erdinneren (M 224, A 17) trotz hoher Temperatur verständlich erscheint.

201. Regelation des Eises. — Die Schmelzung des Eises durch hohe Drucke kommt in besonderer Weise an den Gletschern der Hochgebirge zur Wirkung. Es häufen sich dort, über der Schneegrenze, an nicht zu steilen Stellen im Laufe der Jahre stets wachsende Schneemassen, die infolge ihres Gewichtes so hohe Drucke auf einander ausüben, daß der Schmelzpunkt unter die herrschende Temperatur kommt. Es tritt dann an den Stellen größter Druckwirkung Verflüssigung ein. Die verflüssigten Teile weichen aber dem Druck seitwärts aus und frieren infolgedessen sofort wieder fest. Dies hat die Wirkung, daß der ursprünglich lockere Schnee zu grobkörnigem Firn-Eis und dieses schließlich zum klaren, luftfreien Gletschereis wird. Die so entstandenen großen Eismassen drücken auf den Boden des Gletscherbettes, wo wieder Verflüssigung, Ausweichen und neues Festfrieren eintritt, und dies hat den Erfolg, daß die ganze Gletschermasse allmählich nach abwärts, ins Tal sich bewegt, als wäre sie zähflüssig, bis an ihrem unteren Ende, an der Gletscherzunge, infolge genügend hoher Durchschnittstemperatur endgültiges Abschmelzen stattfindet.

---

[1]) Die Gleichung folgt durch einfache Rechnung nach einem Gedankenversuch (256) auf Grund der schon öfter betrachteten allgemeinsten Erfahrungen über Wärme (111, 112). Sie ist dementsprechend durch Nachmessungen bei Eis und anderen Körpern auch gut bestätigt.

[2]) Will man es besonders genau nehmen, so kann man den Schmelzpunkt beim Dampfdruck des festen Körpers als solche absolute Konstante betrachten („Tripelpunkt"). Denn der feste Körper verdampft im allgemeinen etwas ins Vakuum, verdirbt dasselbe daher notwendigerweise und kann somit in vollständigem Vakuum nicht untersucht werden; doch sind die Dampfdrucke der festen Körper zu allermeist klein (207).

Man kann die hier wesentliche Erscheinung des Schmelzens und Wiederfestfrierens bei stellenweise verteiltem Druck — „Regelation" —, die nur den Stoffen mit Volumverringerung beim Schmelzen eigen ist, an einem Eisblock E E (Abb. 80) gut ersichtlich machen, der durch eine über ihn gelegte und beschwerte Drahtschlinge d d Druck erfährt. Wenn 10 kgr am Draht hängen und dessen Auflagefläche am Eis etwa 0·5 cm² beträgt, so übt er einen Druck von 20 Atm. aus, was den Schmelzpunkt des Eises auf —0·15° bringt. Der Eisblock hat aber, da er im warmen Zimmer im Schmelzen begriffen ist, an nicht gedrückten Stellen 0°, was über dem Schmelzpunkt an den Druckstellen ist; daher dort verstärktes Schmelzen, was langsames Einsinken des Drahtes ins Eis zur Folge hat. Das —0·15° kalte Wasser füllt aber den entstandenen Spalt, friert in ihm fest und schließt ihn dadurch so vollkommen, daß der Versuch, nachdem die Drahtschlinge den ganzen Block durchsetzt hat und abgefallen ist, am selben, unversehrt gebliebenen Block beliebig wiederholt werden kann.

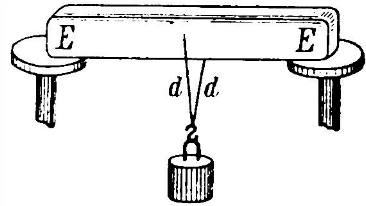


Abb. 80. Schmelzpunkt-Erniedrigung durch Druck (und Regelation) bei Eis.

Regelation macht übrigens auch den Schnee im Winter so leicht ballen; nur wenn es zu kalt ist, so daß der Druck der Hände nicht ausreicht, muß er staubig bleiben.

B. Verdampfung.

202. Der Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand geht in zwei verschiedenen Weisen vor sich, durch Verdunstung und durch Sieden.

Verdunstung findet an den freien Oberflächen der Flüssigkeiten statt und ist an keine bestimmten Temperaturen gebunden. Beim Sieden entweichen Dampfblasen aus dem Inneren der Flüssigkeit und es gilt ein bestimmter Siedepunkt.

Wir betrachten zuerst den einfacheren Vorgang, die Verdunstung; das Sieden wird danach fast ohne weiteres verständlich.

Zu bemerken ist, daß wir unter „Dampf" stets Materie in klarem, luftförmigem Zustand verstehen, von „Gas" unmittelbar nicht unterscheidbar, im Gegensatz zum gewöhnlichen Sprachgebrauch, der als „Dampf" häufig die Wolken von Flüssigkeitströpfchen bezeichnet, zu welchen Dämpfe — in unserem Sinne — sich verdichten können.

a) Verdunstung.

Wenn eine Flüssigkeit an ihrer Oberfläche in den Gasraum hinein verdunstet, ist der Vorgang wegen der Anwesenheit der Gasmoleküle nicht so einfach wie bei der Verdunstung ins Vakuum; diese gibt die reinen Versuche, und wir beginnen daher mit ihr die Untersuchung.

203. Dampfspannung. — Läßt man in das Vakuum eines Barometerrohres a (Abb. 81) von unten, durch das Quecksilber, einige cm³ Äthyläther aufsteigen, so findet sofort bei dessen Ankunft im Vakuum explosionsartige Verdunstung des Äthers statt, und das Quecksilber sinkt plötzlich bedeutend

herab bis zum Stande, wie es b in der Abbildung zeigt. Damit tritt Stillstand ein, obgleich noch etwas Äther über dem Quecksilber unverdampft sichtbar ist. Die Verdunstung hat offenbar eine Grenze erreicht, über die sie nicht hinausgeht; läßt man noch mehr Äther aufsteigen, so ändert das weiter gar nichts; er bleibt ruhig über dem Quecksilber, wie schon der vorige Überschuß unverdampften Äthers.

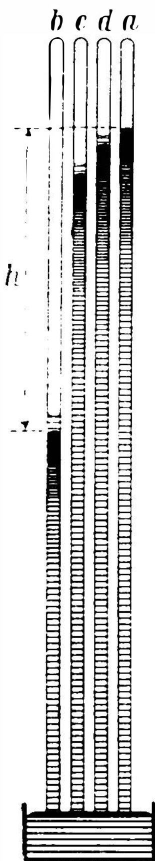


Abb. 81. Dampfspannungen unter 1 Atm.

Der Raum über dem Äther im Rohr ist offenbar mit Ätherdampf gefüllt, und dieser übt einen bestimmten Druck aus, der gemessen wird durch die Quecksilbersäulenhöhe h[1]), um welche das mit Äther versehene Barometer b tiefer steht als das leere Barometer a, es ist das etwa halbe Barometerhöhe, also ½ Atm.

Man findet bei gleicher Temperatur mit derselben Flüssigkeit stets denselben Druck, welches auch die Form oder Größe des Verdampfungsgefäßes, die Größe der Flüssigkeitsoberfläche und der verfügbare Dampfraum sei.

Man nennt diesen Druck h die „Dampfspannung" der benutzten Flüssigkeit, und der Versuch zeigte, daß diese Spannung dem Dampf eigen ist, unabhängig vom Volum des Dampfraumes und von der Menge der unverdampft gegenwärtigen Flüssigkeit, sowie auch von sonstigen Nebenumständen.

Erfolgt danach bei mehr Flüssigkeit kein größerer Dampfdruck, so kann man aber doch kleinere Dampfdrucke finden, wenn keine überschüssige Flüssigkeit übriggeblieben ist; das Quecksilber steht dann höher im Rohr als bei b. Das Eintreten der bestimmten Dampfspannung h ist also an das gleichzeitige Vorhandensein von Flüssigkeit mit dem Dampfe gebunden; man nennt dann den Dampf „gesättigt" und die Dampfspannung h kann zu genauerer Bezeichnung auch Spannung oder Druck des gesättigten Dampfes oder volle Dampfspannung genannt werden. Ungesättigter Dampf übt geringere Drucke aus. Alles dies gilt allgemein, für alle Flüssigkeiten.

Mit diesen Erkenntnissen war die Grundlage zum Verständnis aller Vorgänge der Verdampfung gegeben (Dalton 1803).

204. Vorgang bei der Verdunstung. — Nach der Kenntnis von der Bewegung der Moleküle im flüssigen und im Gaszustand (78) ist die Verdunstung offenbar ein Herausfahren von Molekülen aus der Flüssigkeitsoberfläche, so daß sie außerhalb der Wirkungsweite der zurückbleibenden Moleküle kommen und dadurch die kräftefreie, gradlinige Bewegung annehmen, mit den Zusammenstößen, wie es Gasmolekülen eigen ist. Die Durchsetzung der Flüssigkeitsoberfläche erfolgt gegen jene, alle Moleküle der Oberfläche ins Flüssigkeitsinnere ziehende Kraft, die wir bereits eingehend in der Mechanik betrachtet haben und die die Oberflächenspannung der Flüssigkeiten ergibt (M 317). Ein Molekül, dessen Be-

[1]) Zu größter Genauigkeit ist auch der Druck der kleinen Flüssigkeitssäule über dem Quecksilber und die Oberflächenspannung zu berücksichtigen.

wegung aus der Flüssigkeit heraus gerichtet ist und das die Oberflächenschicht von der Dicke der Wirkungsweite der Molekularkräfte (w Abb. 76 der Mechanik, Bd. I) durchsetzt, muß nach Maßgabe dieser Kraft (K) verlangsamt werden. Viele Moleküle werden dabei sogar zum Stillstand und zur Umkehr kommen, ehe sie ganz aus der Wirkungsweite der Molekularkräfte gekommen sind, nach deren Durchsetzung sie erst ganz befreit wären. Diese Moleküle können die Flüssigkeit nicht verlassen; es sind die schnellsten Moleküle, die am meisten zum Übertritt in den Dampfraum kommen.

Durch das vorzugsweise Austreten der schnellsten Moleküle muß die Wärmebewegung in der Flüssigkeit abnehmen, die Flüssigkeit muß kalt werden[1]). Dies ist der mit der Verdampfung unvermeidlich verbundene Verlust der später noch zu betrachtenden Verdampfungswärme (224 u. f.).

Ist der Dampfraum nicht sehr groß, wie bei dem Barometerversuch (203), so erfüllen die aus der Flüssigkeit fahrenden Moleküle schnell den Raum bis zu jenem Druck, den wir als Dampfspannung gemessen haben; die Plötzlichkeit des Auftretens dieses Druckes, bei beträchtlicher Größe desselben, ergibt das Explosionsartige des Vorganges.

205. Beharrender (stationärer) Zustand bei voller Dampfspannung über der Flüssigkeit. — Wenn die volle Dampfspannung (203) im Dampfraum eingetreten ist und somit der unverdampfte Flüssigkeitsrest in seiner Menge unverändert bleibt, ist doch die Verdampfung nicht zu Ende. Denn es ist kein Hindernis vorhanden gegen fortgesetztes Entweichen von Molekülen aus der Flüssigkeitsoberfläche; die Moleküle im Dampfraum bieten noch genug Zwischenräume zur Aufnahme weiterer Dampfmoleküle. Der Stillstand der Verdampfung bei erreichter, voller Dampfspannung ist nur scheinbar; er besteht darin, daß ebenso viele Moleküle aus dem Dampfraum in die Flüssigkeit zurückgehen als gleichzeitig aus der Flüssigkeit herausfahren. Es ist also kein Ruhezustand, sondern nur ein beharrender (stationärer) Bewegungszustand vorhanden; man kann das auch ein „dynamisches Gleichgewicht" zwischen Dampf und Flüssigkeit nennen. Erhöht man die Temperatur, d. i. die kinetische Energie der Moleküle, so erhalten mehr Flüssigkeitsmoleküle mit Übermittelgeschwindigkeit die Möglichkeit, entgegen den Molekularkräften zu entweichen; es stellt sich dann ein neues Gleichgewicht mit vergrößerter Dampfspannung ein (208).

206. Dampfspannung verschiedener Flüssigkeiten. — In Abb. 81, c und d, sind auch Barometer mit Alkohol und mit Wasser zu sehen. Die vorhandenen Flüssigkeitsreste zeigen, daß volle Dampfspannung vorhanden sein muß, und die Stände der Quecksilbersäulen zeigen, daß die Dampfspannung des Alkohols viel kleiner ist als die des Äthers und die des Wassers noch kleiner. Jede Flüssigkeit hat ihre besondere, in solcher Weise leicht ermittelbare Dampfspannung.

In der Größe der Dampfspannung hat man ein Maß für die „Flüchtigkeit" oder „Verdampfbarkeit" der betreffenden Flüssigkeit. Nach der Einsicht über den

[1]) Es verläßt hier Wärme einen Körper, der schon kälter sein kann als die Umgebung; aber die Wärme geht nicht etwa an einen wärmeren Körper (vgl. 111), sondern sie verschwindet als Wärme überhaupt ganz. Es wirkt also die Flüssigkeitsoberfläche zwar aussondernd für die schnellsten Moleküle; aber die Aussonderung ist vermöge der Molekularkräfte unvermeidlich mit dem Verlust der überschüssigen kinetischen Energie dieser Moleküle verbunden.

Vorgang der Verdunstung (204) ist zu erwarten, daß die Dampfspannung einer Flüssigkeit um so kleiner sein wird, je größer ihre Molekularkräfte sind, d. i. je größer ihre Oberflächenspannung ist. Dies trifft auch im Groben zu (vgl. Tab. 10, Bd. I); genau kann der Zusammenhang nicht gelten, weil die Oberflächenspannung kein einfaches Maß für die Molekularkräfte ist (M 341).

Wichtig ist die Kenntnis der Dampfspannung des Quecksilbers, das so oft als Sperrflüssigkeit benutzt wird. Diese Dampfspannung muß im Vakuum jedes Barometers vorhanden sein; sie ist aber nach der großen Oberflächenspannung des Quecksilbers sehr klein zu erwarten. Zur Ermittelung mußte dementsprechend auf einem Umweg verfahren werden. Es wurde der gesättigte Quecksilberdampf aus sehr großem, gemessenem Volum an Blattsilber verdichtet aufgefangen und gewogen[1]). Aus Gewicht und Volum ist der Druck berechenbar, wie bei einem Gas (211); das spezifische Gewicht bei 0° und 760 mm Druck ist aus dem Molekulargewicht bekannt (82), welches gleich dem Atomgewicht ist (114, 122). Man erhielt so für die Dampfspannung bei 20°C 0.0013 mm Quecksilbersäule, was in der Tat fast verschwindend wenig ist.

207. Auch feste Körper sind der Verdunstung ausgesetzt; den großen Molekularkräften entsprechend sind aber die Dampfdrucke meist noch viel kleiner als beim Quecksilber. Obgleich es nicht zu bezweifeln ist, daß alle festen Körper verdampfen können, so sind doch die zum Entweichen aus der Oberfläche nötigen Molekulargeschwindigkeiten bei gewöhnlicher Temperatur offenbar nur höchst selten vorhanden, weil zu weit über dem Mittel liegend. Das Fehlen nachweisbarer Gewichtsverluste auch in langen Zeiten und die durch elektrische Entladungen erkennbare Möglichkeit, dem vollständigen Vakuum in Gefäßen aus Glas bei Gegenwart von Metallen und auch anderen Körpern beliebig weit sich zu nähern, zeigen alle diese Körper einigermaßen hohen Schmelzpunkts bei gewöhnlicher Temperatur als so gut wie unverdampfbar. Bei manchen festen Körpern zeigt der für kleine Dampfmengen empfindliche Geruchssinn die Verdunstung an. Schnee und Eis kann man in dauernd kaltem Winter ohne Schmelzen, nur durch Verdampfen weniger werden sehen.

208. Dampfspannung und Temperatur. — Bei tiefen Temperaturen werden alle Dampfspannungen klein, um so mehr, als dann der Übergang in den festen Zustand stattfindet[2]); gegen den absoluten Nullpunkt hin verschwinden sie ganz. Mit steigender Temperatur steigen die Dampfspannungen erst langsam, dann immer zunehmend schneller an. Dieser Verlauf ist verständlich; beim absoluten Nullpunkt ruhen die Moleküle, mit steigender Temperatur erhalten sie nicht nur schnellere Bewegung, sondern zugleich auch größere Abstände, was die Molekularkräfte verringert.

Die Messung der Dampfspannungen bei verschiedenen Temperaturen ist meist sehr einfach. Man versieht Barometer, wie die der Abb. 81, mit Mänteln, mindestens am oberen Teil, die entsprechende Temperaturbäder aufnehmen können. Steigt die Dampfspannung bis zu 1 Atm. und darüber, so erhält die Vorrichtung die Gestalt von Abb. 82. Das unten umgebogene Quecksilberrohr ist am höheren Ende offen, um den ganzen Atmosphärendruck wirken zu lassen,

---

[1]) Die Fortführung des Dampfes von der Quecksilberoberfläche zum Blattsilber erfolgte durch einen Luftstrom, dessen große Langsamkeit die Sättigung sicherte. Die Anwesenheit der Luft ändert nichts an der Dampfspannung (214).

[2]) Beim Schmelzpunkt müssen Fest und Flüssig gleiche Dampfspannung haben, geschlossen nach der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile, das sonst in dauerndem Kreisen über Fest—Dampf—Flüssig—Fest, oder umgekehrt, gegeben wäre. Da aus dem festen Körper wegen seiner großen Molekularkräfte wohl unzweifelhaft weniger Dampfmoleküle entweichen als bei gleicher Temperatur aus der Flüssigkeit, ist aus der Gleichheit der Dampfspannungen zu schließen, daß am festen Körper auch weniger zurückkehrende Dampfmoleküle festgehalten, mehr reflektiert werden, als an der Flüssigkeitsoberfläche.

Unterhalb Schmelztemperatur ist — entsprechend den Molekularkräften — die Dampfspannung des festen Körpers kleiner als die der (unterkalteten) Flüssigkeit gleicher Temperatur.

am tieferen Ende ist es verschlossen; es enthält dort über dem Quecksilber die betreffende Flüssigkeit, aber keine Luft. Bei genügend tiefer Temperatur, z. B. Zimmertemperatur, füllen dort Flüssigkeit und Quecksilber ohne jeden freien Raum das Glasrohr aus; taucht man dann das Rohr in ein Bad höherer Temperatur, so entwickelt sich Dampf aus der Flüssigkeit, der sich Raum schafft, indem er das Quecksilber hoch drückt, wie es die Abbildung zeigt. Wieder ist hier die Grenze, bei welcher Stillstand eintritt, durch einen bestimmten, jeweils zur betreffenden Flüssigkeit und zur Temperatur des Bades gehörigen Druck gegeben, unabhängig von allen Nebenumständen, wie Dampfvolum, Form und Querschnitt des Rohres und dergl. (203). Der Druck wird in diesem Falle gemessen durch die Höhe h der Quecksilbersäule im Apparat, vermehrt um die an einem Barometer abzulesende Säulenhöhe des Luftdruckes.

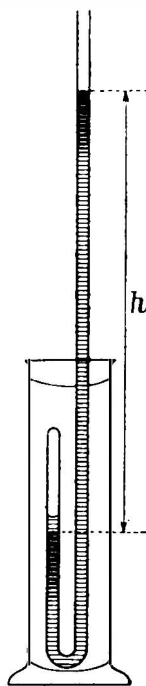


Abb. 82. Dampfspannung über 1 Atm.

209. Dampfspannungstabellen. — In dieser Weise sind für sehr viele Flüssigkeiten die Dampfspannungen bei so vielen verschiedenen Temperaturen ermittelt worden, daß der ganze Verlauf für alle beliebigen Temperaturen interpoliert werden kann[1]). Diese Kenntnis ist zusammengefaßt in den Dampfspannungstabellen, von welchen Tab. 32 Beispiele für 5 verschiedene Flüssigkeiten zeigt. Die kleineren Drucke sind in mm Quecksilber, die großen in Atm. angegeben. Man sieht, daß bei genügend hohen Temperaturen die Dampfspannungen aller Flüssigkeiten, so verschieden sie sind, zu sehr hohen Beträgen steigen, beim Wasser beispielsweise von nur 4·6 mm Quecksilber bis zu Hunderten von Atmosphären. Alkohol und Äther, die schon betrachteten flüchtigeren Flüssigkeiten (206), haben bei jeder Temperatur entsprechend höhere Dampfspannungen. Quecksilber steigt auch von den so schwer ermittelbaren kleinen Drucken (206) der niederen Temperaturen bis über die volle Atmosphäre, wenn auch der starke Anstieg hier erst über 100° beginnt. Besonders bemerkenswert ist das letzte Beispiel der Tabelle: Kohlensäure, von Anfang nicht als Dampf flüssiger Kohlensäure, sondern als Gas bekannt, wohl aber — wie jedes Gas — als Verdampfungsergebnis seiner Flüssigkeit betrachtbar; man sieht, daß flüssige Kohlensäure entsprechend ihrer sehr starken Flüchtigkeit schon bei 0° sehr hohen Dampfdruck hat.

210. Umfassende Wichtigkeit der Dampfspannungstabelle. — Die Dampfspannungstabelle gibt zunächst den Druck gesättigten Dampfes der Flüssigkeit für jede Temperatur an; sie ist dadurch — wie sogleich noch zu erläutern — für alle Hauptzüge des Verhaltens des betreffenden Dampfes maßgebend. Darüber hinaus aber ist sie auch — wie der Reihe nach zu zeigen — bestimmend für alle Fragen der Verwandlung von Flüssigkeit in Dampf und umgekehrt, für alle Verdunstung, für das Sieden, für Wiederverdichtung (Kondensation) von Dämpfen und für Verflüssigung der Gase. Die Dampfspannungstabelle ist so, richtig verstanden, eine große Kenntnis-Zusammenfassung.

[1]) Über die Möglichkeit, Dampfspannungen aus Verdampfungswärme und anderen Daten zu berechnen, s. 256.

Tab. 32. **Dampfspannungstabellen.**

Temp.	Wasser	Alkohol	Äther	Quecksilber	Kohlensäure
0°C	4·6 mm	13 mm	185 mm	0·00019 mm	35·5 Atm.
5	6·5				
10	9·1	24	292	0·00050	46
15	12·7				
20	17·4	44	440	0·0013	58
30	31·5	78	648		72
40	54·9		910		
50	92·0	220		0·013	
70	233·3	541			
80	355·2	812	3·8 Atm.		
90	525·9				
95	634·0	1·9 Atm.			
99	733·3				
100	760·0 = 1 Atm.	2·2	6·5	0·29	
101	787·5				
120	2·0	4·2	10		
130	2·8				
180	9·9		37	11·0	
250	39·4	64		75·8	
350	167			663·2	
365	196			866·0	

211. Dämpfe und Gase. — Neigt man das etwa mit Alkohol beschickte Barometer a, Abb. 83, in die Lage b, so bleibt dabei das obere Ende der Quecksilbersäule in derselben Horizontalebene h h, zum Zeichen, daß der Druck des eingeschlossenen Dampfes D unverändert derselbe bleibt, obgleich sein Volum abgenommen hat. Dies gilt auch noch weiter, gegen die Lage c hin, solange als überhaupt noch ein Dampfvolum da ist, sei es noch so klein; erst wenn, in der Lage c, aller Dampf verschwunden ist, tritt Senkung der Quecksilberkuppe ein.

Diese Unveränderlichkeit des Druckes gesättigten Dampfes bei gleichbleibender Temperatur entspricht auch ganz den Erfahrungen, von welchen wir ausgegangen waren (203), und zwar ist der Druck je nach der Temperatur durch die Dampfspannungstabelle gegeben.

Das Auffallende ist dabei aber der große Unterschied im Verhalten des Dampfes, verglichen mit dem Verhalten von Gasen. Ein über dem Quecksilber abgeschlossenes Gas würde bei Volumverkleinerung die Druckvergrößerung zeigen, welche Boyles und Mariottes Gesetz entspricht; der Dampf tut dies aber nicht. Das Gas richtet seinen Druck nach jenem Gesetz ein; der Druck des Dampfes folgt nur der Dampfspannungstabelle nach alleiniger Maßgabe der Temperatur.

Trotz dieser Verschiedenheit des Verhaltens von Gasen und von Dämpfen muß doch ein Übergang zwischen beiden stattfinden; denn alle Flüssigkeiten

können vergast und alle Gase verflüssigt werden, beides mit Durchschreitung des Dampfzustandes.

Der gesuchte Übergang von Dampf zu Gas ist meist ziemlich schroff. Mit Dampfeigenschaften, d. i. mit der Dampfspannungstabelle ist zu rechnen, wenn beim Dampfe auch gleichzeitig seine Flüssigkeit vorhanden ist oder wenn sie ohne Änderung von Druck und Volum hinzugebracht werden kann, d. i. wenn der Dampf „gesättigt" ist (204); ist dies aber nicht der Fall, ist der Dampf ungesättigt, so kann mindestens angenähert mit den Gasgesetzen von Boyle und Gay-Lussac gerechnet werden.

Man kann diesen Übergang von Dampf zu Gas am Alkohol-Barometer, Abb. 83, sehr gut beobachten, wenn es eine genügend tiefe Quecksilberwanne hat (etwa wie Abb. 90, Bd. I) und zugleich ein entsprechend langes Rohr. Hebt man dann das Rohr allmählich höher aus dem Quecksilber heraus, so sieht man zunächst die Quecksilberkuppe im Rohr noch immer in der gleichen Höhe h h über der unteren Quecksilberoberfläche bleiben; der Dampf behält also trotz Volumvergrößerung seinen Druck bei, wie es der Dampfspannungstabelle entspricht, weil er gesättigt bleibt. Die Flüssigkeit im Rohr wird dabei immer weniger, sie geht zunehmend in den Dampfzustand über, entsprechend der Vergrößerung des Dampfraumes. Ist aber beim Heben des Rohres der letzte Rest der Flüssigkeit verdampft, so folgt sofort ein Steigen des Quecksilbers im Rohre über h h hinaus zum Zeichen, daß jetzt mit der Volumvergrößerung Druckabnahme verbunden ist, wie bei einem Gase; man hat jetzt ungesättigten Dampf, d. i. Gas.

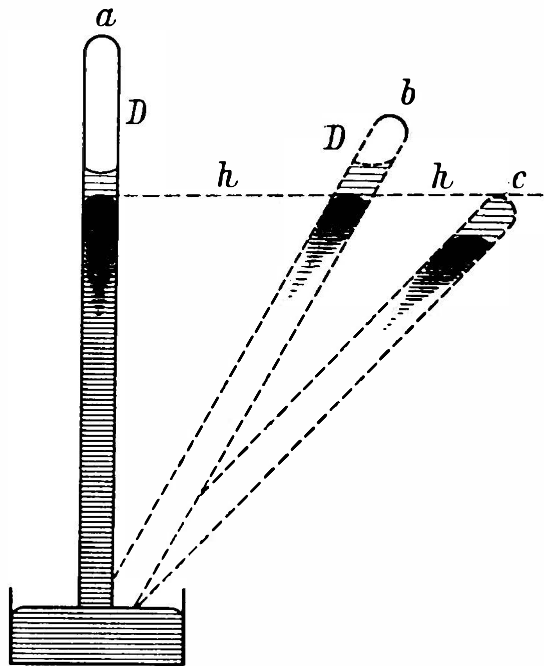


Abb. 83. (Gesättigter) Dampf folgt nicht den Gasgesetzen (sondern der Dampfspannungstabelle).

Es empfiehlt sich, um Namen gut mit Eigenschaften verbunden zu haben, den Namen „Dampf" nur für gesättigten Dampf zu benutzen, ungesättigten Dampf aber lieber Gas zu nennen.

Sieht man in irgendeinem vorliegenden Falle Dampf zusammen mit seiner Flüssigkeit im Gleichgewicht (205), so weiß man sogleich, es mit richtigem, gesättigtem Dampf zu tun zu haben; die Dampfspannungstabelle gibt dann je nach der Temperatur sogleich den Druck im Dampfraum an. Ist Flüssigkeit nicht vorhanden, kennt man aber Temperatur und Druck des Dampfes, so ist die Entscheidung auch ohne Probeeinbringung von Flüssigkeit einfach: ist der

Druck gleich dem, welchen die Dampfspannungstabelle für die betreffende Temperatur angibt, so hat man gesättigten Dampf, ist er kleiner, so hat man Gas. Beispielsweise muß Wasserdampf von 20°C weniger als 17.4 mm drücken, um mit Annäherung als Gas behandelt zu werden. Kohlensäure bei 20° kann aber 1 Atm. drücken, also ein offenes Gefäß füllen, und hat doch Gaseigenschaft; erst bei 58 Atm. wäre sie Dampf.

212. Dämpfe in Räumen von uneinheitlicher Temperatur. — In allem vorigen ist stets der einfache Fall einheitlicher Temperatur des Dampfraumes angenommen. Sind Temperaturunterschiede vorhanden, so gilt die Regel: daß der kälteste Punkt des Raumes bestimmend ist für den Druck im ganzen Raume, sobald nur an diesem Punkte Verflüssigung eintritt. Denn es kann dann an diesem Punkte nur der der Dampfspannungstabelle entsprechende Druck vorhanden sein, und ein anderer Druck ist bei Ruhezustand des Dampfes auch in den anderen Teilen des Raumes nicht möglich[1]. Ist freilich in wärmeren Teilen des Raumes ebenfalls Flüssigkeit vorhanden, so ergibt die Dampfspannungstabelle dort einen entsprechend höheren Druck, und es kann daher der Dampf nicht in Ruhe sein, sondern er muß, dem Druckgefälle nach, vom wärmeren nach dem kälteren Teil hinströmen. Am ersteren Teil findet dann stets Verdampfung, am letzteren stete Verflüssigung statt („Destillation"), solange bis der warme Teil trocken geworden ist, worauf Ruhe und überall der dem kältesten Punkt entsprechende Druck eintritt.

213. Zusammenfassung von Gas- und Dampfeigenschaften. — Gase folgen dem einfachen Gesetz von Boyle und Gay-Lussac, $pV = RT$, nur, wenn sie genügend verdünnt sind (Gl. 38). Kommt die Dichte einigermaßen nahe der der Flüssigkeit, so werden Abweichungen merklich, die in van der Waals Gleichung, $(V-b)(p+a/V^2) = RT$ zusammengefaßt sind (Gl. 39). Wir haben diese Abweichungen und ihre Darstellung durch diese Gleichung schon in der Mechanik behandelt (M 360); hier ist nun zu zeigen, daß die Gleichung auch den Übergang des Gases in den Dampfzustand und flüssigen Zustand darstellt. Es ist verständlich, daß dies möglich ist; denn die in der Gleichung außer dem Druck p, dem Volum V, der absoluten Temperatur T und der Konstanten R vorkommenden Größen a und b, welche die Molekularkräfte und das Eigenvolum der Moleküle des betreffenden Stoffes bemessen (M 360), haben auch für die Verflüssigung und die Flüssigkeit selbst ihre Bedeutung. Es müssen daher diese selben Größen a und b auch für die Dampfspannungstabelle maßgebend sein, und das Folgende zeigt, in welcher Weise dies mittels der Gleichung der Fall ist. Wir betrachten hierbei auch schon manches über Gasverflüssigung in der durch die Gleichung gegebenen Zusammenfassung, was später noch eingehender im einzelnen zu behandeln sein wird (238 u. f.).

Man untersucht die Gleichung am besten in Liniendarstellung, welche für das Beispiel der Kohlensäure in Abb. 84 ausgeführt ist. Abszisse ist das Volum V, Ordinate der Druck p, und es ist für jede angenommene Temperatur T eine Linie nach Maßgabe der Gleichung gezogen. Da die Gleichung in V dritten Grades ist, sind das Linien dritten Grades. Die für jede Linie angenommene Temperatur ist (in °C) am rechten Rande der Zeichnung angegeben. Um die einzelnen Linien in ihrer Bedeutung zu erfassen, mag man an der Grundlinie (Abszissenachse) einen Zylinder liegend denken, der zwischen seinem links bei 0 verschlossenen Ende und einem in ihm verschiebbaren Kolben 1 gr Kohlensäure enthält. Jeder Stellung des Kolbens längs der Grundlinie entspreche das dort angegebene Zylindervolum; die über dem Kolben stehende Ordinatenhöhe gibt dann den Druck im Zylinder in Atm. an.

Beginnen wir mit den Temperaturen 50°C und 40°C, so erhalten wir die beiden, schon in der Mechanik betrachteten verbogenen Hyperbeln (M 360). Die Kohlensäure ist hier Gas; sie wird bei keiner Kolbenstellung flüssig, zeigt nur die den Verbiegungen der Hyperbeln entsprechenden Abweichungen von Boyles und Mariottes Gesetz. So hohe Temperaturen kommen in der Dampfspannungstabelle der Kohlensäure (Tab. 32) auch nicht vor; man kann das Kohlensäuregas dementsprechend auch einen „überhitzten Dampf" nennen (vgl. 239).

Bei 30°C (genauer 31°, 3. Linie von oben in der Abb. 84) tritt ein Punkt K mit horizontaler

---

[1] Von der auf Dämpfe wie Gase geringen Schwerkraftwirkung (M 350) sowie von anderen äußeren Kräften sehen wir hier immer ab.

Tangente an der Linie auf; die Abweichung von der dem Gasgesetz entsprechenden Hyperbelform ist hier schon sehr weit gediehen[1]).

Bei den noch tieferen Temperaturen (20°C, 10°C, —20°C; 4., 5. und 6. Linie der Abbildung) machen die Linien Ausbuchtungen nach unten, z. B. b c d e oder b_1 c_1 d_1 e_1, vor dem letzten, steilen Anstieg; die Ausbuchtung der untersten Linie der Abbildung (—20°C) überschreitet sogar weit den Zeichnungsrahmen.

Zieht man nun horizontale gerade Linien a c e, a_1 c_1 e_1, in solcher Höhenlage, daß dieselben ebensoviel Fläche mit der krummen Linie über sich als unter sich lassen (Fläche abca = cedc, $a_1b_1c_1a_1 = c_1e_1d_1c_1$), so geben die Höhenlagen dieser Geraden richtig die Dampfspannungen an, welche zu den betreffenden Temperaturen nach der Dampfspannungstabelle (Tab. 32) gehören.

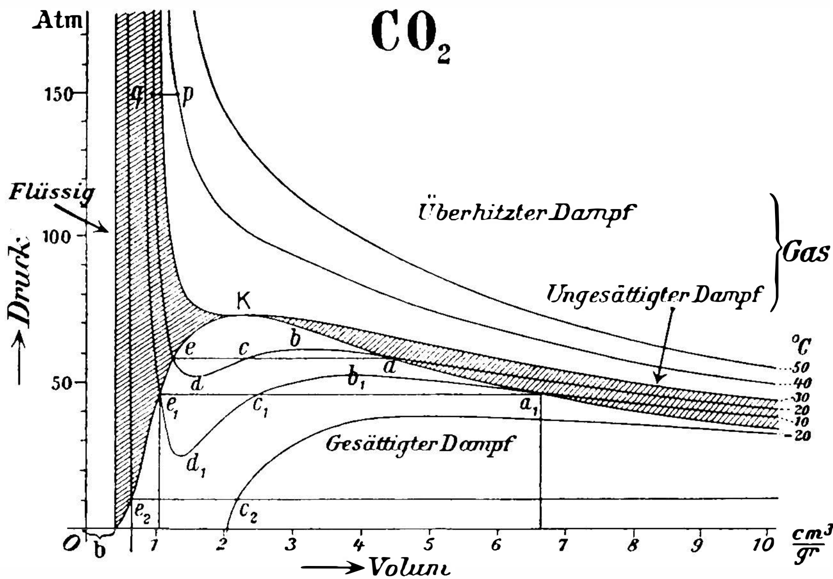


Abb. 84. Kohlensäure nach van der Waals.

Demnach ist in den Linien unterhalb 30°C folgender Verlauf abgebildet: Verkleinert man das Volum von 1 gr Kohlensäure bei 20° oder 10°C allmählich, ausgehend von sehr großem Anfangsvolum, so steigt der Druck allmählich an, wie es die betreffenden Linien von rechts her bis zu den Punkten a oder a_1 angeben; die Form der Linien ist bis dahin fast die von Hyperbeln mit horizontaler und vertikaler Asymptote; die Kohlensäure verhält sich bis dahin als Gas; sie ist ungesättigter Dampf. Von a (oder a_1) aus kann bei weiterer Volumverkleinerung der Druck steigen, wie es die Linie von a nach b (oder a_1 nach b_1) angibt (230). Der gewöhnliche Verlauf geht aber von a (a_1) aus auf der geraden Linie über c (c_1) nach e (e_1); denn die Kohlensäure ist bei den durch die Höhen der geraden Linien angegebenen, der Dampfspannungstabelle entsprechenden Drucken eben gesättigter Dampf geworden, dessen Druck bei Volumverkleinerung nicht steigt, sondern auf der gleichen Höhe bleibt, bis alles verflüssigt ist, was beim Punkte e (e_1) eintritt. Es ist dies der an Abb. 83 schon betrachtete Verlauf bei Neigung des Barometerrohrs von a bis c (211). Wird jetzt, nach vollständiger Verflüssigung, das Volum noch weiter verkleinert, so steigt der Druck sehr steil an, wie es die von e (e_1, e_2) an nach aufwärts laufenden Linien angeben

[1]) Die Besonderheit des („kritischen") Punktes K und der mit ihm verbundenen Erscheinungen (239) macht ihn sehr geeignet zur Ermittelung der Konstanten a und b in van der Waals Gleichung. Es ist dazu nur die Messung zweier der drei zu K gehörigen Größen T, p und V erforderlich, was meist weniger Schwierigkeit hat als die Ermittelung der Abweichungen von Boyles und Mariottes Gesetz im überhitzten Zustand. Die Größe R in der Gleichung ist von vornherein bekannt (38).

und wie es der geringen Kompressibilität der flüssigen Kohlensäure entspricht. Kleiner als b wird das Volum bei keinem Druck, insofern die Moleküle gegenseitig undurchdringlich sich zeigen.

Man sieht, daß die Gesamtfläche der Zeichnung, welche das Verhalten des betrachteten Stoffes unter allen Umständen — flüssig, wie gasförmig — darstellt, durch die zu K gehörende Linie geteilt wird in das rechts oben liegende Bereich des überhitzten Dampfes und in das unten liegende dreifache Bereich der Flüssigkeit (schraffiert), des gesättigten Dampfes und des ungesättigten Dampfes (ebenfalls schraffiert). Das Bereich des gesättigten Dampfes ist begrenzt durch die Hilfslinie e_2 e_1 e K a a_1.

Der Sinn der Gleichheit der Flächenstücke ober und unter den geradlinigen Strecken a e(a_1 e_1) ist jetzt ersichtlich. Wenn diese Flächenstücke gleich groß sind, so ist auch die Fläche, welche senkrecht unterhalb der krummen Linie abcde ($a_1b_1c_1d_1e_1$) bis zur Abszissenachse liegt, gleich der Fläche unter der geraden Linie ace ($a_1c_1e_1$). Jede dieser beiden Flächen bemißt aber die Arbeit[1]), welche beim Zusammendrücken des Dampfes bis zur vollständigen Verflüssigung zu leisten ist und welche beim umgekehrten Vorgang wieder gewonnen werden kann; die eine Fläche bemißt die Arbeit auf dem gekrümmten Wege, die andere auf dem geraden Wege. Wären die beiden Arbeiten nicht gleich groß, so könnte durch Verflüssigung auf dem einen Wege und Wiederverdampfung auf dem anderen Wege dauernd Arbeit gewonnen werden, was ein Perpetuum mobile gäbe und damit aller Erfahrung widerspräche (112). Es wäre also zu schließen, daß die beiden Flächen gleich groß sein müssen, vorausgesetzt, daß der gedachte Vorgang auf beiden Wegen auch möglich ist, andernfalls der zugrundeliegende Gedankenversuch unerlaubt und der Schluß wertlos wäre (vgl. M 86). Die Richtigkeit des Schlusses — erwiesen durch die Übereinstimmung der Flächengleichheit mit der Dampfspannungstabelle — läßt umgekehrt die Verwirklichungsmöglichkeit auch des gekrümmten Weges annehmen[2]).

214. Verdunstung in gaserfüllten Raum. — Wenn eine Flüssigkeit nicht ins Vakuum verdunstet — wie bisher angenommen —, sondern in ein über ihrer Oberfläche befindliches Gas, so bleibt doch wieder die Dampfspannungstabelle ausschlaggebend.[3]) Es entwickelt sich Dampf bis zu demjenigen Druck, welchen die Dampfspannungstabelle als zur Temperatur der Flüssigkeitsoberfläche gehörig angibt, wie im Vakuum, und dieser Dampfdruck addiert sich zum Drucke des vorhandenen Gases.

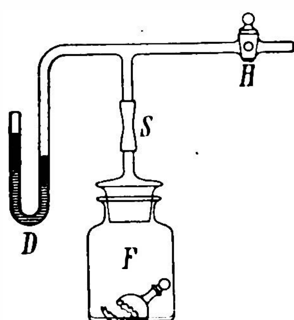


Abb. 85. Dampfspannung in gaserfülltem Raum.

Dies läßt sich mit der Flasche F (Abb. 85) zeigen, die trockene Luft und ein sehr dünnwandiges, verschlossenes Gläschen voll Alkohol enthält. Der Stöpsel der Flasche verbindet deren Inneres mit dem Druckzeiger D und dem Hahn H. Ist H zunächst offen, so steht das Quecksilber im Druckzeiger auf Gleich, was 1 Atm. Druck in der Flasche bedeutet. Schließt man dann den Hahn H, so ändert das nichts. Wenn aber nun die Flasche geschüttelt

[1]) Arbeit bei Gasvolumänderung dV ist stets das Produkt dieser Änderung mit dem Drucke p, pdV (M 378). Dies ist aber der senkrechte Streifen der Fläche von der Breite dV, und die ganze, aus solchen Streifen zusammengesetzte Fläche ist die ganze Arbeit, welche zum Linienstück gehört, das die Fläche oben begrenzt.

[2]) Die Verwirklichung bestünde von e (e_1) bis d (d_1) in „überhitzter" Flüssigkeit (221) ohne Verdampfung, von d (d_1) bis b (b_1) in schnellem Versieden der Flüssigkeit unter Druckzunahme, und von b (b_1) bis a (a_1) in „unterkühltem" („übersättigtem") Dampfzustand (230).

[3]) Sehr kleine Änderungen in den Angaben der Dampfspannungstabelle treten ein, weil der Druck des Gases über der Flüssigkeit deren Molekülabstände und damit auch Molekularkräfte ein wenig ändert, was Einfluß auf die Dampfspannungen haben muß. Der Einfluß kann ähnlich berechnet werden wie der Druckeinfluß auf Schmelzpunkte (200); bei sehr hohen Drucken kann er unmittelbar merklich werden.

wird, was bei festgehaltenem Druckzeiger wegen des Schlauchstücks S möglich ist, so daß das Gläschen zerbricht und also der Alkohol zur Verdunstung frei wird, so steigt das Quecksilber im Druckzeiger, wie es die Abbildung zeigt, auf denjenigen Druck, welcher nach der Dampfspannungstabelle des Alkohols zur Temperatur in der Flasche gehört (z. B. 24 mm Quecksilber bei 10°C).

Dieses sehr einfache Verhalten ist unmittelbar verständlich, wenn man bedenkt, daß die Gasmoleküle keine andere Wirkung auf die Dampfmoleküle haben als etwa Moleküle fester Gefäßwände, nämlich die der Reflexion.

Da hiernach der Druck, bis zu welchem der Alkohol in die Luft verdampft, derselbe ist wie bei Verdampfung ins Vakuum, so ist auch die Dampfmenge, welche einen gegebenen Raum bei Sättigung erfüllt, dieselbe, ob Luft im Raum ist oder ob nicht. Man sollte daher den Ausdruck: „Sättigung der Luft mit Dampf" als leicht irreführend vermeiden und besser von „Sättigung des Raumes" oder „Volums" reden.

Öffnet man nach dem beschriebenen Versuch den Hahn H, so daß Druckausgleich zwischen innen und außen eintritt, so werden außen die — sagen wir — 760 mm Barometersäule von Luft gedrückt, innen aber werden 24 mm von Alkoholdampf gedrückt und nur der Rest von Luft. So ist es auch in jeder offenen Aufbewahrungsflasche irgendeiner Flüssigkeit oder an freien Flüssigkeitsoberflächen in der Luft; man kann je nach der Temperatur und der Dampfspannungstabelle immer angeben, wie der vorhandene Gesamtdruck zwischen Luft und Dämpfen sich teilt.

Es können auch mehrere Dämpfe gleichzeitig in der Luft vorhanden sein; ihre Drucke sind nicht nur stets Summanden des Gesamtdrucks, sondern sie können bei Sättigung einzeln den Dampfspannungstabellen entnommen werden.

Anders ist es selbstverständlich dann, wenn die Moleküle der Dämpfe aufeinander oder auf die gleichzeitig vorhandenen Gasmoleküle besondere Wirkungen ausüben, sei es chemische Wirkung oder auch nur die Bildung komplexer Moleküle. Letzteres ist sehr häufig der Fall; die Dampfspannung kann dann kleiner sein als es den Dampfspannungstabellen entspräche. Beispielsweise erhält man beim vorbeschriebenen Versuch (Abb. 85) einen verkleinerten Dampfdruck des Alkohols, wenn die Flasche F Spuren von Wasser enthielt, weil Wasser- und Alkoholmoleküle miteinander Komplexe bilden (vgl. M 29), die unverdampfbarer sind als die Einzelmoleküle.

Solche Komplexbildung macht auch die Dampfspannungen von Lösungen kleiner als die des Lösungsmittels, worauf wir bei den Siedepunkten der Lösungen zurückkommen (223).

215. Verdunstungsgeschwindigkeit. — Ein sehr großer Unterschied zwischen der Verdunstung ins Vakuum und der in gaserfüllten Raum besteht in der Geschwindigkeit, mit der der Endzustand der Sättigung erreicht wird. Im Vakuum durchfahren die aus der Flüssigkeit entweichenden Dampfmoleküle mit ihren großen Geschwindigkeiten ohne Hindernis den verfügbaren Raum und verbreiten sich schnell in ihm, wie es die explosionsartige Verdunstung des Äthers ins Vakuum zeigte (203). Ist aber Gas von einigem Druck über der Flüssigkeit vorhanden, so stoßen die aus der Flüssigkeit kommenden Dampfmoleküle an die Gasmoleküle, und sie können nur in kleinen freien Weglängen weiter sich verbreiten, durch Diffusion (M 366), was ein sehr langsamer Vorgang ist. Es wird daher zunächst nur die nächste Umgebung der Flüssigkeitsoberfläche gesättigt; dies verhindert aber die weitere Verdunstung, deren Fortschreiten somit ganz an das Fortschreiten der Diffusion gebunden ist.

Anders ist es nur, wenn das Gas über der Flüssigkeit in Bewegung ist; es kann dann aller neu gebildete Dampf mit der Geschwindigkeit des Gasstromes von der Oberfläche fortgeführt werden, was ebenso schnelles, weiteres Fortschreiten der Verdunstung ermöglicht. Luftbewegung fördert in dieser Weise die Verdunstung im Luftraum. Gesättigt wird dabei nur ein gewisses, zu allernächst der Flüssigkeitsoberfläche vorbeibewegtes Volum, das ein um so kleinerer Bruchteil des ganzen Luftvolums ist, je schneller der Luftstrom ist; die durchgemischte, von der Flüssigkeitsoberfläche abströmende Luft wird daher im allgemeinen nur ungesättigten Dampf enthalten können.

216. Wasserdampf in der Erdatmosphäre. — Alle Wasseroberflächen der Erde sind in steter Verdunstung begriffen. Die bewegte Luft trägt den Wasserdampf fort, wie soeben betrachtet, und führt ihn auch bis in große Höhen, wo er bei der dortigen tiefen Temperatur (162) nach der Dampfspannungstabelle Sättigung erreicht und daher Wolken bildet (229).

Ist beispielsweise unten die Lufttemperatur 20°C, so könnte 17·4 mm Dampfdruck vorhanden sein, was Sättigung entspräche (Tab. 32); bei einiger Luftbewegung ist aber der Dampfdruck in der aufsteigenden Luft vielleicht nur 6.5 mm, was Sättigung bei 5°C gäbe, welche Temperatur erst in rund $100 \cdot (m/^0C) \cdot (20^0-5^0) = 1500\,m$ Höhe[1]) erreicht wird. In dieser Höhe muß dann, wenn der aufsteigende Luftstrom sie erreicht, die untere Wolkengrenze sein, und über dieser Höhenschicht kann sich der Wolkenhaufen auftürmen.

Angaben über den Wasserdampfgehalt („Feuchtigkeitsgehalt") der Luft werden auf zweierlei Weise gemacht. Entweder in gr je m³ Luft („absolute Feuchtigkeit") oder in Hundertteilen der Sättigung („relative Feuchtigkeit"). Zur Ermittelung dienen mehrere Verfahren, die grundsätzlich Neues nicht bieten. Nur eines davon sei genannt; es benutzt den „Taupunkt". Dies ist diejenige Temperatur, bei welcher die in der Luft vorhandene Wasserdampfmenge Sättigung ergibt. Ist schon Sättigung vorhanden, so fällt der Taupunkt mit der Lufttemperatur zusammen; in allen anderen Fällen muß er unterhalb der Lufttemperatur liegen. Man ermittelt ihn, indem man ein mit blanker, spiegelnder Außenfläche versehenes Gefäß, das Flüssigkeit (z. B. Äther) und ein Thermometer enthält, allmählich kühlt (z. B. durch Verdunstung des Äthers); ist der Taupunkt erreicht, so erscheint an der Außenfläche des Gefäßes ein trübender Wasserbeschlag, in welchem Augenblicke die Temperatur des Gefäßes abzulesen ist. Wird beispielsweise als Taupunkt 5°C gefunden, so ist nach der Dampfspannungstabelle 6.5 mm Wasserdampfdruck vorhanden. Aus dem so ermittelten Druck wird (mit Temperatur und spezifischem Gewicht des Wasserdampfes) auch leicht das in 1 m³ Luft enthaltene Wassergewicht (die absolute Feuchtigkeit) berechnet[2]). Die bei Sättigung mögliche Höchstmenge des Wassers im m³ wird in gleicher Weise nach der vorhandenen Lufttemperatur und der Dampfspannungstabelle berechnet, wonach auch der vorhandene Sättigungsbruchteil (die relative Feuchtigkeit) berechenbar ist[3]).

---

[1]) Siehe Anhang W II, 4.

[2]) Man findet dieses Wassergewicht stets nahe durch dieselbe Zahl gegeben, wie den Druck; im obigen Falle (6·5 mm Druck) ist es 6·8 gr/m³.

[3]) Ist z. B. die Lufttemperatur 20°C, so wäre der Sättigungsdruck 17·4 mm, die Sättigungsmenge 17·3 gr/m³, was mit einer vorhandenen Menge von 6·8 gr/m³ die relative Feuchtigkeit $100 \cdot 6{\cdot}8/17{\cdot}3 = 39{\cdot}3$ v. H. ergibt.

b) Sieden.

217. Vorgang beim Sieden. — Die für das Sieden charakteristische Entwickelung von Dampfblasen aus dem Inneren der Flüssigkeit setzt an geringen Gasbläschen oder Gasschichten an, die an den Gefäßwänden oder an schwebenden Partikeln in der Flüssigkeit fast immer vorhanden sind[1]). In diese kleinen Gasmengen hinein verdunstet die Flüssigkeit, wie an jeder freien Oberfläche. Bei niederen Temperaturen bleibt dies ohne merkliche Folgen; wenn aber die Temperatur gesteigert wird, steigt auch der Dampfdruck in den kleinen Gasräumen, und wenn die Temperatur so hoch ist, daß der Dampfdruck dem von außen her auf die Gasräume lastenden Druck gleich wird oder ihn um nur sehr wenig übersteigt, so dehnen sich diese vorher meist unsichtbar kleinen Räume und werden zu Dampfblasen, die infolge Auftriebs aufsteigen.

218. Siedepunkt. — Siedet eine Flüssigkeit in gewöhnlichem, offenem Gefäß, so ist der äußere Druck in der Hauptsache der Atmosphärendruck. Die Temperatur, bei welcher das Sieden eintritt — der „Siedepunkt" der Flüssigkeit — ist daher gewöhnlich diejenige Temperatur, bei welcher die Dampfspannung der Flüssigkeit gleich 1 Atm. ist. Der Siedepunkt kann daher aus der Dampfspannungstabelle abgelesen werden.

Daß der Siedepunkt des Wassers zu 100° sich zeigt, ist selbstverständlich, weil der Thermometerfixpunkt 100° vom Siedepunkt des Wassers beim normalen Barometerstand genommen ist (5).

Bei Alkohol zeigt die Dampfspannungstabelle (Tab. 32) den Siedepunkt zwischen 70° und 80° gelegen, bei Äther zwischen 30° und 40°, bei Quecksilber zwischen 350° und 365°; Kohlensäure muß tief unter 0° sieden. Tab. 33 zeigt das Genauere auch für andere Stoffe. Der Siedepunkt des flüssigen Heliums liegt nur rund 4° über dem absoluten Nullpunkt. Metalle, wie Blei, sieden sehr hoch.

Tab. 33. **Siedepunkte bei 760 mm Druck.**

	°C	°abs.		°C
Helium	— 268·8	4·2	Wasser	100·0
Wasserstoff . .	— 252·8	20·2	Anilin	184·1
Stickstoff. . . .	— 196		Quecksilber . .	356·7
Sauerstoff . . .	— 183·0		Schwefel . . .	444·5
Kohlensäure . .	— 78		Zink	930
Äther	+ 34·5		Blei	1500
Alkohol	78·4			

Zur Siedepunktsbeobachtung siehe 221.

219. Siedepunkt und Druck. — Der Siedepunkt ist keine so absolute Konstante des Stoffes wie es der Schmelzpunkt ist (200); schon geringe Änderungen des Barometerstandes beeinflussen merklich den Siedepunkt, wie es die Dampfspannungstabellen zeigen; bei Wasser geben etwa 27 mm Druckänderung 1° Siedepunktsänderung. Auf Alpengipfeln, wo der Barometerstand 400 mm sein kann, siedet Wasser schon wenig über 80°C. In einem Dampfkessel von 10 Atm. Druck ist der Siedepunkt rund 180°.

[1]) Was bei Gasmangel eintritt, betrachten wir später (221).

Sehr hohe Drucke finden sich im Erdinneren; bei den Geysern werden sie durch überstehende, von großer Tiefe bis zur Erdoberfläche reichende Wassersäulen ausgeübt, die oben in Wasserbecken münden. Ist dann durch Wärmezufuhr aus dem Erdinnern der in der Tiefe sehr erhöhte Siedepunkt erreicht und beginnt dort Dampfentwickelung, so kann ein Teil der drückenden Wassersäule durch Dampf verdrängt und ersetzt werden, was Entlastung, damit Senkung des Siedepunktes und heftiges Aufkochen des nun weit überhitzten Wassers zur Folge hat. Dieses unterirdische Aufkochen liefert die dampfende Wassersäule des Geyserausbruchs, verbraucht aber auch Verdampfungswärme (224) und führt damit zum Stillstand des Ausbruches. Der Schlund des Geysers füllt sich dann wieder mit Wasser; der nächste Ausbruch kann erst folgen, wenn die verbrauchte Wärme aus dem Erdinneren nachgeliefert ist. Darin liegt die Erklärung der auch sonst für vulkanische Erscheinungen charakteristischen Periodizität.

Bei stark vermindertem Luftdruck, in teilweise ausgepumpten Gefäßen, ist das Sieden ganz von der Höhe der vorhandenen Flüssigkeitsschicht abhängig, weil hier hauptsächlich diese den am Boden des Gefäßes vorhandenen Druck bestimmt[1]).

220. Sublimation. — Wird der Druck, unter welchem eine Flüssigkeit steht, genügend vermindert, so kann der Siedepunkt — wie die Dampfspannungstabelle zeigt — beliebig erniedrigt werden; er kann daher auch unter den Schmelzpunkt des betreffenden Stoffes kommen. Dies ist bei Kampfer, bei fester Kohlensäure und fast auch bei Jod sogar schon beim gewöhnlichen Druck von 1 Atm. der Fall[2]). Erhitzt man daher einen solchen Stoff in festem Zustande bei Atmosphärendruck, um ihn zu schmelzen, so verweigert er das Schmelzen, indem er sofort verdampft; der Dampf kann dann an kälteren Stellen gleich wieder feste Form annehmen. Man nennt solche Körper „sublimierend". Will man sie flüssig sehen, so muß man den Druck erhöhen, um den Siedepunkt über den Schmelzpunkt zu bringen.

Bei genügend niedrigem Druck, im Vakuum, können alle unzersetzlichen festen Körper, z. B. auch Metalle, sublimiert werden, wenn für genügende Dampfabfuhr gesorgt ist, z. B. durch Kühlung eines Teils des Gefäßes, wo dann Wiederverfestigung des Dampfes stattfindet.

Bei Übereinstimmung von Siedepunkt und Schmelzpunkt ist die Dampfspannung des festen Körpers gleich dem zugehörigen äußeren Druck (vgl. die Note zu 208); es verdrängt dann der verdampfende feste Körper seine Gasumgebung gleich einer siedenden Flüssigkeit und die Sublimation geht daher schnell vor sich. Ein sehr langsamer Übergang fester Körper in die Gasform mit nachfolgender Wiederverfestigung (Sublimation im weiteren Sinne) kann bei allen Temperaturen und Drucken insofern stattfinden, als die Körper der Verdunstung zugänglich sind (207).

221. Siedeverzug; überhitzte Flüssigkeiten. — Wenn Wasser stundenlang in einem Glasgefäß im Kochen war, ist zeitweilige Unterbrechung der Dampfblasenentwickelung, trotz Wärmezufuhr, mit stoßweisem Wiedereintreten des Kochens zu beobachten. Das Wasser kann dann beträchtlich über den Siedepunkt erhitzt sein. Zwar findet reichliche Verdampfung an der freien Oberfläche statt, da die Dampfspannung den Atmosphärendruck übersteigt, so daß die

---

[1]) Die Angabe eines „Siedepunkts im Vakuum" hat daher keinen bestimmten Sinn.

[2]) Der Schmelzpunkt der Kohlensäure und ihr Siedepunkt bei 1 Atm. liegen beide nahe bei —78° (Tab. 30 und 33).

Luft durch entweichenden Dampf verdrängt wird; aber am Boden des Gefäßes, wo die Wärmezufuhr erfolgt, fehlt der Verbrauch der Verdampfungswärme bei solchem „Siedeverzug"; daher die damit verbundene „Überhitzung".

Das Ausbleiben der Dampfblasenentwickelung ist Folge des Fehlens von Luftoberflächen, an denen die Dampfblasen sich entwickeln könnten (217). Die in Flüssigkeiten stets gelösten, aus der Luft aufgenommenen Gase, sowie auch die an der Gefäßoberfläche haftenden Gase sind durch das lange Kochen verbraucht[1]), und die Ausbildung von Hohlräumen in der Flüssigkeit, die mit Dampf sich füllen könnten, ist aus zwei Gründen erschwert. Erstens stehen solche Hohlräume, die anfänglich klein wären, unter dem erhöhten Druck der Oberflächenspannung (M 326), und zweitens ist der Dampfdruck an gehöhlten Oberflächen verringert, was wir später noch zeigen (235). Sowie aber die Überhitzung hoch genug ist, um den für kleinste, bei der Ungeordnetheit der Wärmebewegung vielleicht auch ganz ohne Gas hier und da sich bildende Hohlräume erforderlichen hohen Dampfdruck zu liefern, wird dadurch der Hohlraum sofort gedehnt; damit schwindet aber sein Oberflächenspannungsdruck, während zugleich die Dampfspannung an seiner Oberfläche steigt, und dies gibt das explosionsartig stoßende, plötzliche Erscheinen großer Dampfblasen, die durch Verbrauch von Verdampfungswärme die Überhitzung zeitweilig aufheben.

Der Zustand des Siedeverzuges ist auch in der Abb. 84 (213) ersichtlich. Verfolgt man von links her eine der Linien im Flüssigkeitsraume, z. B. die bei q (zu 20°C gehörig), was Vergrößerung des zunächst ganz mit Flüssigkeit gefüllten Raumes bedeutet, immer bei gleichbleibend gehaltener Temperatur, so gelangt man zum Punkte e. Hier könnte sich die erste Dampfblase zeigen, denn man gelangt in den Dampfraum. Wenn aber keine Ansatzoberfläche für die Dampfblase da ist, kann das Volum weiter vergrößert werden und doch voll Flüssigkeit bleiben, wobei der Druck entsprechend weiter von e bis d sinkt, während er bei Eintritt des Siedens von e über c konstant bliebe. Man hat also beim Siedeverzug eine Verwirklichung mindestens eines Stückes des als möglich befundenen gekrümmten Zustandsweges im Dampfraum (213, vgl. 230).

222. Überhitzung, Siedeverzug ist ein großes Hindernis für feine Siedepunktsermittelung. Ein genügend empfindliches Thermometer kommt in stoßend kochender Flüssigkeit bei den immer wieder eintretenden Überhitzungen überhaupt nicht zur Ruhe. Man vermeidet die Überhitzung durch Einleiten eines Luftstromes in Bläschen am Boden des Siedegefäßes oder durch Einbringen von Platinschnitzeln oder porösen, lufthaltigen Stoffen.

Bringt man aber das Thermometer in den Dampf über der Flüssigkeit, so daß er, ohne mit Luft vermischt zu sein, am Thermometer sich zu verdichten beginnt, so ist die Überhitzung ganz ausgeschaltet; der Dampf kann im Augenblick seiner Verdichtung nicht mehr überhitzt sein; er kann aber wegen des Wiederauftretens der Verdampfungswärme auch nicht kälter sein, als es dem gesättigten Dampfe vom vorhandenen Drucke nach der Dampfspannungstabelle entspricht.

Eichungen von Thermometern auf Siedepunkt werden daher stets in dieser Weise, im Dampfe siedenden Wassers, nicht im Wasser selbst, ausgeführt, selbstverständlich mit Berücksichtigung des Barometerstandes.

Siedepunkte uneinheitlicher Flüssigkeiten, wie Lösungen, können aber nur in

[1]) In Metallgefäßen tritt die Überhitzung mit dem stoßweisen Sieden nicht so leicht auf, wie in Glasgefäßen, weil Metalle in ihrem Inneren meist große Gasvorräte haben und sie, wie bei Dampfkesseln, aus den Feuergasen auch ersetzen können.

der Flüssigkeit beobachtet werden; der Dampf würde nur den Siedepunkt des verdampfenden reinen Lösungsmittels geben können.

223. Dampfspannungen und Siedepunkte von Lösungen. — Lösungen, aus welchen nur das Lösungsmittel, nicht der gelöste Stoff verdampft, zeigen stets verminderte Dampfspannung, somit erhöhten Siedepunkt, verglichen mit dem reinen Lösungsmittel.

Das Nichtverdampfen der Moleküle des gelösten Stoffes — der „Lösungsmoleküle" (s. E 199) — beweist, daß sie größeren Molekularkräften unterworfen sind als die Lösungsmittelmoleküle (vgl. 204). Damit stimmt es auch überein, daß die Auflösung nichtverdampfender Stoffe stets die Oberflächenspannung des Lösungsmittels erhöht; wässerige Salzlösungen, aber auch z. B. Zuckerlösungen haben alle eine größere Oberflächenspannung als das reine Wasser. Wenn aber die Lösungsmoleküle infolge dieser Kräfte nicht aus der Oberfläche entweichen, so versperren sie tieferliegenden Lösungsmittelmolekülen den Austritt, und mit der Zahl der zeiteinheitlich austretenden Moleküle muß auch die Dampfspannung vermindert sein (205), insofern die Rückkehr von Molekülen aus dem Dampfraum in die Flüssigkeit durch die Lösungsmoleküle nicht behindert ist. Wirken bei dieser Behinderung des Austritts und Nichtbehinderung des Eintritts alle Lösungsmoleküle beliebiger Beschaffenheit in gleicher Weise, so muß die Dampfspannungserniedrigung nur von der Zahl der in der Raumeinheit gelösten Moleküle abhängen, nicht von deren Beschaffenheit, und sie muß proportional dieser Zahl sein. Die Messungen an Lösungen bekannter Molekülzahlen zeigten, daß dem mindestens in guter Annäherung wirklich so ist[1]).

Dieser Zusammenhang kann ganz wie der analoge Zusammenhang mit der Gefrierpunktsänderung (197) zur Ermittelung der Zahl gelöster Moleküle und damit zur Ermittelung des Molekulargewichtes dienen (85). Da Dampfspannungen weniger leicht meßbar sind als Siedepunkte, bedient man sich dabei an Stelle der Dampfspannungserniedrigungen lieber der entsprechenden, ebenfalls der Zahl der gelösten Moleküle proportionalen Siedepunktserhöhungen.

c) Verdampfungswärme.

224. Der Übergang vom flüssigen in den Dampfzustand erfordert stets die Zufuhr einer gewissen Wärmemenge für die Gewichtseinheit, Verdampfungswärme genannt. Dabei ist es gleichgültig, ob der Übergang durch Verdunstung oder durch Sieden erfolgt. Der umgekehrte Übergang, die Verflüssigung von Dampf, gibt die gleiche Wärmemenge, die Verdichtungs-(Kondensations-) Wärme, wieder zur Verfügung. Alles dies ist in Analogie mit der Schmelz- und Erstarrungswärme (192); auch die Verdampfungswärme ist Arbeitsaufwand nur zur Aggregatzustandsänderung, ohne jede Temperaturänderung.

[1]) Die Lösungsmoleküle wirken demnach hier wie beim osmotischen Druck (M 368) nur als Ventile, die einseitig den Durchtritt durch die Flüssigkeitsoberfläche versperren. Daß hierbei die räumliche Größe der Lösungsmoleküle ganz oder nahezu einflußlos sich zeigt, dies könnte darauf beruhen, daß größere Lösungsmoleküle auch größeren, sie ins Innere ziehenden Molekularkräften unterliegen und daher weniger in der Oberfläche vertreten sind als kleinere. Es würde dann die Konzentration in der der Verdampfung zugänglichen Oberflächenschicht der Lösung sich verhalten zur Konzentration im Inneren der Lösung wie das Volum des Lösungsmittelmoleküls zum Volum des Lösungsmoleküls.

Wenn beispielsweise Wasser zum Kochen gebracht ist, also 100° erreicht hat, so steigt seine Temperatur trotz beliebiger Wärmezufuhr nicht weiter, solange das Sieden ununterbrochen anhält; sondern alle Wärme wird nur zur Verwandlung des Wassers von 100° in Dampf von 100° verbraucht. Auf diesem Verbrauch von Verdampfungswärme beruht auch die Konstanz der Siedepunkte, so daß sie als Temperaturfixpunkte benutzt werden können, ähnlich wie die Schmelzpunkte (195).

225. Die Messung von Verdampfungswärmen geschieht durch Einleiten einer meßbaren Dampfmenge in ein Kalorimeter, oder auch durch Herausdestillieren einer meßbaren Flüssigkeitsmenge aus einem Kalorimeter. Abb. 86 zeigt eine etwas schematische Ausführungsweise für den ersteren Fall. Es wird Wasserdampf aus dem Kessel D in das Kugel- und Schlangenrohr des Kalorimeters K geleitet; nach unten, in den Meßzylinder M, kann kein Dampf entweichen, weil dort der Weg versperrt ist. Das Kalorimeter enthalte 1 kgr Wasser von 0°. Der Dampf verdichtet sich im Kugel- und Schlangenrohr zu Wasser, welches an den Rohrwänden dem Dampf von 100° entgegenläuft und daher mit 100° in den Meßzylinder abtropft. Das Kalorimeter nimmt daher nur die Wärmemenge auf, welche bei der Verwandlung von Dampf von 100° in Wasser von 100° abgegeben wird, d. i. die richtige Verdichtungs- oder Verdampfungswärme. Die Wassermenge, zu welcher sie gehört, ist im Meßzylinder M abzulesen; Wasser, das außerhalb des Kalorimeters, vom Kessel bis r, verdichtet ist, läuft in den Kessel zurück. Anfänglich darf oben bei o kein Dampf entweichen. Setzt man den Versuch solange fort, bis solches Entweichen eben beginnt, so beginnt auch das Wasser im Kalorimeter zu kochen (wie es die Abbildung zeigt); das Kalorimeter hat dann 100 Kalorien aufgenommen. Das Abtropfen des Wassers in den Meßzylinder ist dann auch beendet, weil keine Verdichtung mehr stattfindet, und man liest nun am Meßzylinder etwa 190 cm³ = 0·19 kgr ab, wonach sich die Verdampfungswärme zu 100 Kal/0·19 kgr = **530** Kal/kgr ergibt (was trotz Nichtberücksichtigung der Wärmeverluste des Kalorimeters nicht viel zu wenig ist).

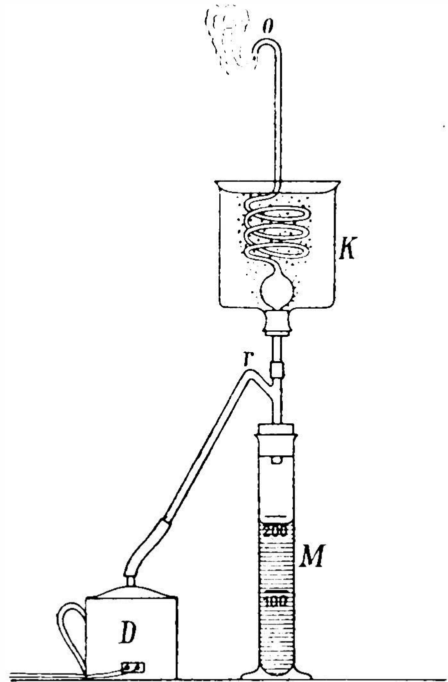


Abb. 86. Meßweise der Verdampfungs-Wärme.

Genauere Angaben für Wasser und andere Stoffe zeigt Tab. 34. Man sieht, daß — so wie die Schmelzwärme — auch besonders die Verdampfungswärme des Wassers hervorragend groß ist. Wasserdampf, der sich verdichten kann, ist ein sehr gutes Wärmeübertragungsmittel; es bringen — wie wir sahen — weniger

als 0·2 kgr Dampf 100 Kalorien, was in Dampfheizungsanlagen ausgenutzt wird. Überschüssigen Dampf aus Dampfkesseln ins Freie zu lassen ist große Verschwendung; man läßt ihn daher in besondere Kessel treten, die als „Wärmespeicher" wirken.

Tab. 34. **Verdampfungswärmen bei gewöhnl. Siedetemperatur.**

Wasser	539	Kal
Schwefel	362	kgr
Alkohol	210	
Äther	92	
Quecksilber	62	

Man kann die Verdampfungswärme aus der Dampfspannungstabelle berechnen mittels einer Gleichung, welche der für die Schmelzwärme ϱ geltenden (200) vollkommen analog ist[1]) und die auch in gleicher Weise hergeleitet wird (256).

226. Äußere und innere Verdampfungswärme. — In der Verdampfungswärme sind zweierlei Arbeiten enthalten, nämlich erstens die Arbeit der beträchtlichen Volumvergrößerung gegen den vorhandenen äußeren Druck, welche mit dem Übergang in den Dampfzustand stets verbunden ist, und zweitens die Arbeit gegen die Molekularkräfte der Flüssigkeit, welche gänzlich überwunden werden müssen, um aus der Flüssigkeit freie Dampfmoleküle zu erhalten (204). Erstere Arbeit in Kalorien wird als „äußere" Verdampfungswärme bezeichnet, letztere als „innere" Verdampfungswärme; beide zusammen geben die meßbare ganze Verdampfungswärme.

Beide Anteile verringern sich, wenn die Temperatur, bei welcher die Verdampfung stattfindet, steigt, oder, was nach der Dampfspannungstabelle dasselbe ist, wenn der Druck steigt: Die Verdampfungswärme sinkt mit steigender Temperatur und steigendem Druck. Denn es dehnt sich die Flüssigkeit bei der steigenden Temperatur, der Dampf schrumpft aber wegen des steigenden Drucks, so daß schließlich die Molekülabstände in der Flüssigkeit und im Dampf sogar gleich werden. Bei dieser Temperatur muß die Verdampfungswärme Null sein; die äußere, weil keine Volumvergrößerung mehr stattfindet beim Verdampfen, und die innere, weil durchschnittlich keine Abstandsveränderungen der Moleküle stattfinden. Diese Temperatur, bei welcher die spezifischen Gewichte von Flüssigkeit und Dampf einander gleich sind und die Verdampfungswärme Null ist, werden wir als die „kritische Temperatur" der Flüssigkeit noch erneut betrachten (239).

Die äußere Verdampfungswärme, als die Arbeit gegen den äußeren, durch die Dampfspannung gegebenen Druck, haben wir übrigens schon betrachtet (213); man sieht aus Abb. 84, daß diese Arbeit, dargestellt durch die Flächen unter den geraden Linien a_1e_1, ae, mit steigender Temperatur kleiner wird, weil die Längen dieser Linien kleiner werden; bei K ist die Linienlänge und damit auch die Fläche unter derselben Null; dieser Punkt gehört aber zur kritischen Temperatur (31° bei Kohlensäure).

[1]) Es bedeutet dann ϱ die Verdampfungswärme, T die Temperatur, bei welcher die Verdampfung erfolgt; dT/dp wird aus der Dampfspannungstabelle entnommen; V und v sind die reziproken spezifischen Gewichte von Dampf und Flüssigkeit.

Die innere Verdampfungswärme kann besonders groß werden, wenn die Flüssigkeitsmoleküle komplex sind, so daß sie bei der Verdampfung nicht nur auf große Abstände gebracht, sondern vorher auch noch zerteilt werden müssen. Dies ist wohl unzweifelhaft beim Wasser der Fall, dessen große Verdampfungswärme wir bemerkt haben (Tab. 34), und dessen komplexe Moleküle auch durch die anderen Wärme-Besonderheiten des Wassers — Dichtemaximum bei 4°, Dehnung beim Erstarren und große spezifische Wärme — angezeigt sind (23, 56, 199).

227. Tiefe Temperaturen durch Verdampfung. — So wie der Verbrauch der Schmelzwärme in den Kältemischungen (198), liefert auch Verbrauch von Verdampfungswärme vorteilhaft tiefe Temperaturen.

Flüssigkeiten mit hoher Dampfspannung, die entsprechend schnell verdampfen, sind am geeignetsten. Benetzung mit Äther, am besten als Sprühregen mit einem Luftstrom aufgebracht, kann leicht einen Gegenstand unter 0° kühlen; noch besser ist Äthylchlorid C_2H_5Cl, dessen Siedepunkt 12° starke Verdampfung auch ohne Luftstrom sichert.

Zu Dauerbetrieb pumpt man in „Kältemaschinen", „Eismaschinen", die Dämpfe der verdunstenden Flüssigkeit ab, um sie in einem anderen Raum wieder zu Flüssigkeit zu verdichten, die dann immer wieder von neuem verdunsten kann. Der Raum, in welchem die Wiederverflüssigung erfolgt, wird dauernd warm, da dort die Verdichtungswärme erscheint; er muß deshalb dauernd gekühlt werden, wozu aber gewöhnliches Wasser genügt. Der Raum, in welchem die Verdunstung erfolgt, erhält dauernd die tiefe Temperatur, die beispielsweise zu Eisherstellung benutzt werden kann.

Eine solche Vorrichtung bewirkt dauernd, was von selber nicht erfolgt (6, 111, 112), daß Wärme von einem schon kalten Ort immer noch weiter verschwindet und dafür an einem wärmeren Ort erscheint. Es erfolgt das unter dauerndem Arbeitsaufwand in der Pumpe, keineswegs von selber.

Als geeignete Flüssigkeiten mit hoher Dampfspannung werden in Kältemaschinen Ammoniak, schweflige Säure, Kohlensäure benutzt.

Um für kurze Zeit Temperaturen bis zu —75°C zu erhalten, benutzt man eine Lösung von fester Kohlensäure in Äther oder Alkohol. Die feste Kohlensäure erhält man durch Ausströmenlassen von flüssiger Kohlensäure in einen Tuchbeutel, wo infolge Kühlung durch die Verdampfung des einen Teils der andere Teil zum Erstarren kommt. Die Lösung, die an sich schon wie eine Kältemischung wirkt, hält sich dauernd kalt durch Versieden der Kohlensäure aus ihr, solange bis deren Vorrat verbraucht ist.

d) Verdichtung (Kondensation, Verflüssigung) der Dämpfe.

228. Möglichkeiten der Verflüssigung. — Wird gesättigter Dampf gekühlt, so sinkt sein Druck nach der Dampfspannungstabelle (210) und entsprechend sinkt auch die im gegebenen Volum vorhandene Dampfmenge, und was nicht mehr als Dampf vorhanden ist, ist flüssig geworden.

Ebenso erfolgt Verflüssigung, wenn bei gleichgehaltener Temperatur das Volum des Dampfes durch Druckanwendung verkleinert wird; der Dampf weicht dem Druck durch Verflüssigung aus (211).

In beiden Fällen muß dem Dampf die Verdichtungswärme (224) entzogen werden.

An Stelle von Wärmeentziehung durch Ableitung nach außen kann auch Energieentziehung durch Arbeitsleistung dienen, indem man den Dampf plötzlich gegen den vorhandenen Druck sich dehnen läßt, wobei er kalt wird (71). Diese Art der Kühlung ist für quantitative Versuche besonders vorteilhaft, wenn der Dampf in einem Überschuß von Gas vorhanden ist, wie z. B. Wasserdampf in Luft; man berechnet dann leicht die Temperaturänderung aus den Gasdrucken (62, 63); auch ist dabei gleichmäßige Wärmeentziehung im ganzen Volum gesichert. Aus der Temperaturerniedrigung kann man nach der Dampfspannungstabelle stets zum voraus angeben, wieviel Verflüssigung eintreten muß (vgl. 216). Diese Art von Kühlung ist auch wirksam bei der Verdichtung des Wasserdampfes in der Erdatmosphäre, wenn nämlich die dampfhaltigen Luftmassen in die Höhe steigen und damit zu niedrigeren Drucken kommen (162).

229. Nebel und Wolken. — Das Auftreten der Flüssigkeit als Ergebnis der Dampfverdichtung ist aber in allen Fällen an bestimmte Stellen gebunden. Die Flüssigkeit kann sich an bereits vorhandenen Flüssigkeitsoberflächen absetzen oder auch an Gefäßwänden; sie kann auch im ganzen Dampfraum verteilt erscheinen als „Nebel", der eine dichte Häufung von Flüssigkeitströpfchen ist. Jedes solche Nebeltröpfchen hat aber einen besonderen „Kern" (Nebelkern, Kondensationskern), der im Gase oder Dampfe schwebend schon vor der Verdichtung vorhanden war, und diese Kerne sind es, an welchen abgeschiedene Flüssigkeitsmoleküle sich ebenso anlagern, wie an sonstigen festen oder flüssigen Oberflächen.

In gewöhnlicher Luft wirken die stets zahlreich vorhandenen Staubteilchen verschiedener Art als Verdichtungskerne, z. B. des Wasserdampfes. In wattefiltrierter wasserdampfhaltiger Luft, die keine Staubteilchen enthält, tritt bei gleicher Temperaturerniedrigung der Nebel nicht auf; die Verflüssigung findet dann nur an den Gefäßwänden statt; der Dampfraum bleibt klar durchsichtig[1]).

Es ist auch begreiflich, daß mitten im Dampfe oder Gase nicht ohne weiteres Flüssigkeit auftreten kann. Denn wenn auch der Dampf die zur Verflüssigung nötige tiefe Temperatur schon hat, so träte doch am Orte einer Verflüssigung erst noch die mit der Aggregatzustandsänderung notwendigerweise verbundene Verflüssigungswärme auf; sie wäre dann zunächst ganz in dem neugebildeten Flüssigkeitströpfchen enthalten, so daß dieses ebensogut gleich wieder verdampfen könnte. An einem Kern oder an fester Wand kann dagegen die Verflüssigungswärme sich verteilen und so weitergegeben werden[2]).

Auch in der freien Atmosphäre entstehen Nebel und Wolken in der eben betrachteten Weise unter Mitwirkung der stets vorhandenen Nebelkerne, wenn Sinken des Luftdrucks oder das Aufsteigen der Luftmassen Temperaturerniedrigung hervorbringen (162). Erreicht das Aufsteigen der Luft mit gesättigtem Wasserdampf große Höhen, so wird entsprechend der niedrigen Temperatur fast alles Wasser ausgeschieden; da aber die Anzahl der vorhandenen gutwirkenden Nebelkerne beschränkt ist, wachsen die einzelnen Nebeltröpfchen entsprechend

---

[1]) Über die Anwendung sehr starker Temperaturerniedrigungen siehe 237.

[2]) Auch chemische Umsetzungen in Gasen finden, wohl aus verwandter Ursache, häufig vorzugsweise an den Gefäßwänden oder an schon vorhandenen, im Gase schwebenden Partikeln statt.

groß an. Man kann sie auf Bergen aus den Wolken auffangen; sie haben einen mittleren Durchmesser von etwa 0·02 mm und einen mittleren Abstand von etwa 1 mm. Aus diesen Nebeltröpfchen, die in aufsteigendem Luftstrome lange schweben können (M 410), entstehen beim Zusammenfließen die Regentropfen.

230. Übersättigter (unterkühlter) Dampf. — Wenn gesättigter Dampf gekühlt oder bei gleichgehaltener Temperatur auf kleineres Volum gebracht wird und es sind keine oder keine genügenden Nebelkerne oder sonstige Ansatzpunkte der Verflüssigung da, so wird er „unterkühlt" oder „übersättigt". Der Dampf hat dann höheren Druck als es nach der Temperatur bei Ausscheidungsmöglichkeit von Flüssigkeit sein könnte; so wie aber Ausscheidung erfolgt, etwa durch Einbringen einer genügend großen Flüssigkeitsoberfläche, sinkt der Druck auf die nach der Dampfspannungstabelle zur Temperatur gehörige Höhe herab. Das Verhältnis des ohne Verflüssigung erhöhten Druckes zu letzterem, der Sättigung entsprechenden Druck gibt das Maß der Übersättigung.

Man hat in der Unterkühlung oder Übersättigung die Verwirklichung eines Stückes des als möglich befundenen gekrümmten Zustandsweges im Dampfraum (213), und zwar ist hier der Teil an der Seite der großen Volume verwirklicht (a bis b oder a_1 bis b_1 in Abb. 84), während Überhitzung einen Teil an der entgegengesetzten Seite verwirklicht zeigte (221).

231. Dampfstrahl. — Strömt Dampf siedenden Wassers aus einem Kessel durch eine enge Öffnung ins Freie, so mischt sich der gesättigte Dampf von 100° alsbald wirbelnd mit der Luft von Zimmertemperatur, was ihn stark kühlt. Dicht bei der Ausströmungsöffnung ist der Dampfstrahl noch ganz klar und durchsichtig; erst etwa 1 cm weiter tritt die Mischung mit der Luft und damit die Kühlung und Übersättigung ein, und der Rest der ganzen Länge des Strahles ist wolkig trübe vom Niederschlag des überschüssigen Wassers auf den Nebelkernen der Luft, wodurch die Übersättigung beseitigt ist. Die gewöhnlich in der Luft vorhandenen Nebelkerne geben dem Dampfstrahl nur ein mattgraues Aussehen; seine Tröpfchen sind zu wenig, um viel Licht zu reflektieren. Bringt man aber an den Ort der Übersättigung des Strahles eine reiche Quelle von Nebelkernen, so verändert der Dampfstrahl sehr auffallend sein Aussehen; er wird sehr hell und dick weiß; sein Wasser ist nun auf einer viel größeren Anzahl von Tröpfchen verteilt, was viel Lichtreflexion ergibt. In dieser Weise erkennt man leicht Nebelkernquellen.

Grober, sichtbarer weißer Rauch oder Staub beeinflußt den Dampfstrahl nicht, weil die groben Partikel durch Wasserüberzug nicht wesentlich größer und lichtreflektierender werden; wohl aber wird sehr feinzerteilte, an sich wenig oder gar nicht sichtbare Materie durch den Wasserüberzug im Dampfstrahl sichtbar. Ein glimmender Span, das rotglühende Ende eines Glasstabs, ein elektrisch glühender Platindraht geben starke Dampfstrahlwirkung, — alles Körper, deren Zerstäuben oder Absublimieren auch durch Beschlagbildung oder Flammenfärbung nachweisbar ist. Bei konzentrierter Schwefelsäure, von der schon ein Tropfen, an den Dampfstrahl gebracht, stark wirksam ist, darf man unsichtbares Entweichen von Schwefelsäureanhydrid in feiner Zerteilung annehmen. Gasförmige Verbrennungsprodukte, z. B. von einem Leuchtgasflämmchen, zeigen sich stark nebelkernhaltig. Bei ultraviolett durchstrahlter Luft, die ebenfalls starke Dampfstrahlwirkung gibt, sind die ozonerzeugten Nebelkerne eingehend nach-

gewiesen (O 100), ebenso bei Kathodenstrahlen, die ebenfalls mittels Ozonerzeugung in der Luft wirken (E 442).

Man erkennt hieraus auch die Quellen der für Nebel- und Wolkenbildung in der freien Atmosphäre wirksamen Kerne. Für die untere Atmosphäre werden die meisten Nebelkerne wohl durch Verbrennungsvorgänge geliefert, wozu die Verbrennungsmotoren der vielen Fahrzeuge gewiß stark beitragen. Die obere Atmosphäre erhält Nebelkerne durch das ultraviolette Sonnenlicht, durch Kathodenstrahlen von der Sonne (O 100) und gelegentlich durch die manchmal sehr hoch steigenden Gase großer Vulkanausbrüche.

232. Einfluß der Größe der Kerne. — Nebelkerne aller Art in Gasen können leicht durch Anlagerung von Elektrizitätsträgern (E 514) selbst zu Elektrizitätsträgern werden, und es kann dann die Größe der Kerne auf den gut gesicherten Wegen der Größenermittelung von Elektrizitätsträgern (109, E 504) gefunden werden. Es zeigt sich so, daß sehr kleine Kerne, vom Durchmesser nicht vieler Atome (etwa $2 \cdot 10^{-6}$ mm), schlecht dampfkondensierend wirken. Kerne von $8 \cdot 10^{-6}$ mm Durchmesser wirken dagegen sehr gut; sie machen in genügender Zahl den Dampfstrahl intensiv weiß, wie es von den Kernen des ultravioletten Lichtes oder des glühenden Platindrahtes beschrieben ist (231). Elektrizitätsträger, die nicht an größere Kerne gelagert sind, sondern nur aus Gasmolekülen bestehen, sind sehr klein (E 508, 514), etwa vom Durchmesser 10^{-6} mm; sie wirken auch entsprechend schlecht dampfkondensierend. Bringt man beispielsweise ein in dünner Hülle luftdicht eingeschlossenes Radiumpräparat, das die umgebende Luft mit großen Mengen von Elektrizitätsträgern erfüllt, an den Dampfstrahl, so sieht man kaum deutliche Wirkung, im Gegensatz zur intensiven Wirkung des glühenden Platindrahts, der viel weniger Elektrizitätsträger gibt, aber stark zerstäubt.

233. Die Gleichgültigkeit elektrischer Ladung oder Nichtladung von Nebelkernen für ihre dampfkondensierende Wirkung wird außerdem unmittelbar nachgewiesen durch ein elektrisches Feld, welches nach Willkür an- oder abgeschaltet werden kann und welches durchströmende Luft bei Anschaltung gänzlich von Elektrizitätsträgern befreit. Läßt man durch Ultraviolett stark mit Elektrizitätsträgern und gleichzeitig stark mit ozonerzeugten Nebelkernen versehene Luft durch ein solches Feld und danach an den Dampfstrahl strömen, so bemerkt man bei abwechselndem An- und Abschalten des Feldes keinen Unterschied in der Nebelbildung. Es ist also nicht die elektrische Ladung, sondern nur die Größe der Nebelkerne maßgebend für ihre dampfkondensierende Wirkung.

234. Die Ursache des Größeneinflusses (232) der Kerne liegt darin, daß dieselben, mit einer Molekülschicht von Flüssigkeit überzogen, je nach ihrer Größe verschieden gekrümmte Flüssigkeitskugeln werden und daß die Dampfspannung, welche solche gekrümmte Flüssigkeitsoberflächen geben, von deren Krümmungsradius abhängig ist. Die Dampfspannungstabelle gibt die Drucke an ebenen Flüssigkeitsoberflächen; gekrümmte, nach außen gewölbte Oberflächen geben größere Dampfspannungen, nach innen gewölbte geben kleinere Dampfspannung, und zwar um so mehr, je kleiner der Krümmungsradius ist, wie sogleich zu zeigen (235).

Ein sehr kleiner, dünn mit Flüssigkeit überzogener Nebelkern würde daher in einem nach der Dampfspannungstabelle gesättigten Dampf sogar eintrocknen; dampfkondensierend könnte der kleine Kern nur bei einer Übersättigung wirken,

die so stark sein müßte als es der vergrößerten Dampfspannung der kleinen Flüssigkeitskugel entspricht, welche der Kern wird, sobald er Flüssigkeit ansetzt.

235. Dampfspannung über gekrümmten Oberflächen. — Man überzeugt sich von dem Einfluß der Oberflächenkrümmung auf die Dampfspannung durch einen Gedankenversuch, der zugleich quantitative Auskunft gibt. Man denke eine enge Röhre vom Durchmesser 2r in ein sehr weites Gefäß mit Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s und der Oberflächenspannung α gestellt, wie in Abb. 86 der Mechanik (Bd. I), und das Ganze in ein ausgepumptes Gefäß eingeschlossen, in welchem dann nur die Flüssigkeit mit ihrem Dampf beweglich ist. Die Steighöhe in der vollkommen benetzenden Röhre ist $h = 2\alpha/r\,s$ (M Gl. 339a). Über der ebenen Flüssigkeitsoberfläche, am unteren Ende von h, sei der Dampfdruck p vorhanden, wie er der Temperatur des Ganzen nach der Dampfspannungstabelle für gesättigten Dampf entspricht; es findet dann dort im Ganzen (205) weder Verdampfung noch Verflüssigung statt. Um die Höhenstufe h darüber ist dann im Ruhezustand ein um $h\sigma$ geringerer Druck wegen der Schwere des Dampfes mit dem spezifischen Gewicht σ (M 350). Dieser verringerte Druck $p' = p - h\sigma = p - 2\alpha\sigma/rs$ ist danach im Ruhezustand auch bei der gekrümmten Flüssigkeitskuppe in der Röhre vorhanden. Denn wäre der Dampfdruck, welchen diese Flüssigkeitsoberfläche vom Krümmungsradius r über sich herstellt, nicht gleich p′, so würde fortwährend Verdampfung oder Verflüssigung an dieser Oberfläche stattfinden, und dies würde einen dauernden Kreislauf von Dampf oben aus der Röhre hinaus und unten, an der ebenen Oberfläche verflüssigt, wieder in die Röhre hinein — oder umgekehrt — bedeuten, was ein Perpetuum mobile und somit nach aller Erfahrung nicht in Übereinstimmung mit der Natur der Dinge wäre (112). Es muß also der Sättigungs-Dampfdruck an einer Oberfläche mit dem Krümmungsradius r gegeben sein durch

$$p' = p - 2\alpha\sigma/rs\,. \qquad 235)$$

Derselbe Gedankenversuch mit der zugehörigen Überlegung kann auch mit einer vollkommen unbenetzten Röhre ausgeführt werden, in welchem Falle die Flüssigkeitskuppe im Rohr tiefer steht als die äußere Oberfläche[1]). Es hat dann h sowohl als der Krümmungsradius r sein Zeichen gewechselt, und das Ergebnis ist wieder dieselbe Gleichung 235 für p′, so daß die Gleichung für alle Fälle gilt, wenn r für nach innen gewölbte (konkave) Oberflächen positiv, für nach außen gewölbte (konvexe) Oberflächen negativ gerechnet wird. Für ebene Oberflächen ist $r = \infty$, $p' = p$.

Tröpfchen geben demnach erhöhte Dampfspannung, und Luftbläschen haben erniedrigte Dampfspannung. Da aber $\alpha\sigma/s$ stets sehr klein ist, kommen merkliche Unterschiede zwischen p und p′ erst bei sehr kleinen Radien r in Betracht[2]). Nebeltröpfchen vom Durchmesser 0·02 mm (229) wirken noch sehr

[1]) Diese Gedankenversuche sind für jede Flüssigkeit erlaubt; denn es finden sich für jede Flüssigkeit Rohrwände, die benetzt oder nicht benetzt werden, und wenn auch die Randwinkel 0° und 180° nicht erreichbar wären, so gilt die Rechnung doch auch für jeden beliebigen Randwinkel ϑ, indem dann sowohl α den Faktor $\cos\vartheta$ erhält (M 333) als auch der Rohrradius $r\cos\vartheta$ wird, wenn r der Krümmungsradius der Oberfläche ist, so daß der Faktor $\cos\vartheta$ fortfällt und also der Randwinkel gleichgültig ist.

[2]) Es war daher erlaubt, den Radius der Flüssigkeitsoberfläche im Gedankenversuch einfach gleich dem Rohrradius zu setzen. Ebenso sind die Krümmungsradien der Flüssigkeitsoberflächen in den Barometerrohren der Abb. 81 oder 82 belanglos für die Dampfspannungsmessungen.

genau wie ebene Oberflächen; mikroskopisch gerade noch ausmeßbare Wassertröpfchen (2r = 0·0002 mm) erhöhen die Dampfspannung erst um etwa $^1/_{100}$ des Wertes an ebenen Oberflächen, und nur bei den noch viel kleineren Radien der unsichtbaren Nebelkerne (232) wird der Einfluß bedeutend[1]). Ein solcher Nebelkern kann erst dann mit Flüssigkeit sich überziehen, also wirksam werden, wenn die seinem Radius zukommende Dampfspannung p′ als beträchtliche Übersättigung vorhanden ist.

236. Untersuchung von Kerngrößen durch Nebelbildung. — Je kleiner die Kerne, desto höhere Übersättigung brauchen sie nach Vorigem, um zu Nebeltröpfchen zu werden. Ist die nötige Übersättigung aber vorhanden, so wachsen sie sofort zu gut sichtbarer Größe an, weil mit wachsendem Radius auch kleinere Übersättigungen zu weiterer Kondensation genügen. Man kann die so sichtbar gemachten Kerne, deren Größe nach Gl. 235 (oder 235a) berechenbar ist, dann abzählen.

Man verwendet dementsprechend zur Untersuchung gleichzeitig vorhandener verschiedener Kerngrößen stufenweise gesteigerte Übersättigungen, was bei Gasanwesenheit durch meßbare plötzliche Druckverminderungen gut ausführbar ist (228), und zählt jedesmal die im cm³ erscheinenden Nebeltröpfchen. Die Größenberechnung aus der Übersättigung kann freilich nur als angenähert gelten, insofern die in Betracht kommenden Flüssigkeitsüberzüge der Kerne dünner als Wirkungsweite der Molekularkräfte sind, was die Größe der in die Rechnung zu setzenden Oberflächenspannung α unsicher macht (M 339); doch erhält man gesicherte Anhaltspunkte für die Größenabstufungen der Kerne.

237. Komplexe Moleküle der Dämpfe. — In dieser Weise sind mehrere Dämpfe auf Nebelkerne untersucht worden, wobei die groben, zufällig vorhandenen Nebelkerne durch Wattefiltrierung entfernt waren. Es zeigte sich dementsprechend bei geringen Übersättigungen kein Nebel; jedoch bei größeren Übersättigungen traten Tröpfchen auf und zwar beliebig oft wiederholbar. Dies zeigt, daß eine geringe Zahl sehr kleiner Kerne immer wieder neu sich bildet. Diese Kerne können durch ein elektrisches Feld entfernt werden; sie sind also Elektrizitätsträger. Ihre stete Neubildung ist der radioaktiven Strahlung der Erde und der durchdringenden Strahlung des Himmelsraums zuzuschreiben (E 577).

Hält man diese elektrischen Kerne dauernd durch ein elektrisches Feld beseitigt, so findet man bei noch größeren Übersättigungen Nebel, was eine große Zahl äußerst kleiner unelektrischer Kerne anzeigt, die ebenfalls immerfort neu sich bilden. Da dieselben auch bei sorgfältiger Fernhaltung fremder Stoffe nicht fehlen und in Anzahlen auftreten, die für den betreffenden Dampf charakteristisch sind, so sind sie als komplexe Moleküle des Dampfes zu denken, z. B. bei Wasserdampf als H_4O_2- oder H_6O_3-Moleküle. Die Zahlen dieser stets anwesenden komplexen Moleküle sind groß; im Verhältnis zur sehr großen Gesamtmolekülanzahl in cm³ (102) sind sie aber doch so wenig, daß sie das mittlere Molekulargewicht des Dampfes nicht merklich erhöhen können. Es zeigte sich z. B. in Wasserdampf nur rund $2 \cdot 10^{-11}$ v. H. der Moleküle komplex, so daß auf 5 Billionen H_2O-Moleküle nur ein komplexes Molekül kommt.

e) Verflüssigung der Gase.

238. Viele Stoffe sind im gasförmigen Zustand entdeckt worden, so die elementaren Gase der Luft, Stickstoff und Sauerstoff, so Wasserstoff, Kohlensäure, Chlor, schweflige Säure und andere; man wußte nicht, ob sie auch in den flüssigen Zustand zu bringen wären. Um das zu prüfen, mußte man sie als Dämpfe noch unbekannter Flüssigkeiten betrachten und auf sie die Mittel der Verdichtung an-

[1]) Es treten dann im Gedankenversuch große Höhen h auf, deren Druckwirkung nach geometrischer Reihe berechnet werden kann (M 363 und Anhang M III), was

$$p' = p\, e^{-2\alpha\sigma/rsp} \qquad 235a)$$

ergibt, in Übereinstimmung mit Gl. 235 bei nicht äußerst kleinen r.

wenden, die man seit Dalton schon kannte: Kälte und Druck (228). So gelang die Verflüssigung bei einer Anzahl von Gasen und zwar meist einfach, indem man sie durch Entwickelung in geschlossenem Glasrohr selbst unter Druck sich setzen ließ und dann das eine, nach abwärts gebogene Ende des Rohres in Kältemischung brachte, worauf dort die Flüssigkeit erschien. So verflüssigte Faraday 1823 das Chlor. Bei einigen Gasen aber, wie Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff scheiterten alle Versuche der Verflüssigung selbst zu Zeiten, da flüssige Kohlensäure durch Druckpumpen und Kältemischung schon in größerem Maßstabe in Stahlflaschen hergestellt wurde.

239. Kritische Temperatur. — Die Ursache der Mißerfolge bei jenen Gasen wurde zuerst am Verhalten der Kohlensäure erkennbar. Wir haben dieses Verhalten, als Beispiel auch für die anderen Gase und Dämpfe, teilweise schon an den Linien der Abb. 84 betrachtet, deren jede für eine bestimmte, rechts den Linien beigeschriebene Temperatur gilt (213).

Man kann die Gesamtheit dieses für alle Gase charakteristischen Verhaltens an einer in einem starkwandigen Glasrohr über Quecksilber abgeschlossenen, luftfreien Kohlensäureprobe eingehend studieren. Das Quecksilber, das andererseits an Öl grenzt, kann mit Hilfe einer das Öl drückenden Pumpe beliebig an die Kohlensäure gepreßt werden, was das Volum der Kohlensäure in unmittelbar sichtbarer Weise ändert, während der Druck an einem Druckmesser abzulesen ist. So sind Volume und Drucke des Gases, welche in der Abb. 84 als Abszissen und Ordinaten erscheinen, leicht beobachtbar, während jeweils eine bestimmte Temperatur des Gases durch ein Wasserbad, welches das Glasrohr umgibt, gleichbleibend gehalten wird, wie es je einer der Linien der Abbildung entspricht. Das Glasrohr kann bei genügender Wandstärke und nicht zu großem Durchmesser 150 Atm. Druck aushalten. Man kann dann folgende Beobachtungen machen:

1. Wählt man Zimmertemperatur, etwa 10° oder 20°, so kann die ursprünglich bei großem Volum ganz gasförmige Kohlensäure bei steigendem Druck auf kleinere Volume gebracht werden, bis der Druck erreicht ist, welcher nach der Dampfspannungstabelle der Zimmertemperatur entspricht (etwa 50 Atm., Tab. 32), worauf die erste kleine Schicht flüssiger Kohlensäure auf dem Quecksilber erscheint. Von hier ab bleibt bei weiterem Einpressen von Quecksilber der Druck ungeändert; das Volum verkleinert sich aber, während zugleich das Gas — jetzt gesättigter Dampf (211) — immer weniger und die Flüssigkeit immer mehr wird, bis endlich alle Kohlensäure flüssig ist. Von hier ab steigt der Druck bei nur wenig Volumverminderung steil an, entsprechend der geringen Kompressibilität der flüssigen Kohlensäure. Es ist das alles durch den schon früher betrachteten Lauf der Linien von 10° oder 20° (Abb. 84) über a c e (oder $a_1 c_1 e_1$) dargestellt. Der ganze Verlauf kann auch rückgängig gemacht werden, wenn durch vorsichtiges Öffnen eines Ölabflusses allmähliche Entlastung geschaffen wird; man sieht dann die flüssige Kohlensäure allmählich versieden, bis sie wieder ganz gasförmig (ungesättigter Dampf) geworden ist.

2. Beobachtet man aber bei 35° oder 40°C, so gelingt es nicht, flüssige Kohlensäure zu erhalten; der Rohrinhalt bleibt bei andauernder Volumverminderung unter Drucksteigerung stets ganz gasförmig, auch dann, wenn das Volum schon so klein geworden ist, wie im vorigen Versuche (1.) bei vollständiger Verflüssigung, wenn also das Gas schon die Dichte flüssiger Kohlensäure erreicht

hat. Vorsichtige Entlastung überzeugt davon, daß wirklich alles gasförmig geblieben ist; denn man sieht kein Versieden, sondern nur allmähliche Volumzunahme. Dieser Verlauf ist durch eine der Linien von 40° oder 50° der Abb. 84 dargestellt. Diese Linien verlaufen ganz im Gasraum; keine führt bei noch so großer Drucksteigerung oder Volumverkleinerung in den (schraffierten) Flüssigkeitsraum.

Das Verhalten ist also je nach der Temperatur verschieden. Es gibt eine Temperatur, oberhalb derer keine Verflüssigung bei noch so hohen Drucken möglich ist; man nennt sie die kritische Temperatur des Gases. Sie ist bei Kohlensäure 31°C, entsprechend der Linie welche in Abb. 84 durch den Punkt K (den „kritischen Punkt") führt.

3. Man kann hierbei noch eine sehr bemerkenswerte Beobachtung machen. Hat man nämlich oberhalb der kritischen Temperatur (z. B. bei 40°) das Gas (wie unter 2.) ohne Verflüssigung auf sehr kleines Volum gebracht, bis ein Druck von etwa 150 Atm., entsprechend dem Punkte p in der Abb. 84, erreicht ist, und ändert man nun die Temperatur auf etwa 20°, so daß man unter die kritische Temperatur kommt, so sieht man das Volum bei gleichbleibendem Druck schrumpfen — was ganz der Kühlung entspricht — ohne daß aber irgendwelche sonstige Veränderung im Rohr sich zeigt. Es könnte das Ganze noch immer gasförmig sein; jedoch, da nun die Temperatur unter der kritischen ist, müßte bei so kleinem Volum alles flüssig sein. Man müßte in Abb. 84 von p nach q, vom Gasraum in den Flüssigkeitsraum gekommen sein. Dies ist auch tatsächlich der Fall; allmähliche Entlastung zeigt es; was vorher Gas war, sieht man jetzt nach einiger Dehnung plötzlich versieden, bis endlich, dem Wege über q e c a entsprechend, alles versotten und wirklich wieder Gas (ungesättigter Dampf) geworden ist. Es ist das der sehr bemerkenswerte Übergang von Gas in Flüssigkeit durchs ganze Volum auf einmal, der hier zur Beobachtung kam; er ist nur bei Durchschreitung der kritischen Temperatur möglich.

Diese Verflüssigung im ganzen Volum zeigt unmittelbar, daß bei der kritischen Temperatur Flüssigkeit und Gas gleiches spezifisches Gewicht haben; denn es sondert sich keine schwerere Flüssigkeit von leichterem Gase. Daß auch keine Absonderung der Flüssigkeit in Tropfen stattfindet zeigt außerdem, daß die Oberflächenspannung der Flüssigkeit bei der kritischen Temperatur Null wird (M 345). Demnach muß auch die gesamte Verdampfungswärme, äußere wie innere, bei der kritischen Temperatur Null werden (226). Es besteht dann aber bei dieser Temperatur (und dem zur Verflüssigung nötigen Druck) überhaupt kein Unterschied zwischen Flüssigkeit und Gas.

Die kritische Temperatur bildet auch das natürliche Ende der Dampfspannungstabelle. Bei Temperaturen über der kritischen verliert die Tabelle ihren Sinn, da es dann überhaupt keinen gesättigten Dampf mehr gibt, sondern nur Gas, das man in diesem Falle auch „überhitzten Dampf" nennen kann, zum Unterschied von „ungesättigtem Dampf" unterhalb kritischer Temperatur (vgl. Abb. 84). Zur kritischen Temperatur gehört der „kritische Druck", der höchste in der Dampfspannungstabelle vorkommende Druck, bei Kohlensäure etwa 72 Atm. (vgl. Tab. 35).

Tab. 35. **Kritische Temperaturen.**

Wasser	374 °C	Sauerstoff	— 118·8 °C
Alkohol	243	Argon	— 121
Äther	194	Kohlenoxyd	— 140
Schwefelige S.	157	Stickstoff.	— 147
Chlor	144	Wasserstoff	— 240
Kohlensäure	31	Helium	— 267·8

Die kritische Temperatur ist aus den Größen a und b in van der Waals Gleichung (39, 213) berechenbar; sie ist die Temperatur, für welche eine horizontale Tangente mit Wendepunkt (K) an der durch die Gleichung dargestellten Linie auftritt. Umgekehrt können aus experimenteller Ermittelung der kritischen Temperatur und des kritischen Druckes a und b berechnet werden (vgl. 1. Note zu 213).

240. Verflüssigung des Sauerstoffs. — Nach diesen an der Kohlensäure gewonnenen Erkenntnissen war zu denken, daß auch jedes der anderen Gase seine besondere kritische Temperatur habe, oberhalb derer es nicht verflüssigt werden kann, und daß diese Temperatur für die bis dahin unverflüssigten Gase nur besonders tief liege, so daß es bei den Verflüssigungsversuchen nur an genügender Kühlung gefehlt habe. Dies hat sich vollkommen bestätigt.

Tab. 35 gibt kritische Temperaturen für eine Reihe von Stoffen[1]) an; man sieht, wie sehr verschieden hoch oder tief diese Temperatur liegen kann. Bei den Stoffen, die man flüssig zu sehen gewohnt ist, liegt sie hoch; bei den so lange für unverflüssigbar gehaltenen Stoffen liegt sie tief.

Am ersten gelang die Verflüssigung bei Sauerstoff, indem man zu den schon gebräuchlichen Kühlungsmitteln (198, 227) noch die Kühlung durch plötzliche Volumvergrößerung des Gases hinzufügte (61, 71). Es gelang so, das Auftreten von Nebel und Tröpfchen im plötzlich entlasteten, schon vorgekühlten Sauerstoff festzustellen (Cailletet 1877), und damit war erkannt, daß die Verflüssigung möglich ist, daß es flüssigen Sauerstoff gibt.

Man kann den gleichen Versuch, ein Gas in einer Umgebung von über kritischer Temperatur auf Augenblicke unter kritische Temperatur zu bringen und daher kurze Zeit flüssig zu sehen, leicht an Kohlensäure mit der vorbeschriebenen Einrichtung (239) im Glasrohr ausführen. Hat man die Kohlensäure bei 40° auf 100 Atm. gebracht, wobei sie nicht flüssig wird (wie unter 2., 239), und entlastet man dann plötzlich, so daß schnell Volumvergrößerung etwa aufs Vierfache eintritt, so sieht man das ganze Volum für kurze Zeit von dickem weißen Nebel erfüllt, der bei reinem, trockenem Gase nur aus flüssiger Kohlensäure bestehen kann; am Glasrohr und am Quecksilber kann sich keine Flüssigkeit halten, weil diese über kritischer Temperatur sind; nur das Innere des Gases wird bei der plötzlichen Dehnung erkaltet.

241. Luftverflüssigung im großen. — Zu andauernder Herstellung genügend tiefer Temperatur läßt man das auf hohen Druck gebrachte und möglichst vorgekühlte Gas andauernd sich dehnen, indem es durch eine enge Öffnung in einen Raum niedrigeren Druckes gelangt, von wo es dann wieder

[1]) Zu bemerken ist, daß die kritische Temperatur immer einer bestimmten Molekülsorte zuzuschreiben ist. Ändert sich die Molekulargröße, etwa durch Komplexbildung („Polymerisierung") bei hohem Druck, so hat die neue Molekülsorte auch eine andere kritische Temperatur.

auf hohen Druck zurückgepumpt wird. In diesem Kreislauf des Gases tritt an der Dehnungsstelle („Drosselstelle") Temperaturerniedrigung ein, die allerdings anfangs nicht groß ist; das von dieser Stelle abströmende, erkaltete Gas wird aber dem dorthin zuströmenden entgegen geleitet, es in einem Doppelwandrohr umgebend, so daß die Vorkühlung des zuströmenden Gases verbessert wird. Das Doppelwandrohr, in welchem dies geschieht, ist eine lange, gewundene Rohrleitung, die aus zwei ineinander gesteckten Rohren besteht; das innere Rohr bringt die Luft mit hohem Druck, das äußere, umgebende läßt sie mit dem erniedrigten Druck zurückströmen. Diese andauernd sich verbessernde Kühlung führt schließlich an der Dehnungsstelle unter die kritische Temperatur (239), und von da an tritt dort flüssige Luft auf, die gesammelt und abgelassen werden kann. An ihre Stelle muß im gleichen Maße frische Luft von außen in den Kreislauf eingepumpt werden, für 1 Liter flüssiger Luft etwa 1 m^3 gasförmige Luft.

242. Kälte durch Arbeit gegen innere Kräfte. — Diese fortdauernde Kälteerzeugung bei Volumvergrößerung des Gases wäre nicht möglich, wenn das Gas an der Drosselstelle genau nach Boyles und Mariottes Gesetz sich verhielte. Denn die bei Herauspressung eines Volums V_1 des Gases beim Druck p_1 am Gas geleistete Arbeit p_1V_1 (M 378) wäre dann gleich der vom entlasteten, auf das Volum V_2 gedehnten Gase gegen den verringerten Druck p_2 wieder abgegebenen Arbeit p_2V_2, weil nach jenem Gesetz $p_1V_1 = p_2V_2$ ist, und wenn die Dehnung des Gases im ganzen ohne Arbeitsleistung erfolgt, könnte es nicht kalt werden (71). Die tatsächlich eintretende Erkaltung ist nur Folge der Abweichung des Gases von Boyles und Mariottes Gesetz und zwar derjenigen Abweichung, welche durch die gegenseitigen Anziehungskräfte der Moleküle verursacht ist (M 359). Diese Anziehungskräfte bedingen nicht nur, daß $p_2V_2 > p_1V_1$ ist, daß also Arbeit vom Gas nach außen abgegeben wird, sondern es wird bei der Dehnung außerdem auch innere Arbeit gegen diese Kräfte geleistet.

Die Erkaltung bei der Entlastung fortlaufend zugepumpten Gases beweist geradezu das Bestehen dieser Anziehungskräfte auch im Gaszustand, und sie wurde zur Entscheidung der Frage nach diesen Kräften auch schon zu früher Zeit gesucht und festgestellt. (Joule und W. Thomson 1852—1862). Die Erkaltung zeigte sich dabei sehr gering bei gewöhnlicher Anfangstemperatur, jedoch mit sinkender Temperatur stark wachsend, und letzteres macht sie besonders geeignet zur Erreichung tiefster Temperaturen. Das Wachsen der Erkaltung bei tiefer Temperatur ist verständlich, weil dann die Moleküle durchschnittlich näher beieinander, die Molekularkräfte also größer sind; die hohen Drucke der Gasverflüssigungsmaschinen (200 Atm.) wirken in derselben Weise günstig.

Bei zu hohem Druck kann die Erkaltung durch Volumvergrößerung weniger werden, und im Falle sehr geringer Molekularkräfte (wie bei Wasserstoff) kann sie ganz versagen, und es kann sogar Erwärmung eintreten. Dies ist nach Kenntnis derjenigen entgegengesetzten Abweichungen von Boyles und Mariottes Gesetz verständlich, die auf der gegenseitigen Undurchdringlichkeit der Moleküle beruhen (M 359). Bei genügend tiefer Anfangstemperatur und nicht zu hohem Druck ist aber bei allen Gasen die Erkaltungswirkung beobachtet und zur Verflüssigung der Gase verwertbar gewesen (244).

243. Flüssige Luft, eine klare,[1]) leicht bewegliche Flüssigkeit, kann in offenen

[1]) Kohlensäuregehalt gibt Trübung von fester Kohlensäure.

Gefäßen gut aufbewahrt werden, wenn sie vor Wärmezufuhr geschützt wird. Hierzu sind die Gefäße mit luftleerer Doppelwand und spiegelndem Metallüberzug (169) sehr geeignet. Ist Wärmezufuhr vorhanden, z. B. bei Eintauchen eines Körpers von Zimmertemperatur in die flüssige Luft, so siedet sie auf, wobei die zugeführte Wärme als Verdampfungswärme verbraucht wird, solange bis alles auf den Siedepunkt der Luft, rund —190°C, gekühlt ist. Diese Temperatur behält überhaupt die flüssige Luft solange sie noch vorhanden ist; man hat also mit ihr diese tiefe Temperatur zu steter Verfügung.

Da der Siedepunkt des Stickstoffs (—196°) tiefer liegt als der des Sauerstoffs (—183°, Tab. 33), so versiedet und entweicht zuerst vorwiegend der Stickstoff, und der Rest reichert Sauerstoff an, was an der blauer werdenden Färbung ersichtlich wird. Man kann durch geeignete Einrichtung der Luftverflüssigungs-Vorrichtung auch getrennt flüssigen Sauerstoff und flüssigen Stickstoff erhalten.

244. Verflüssigung des Wasserstoffs und Heliums. — So tief auch die durch flüssige Luft verfügbar gewordenen Temperaturen liegen: zur Verflüssigung von Wasserstoff und Helium genügten sie doch ohne weiteres nicht. Die kritischen Temperaturen dieser Gase liegen, wie nachher auch genau zu sehen war, besonders tief (Tab. 35).

Um Wasserstoff zu verflüssigen, wird wie bei der Luft verfahren; er muß durch seine Dehnung selber die nötige Erkaltung liefern. Dies ist aber nur ausführbar, wenn der Wasserstoff durch flüssige Luft vorgekühlt ist; seine Molekularkräfte sind so gering, daß bei höherer Anfangstemperatur sogar Erwärmung statt Erkaltung an der Drosselstelle auftreten würde (242).

Flüssiger Wasserstoff ist, wie Stickstoff, eine farblose, leicht bewegliche Flüssigkeit.

Zur Heliumverflüssigung, die die größten Schwierigkeiten machte, wird wieder die Kühlung durch eigene Dehnung benutzt, wobei das Helium durch flüssigen Wasserstoff und dieser etwa durch flüssige Luft vorzukühlen ist. Auch Helium liefert dabei eine farblose Flüssigkeit; sie kann, wie Luft und Wasserstoff, vor Wärmezufuhr geschützt offen aufbewahrt werden.

245. Tiefste Temperaturen. — Mit den flüssigen Gasen hat man die Möglichkeit von Untersuchungen bei tiefsten Temperaturen. Flüssige Luft, deren Verdampfung man durch Abpumpen fördert, so daß Verbrauch ihrer Verdampfungswärme wirksam wird, gibt bis zu —210°, Wasserstoff hält bei Atmosphärendruck —253° aufrecht, Helium —269°, was nur mehr 4° über dem absoluten Nullpunkt ist (Tab. 33).

Es sind daher Sauerstoff, Stickstoff auch in fester Form erhältlich; Wasserstoff wird leicht fest, wenn er, verflüssigt, abgepumpt wird; Helium war nur mit Zuhilfenahme erhöhten Druckes zu verfestigen. Alle diese festen Stoffe sind farblos, wie überhaupt bei tiefsten Temperaturen die Lichtabsorptionen zurückzutreten scheinen, was zu ihrem Hervortreten bei hohen Temperaturen stimmt (173).

Nicht nur das Eintreten des festen Zustandes ist das allgemeine Ergebnis bei den tiefsten Temperaturen, sondern die festen Körper verlieren auch diejenigen Eigenschaften, welche als Übergang in die flüssige Form aufgefaßt werden können (M 273); sie werden starrer, d. h. ihre elastischen Kräfte werden

erhöht, und sie werden auch vollkommener elastisch; Zähigkeit verschwindet. Eine Glocke aus Blei, die bei Zimmertemperatur nur dumpf und kurz zu tönen vermag, gibt nach Kühlung in flüssiger Luft einen langanhaltenden Ton, wie eine Stahlglocke. Kautschuk wird hart und spröde, wie Glas. Dies ist verständlich, da mangels Wärmebewegung größte Annäherung der Moleküle und Atome und damit beste Entwickelung der Molekularkräfte erfolgt.

Die Wärmeausdehnungskoeffizienten gehen bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt gegen Null (12), ebenso die spezifischen Wärmen. Die Ursache von letzterem ist in der eigentümlichen Energieverteilung unter den Molekülen der festen Körper bei tiefen Temperaturen zu sehen (57).

Alle chemischen Umsetzungen treten zurück, weil die Bewegungslosigkeit der Moleküle den Atomaustausch verhindert. Metallisches Natrium wird von Salzsäure bei der Temperatur der flüssigen Luft nicht angegriffen.

Sehr bemerkenswert ist die Entdeckung, daß der elektrische Leitungswiderstand bei Heliumtemperaturen nicht nur klein, sondern geradezu Null werden kann (E 511).

Zur Herstellung von Temperaturen unter 4^0abs. fördert man die Verdampfung flüssigen Heliums durch Abpumpen des Gases, wodurch die Temperatur bis etwa 1^0abs. sinkt. Weitere Annäherung an den absoluten Nullpunkt ist aber so nicht möglich, weil der bei 4^0 noch 1 Atm. betragende Dampfdruck des Heliums bei 1^0 nur mehr 0·15 mm ist und dann sehr schnell weiter sinkt, so daß Verdampfung kaum mehr stattfindet. Es kommen dann besondere Methoden in Betracht, die noch in Ausbildung begriffen sind, die aber auch vom flüssigen Helium ausgehen. Über eine magnetische Methode s. E 313.

Das Helium selbst nimmt bei tiefsten Temperaturen sonderbare, noch wenig verstandene Eigenschaften an.

VI. Wärmemotoren.

246. Dampfmaschine. — Das Urbild aller Wärmemotoren, an dem deren Anwendungen in größtem Maßstab sich entwickelt haben, ist die Dampfmaschine. An ihr sind auch die allgemein wichtigen Erkenntnisse über die Grenzen der Verwandelbarkeit von Wärme in Arbeit gewonnen, woraus dann noch viel weitere Schlußmöglichkeiten folgten („Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik"), die wir in diesem Abschnitt behandeln.

Abb. 87 stellt das für die Verwandlung der Wärme in Arbeit Wesentliche der Dampfmaschine dar: den Kessel mit der Temperatur T_2, den Kondensator (Watt 1765) mit der Temperatur $T_1 < T_2$, den Dampfzylinder D und die Wasser- oder Speisepumpe W. Die Drucke im Kessel und im Kondensator richten sich gemäß der Dampfspannungstabelle nach den Temperaturen T_2 und T_1, da Luft nicht vorhanden ist. Der Dampf kommt aus dem Kessel in den Zylinder, während bei b zu ist, und arbeitet am Kolben; die Maschine hat dann selber a geschlossen und danach b geöffnet; jetzt strömt der Dampf in den Kondensator, was das Zurückgehen des Kolbens gegen den geringen Kondensatordruck ermöglicht. Währenddessen hat die Maschine mittels W so viel Wasser in den Kessel zurückgebracht als er in Dampfgestalt verloren hat. Damit ist die Wirkungsweise der Maschine im wesentlichen beschrieben; es folgen nur mehr Wiederholungen desselben Vorgangs, und alles sonstige ist für die Grundfrage, die Verwandlungsfähigkeit der Wärme in Arbeit betreffend, nebensächlich[1]).

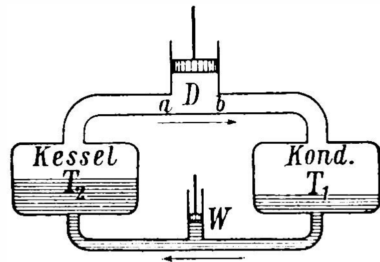


Abb. 87. Schema der Dampfmaschine.

Man sieht, daß das Wasser in der Maschine einem Kreislauf im Sinne der Pfeile unterworfen ist. Dabei kehrt nach jeweils einmaliger Durchlaufung des Kreises immer derselbe Zustand des Wassers — mit Dichte, Druck und Temperatur — wieder. Die Dampfmaschine bietet damit das Urbeispiel eines „Kreisvorganges". Kreisvorgänge, die auch an anderen Stoffen als Wasser ablaufen können, sind — wie sich später zeigt — von allgemeiner Wichtigkeit für die zu gewinnenden Einsichten.

Dampfmaschinen ohne Kondensator, wie die Lokomotiven, puffen den Dampf aus dem Zylinder ins Freie aus, und sie beziehen das Speisewasser

---

[1]) Daß z. B. eine von der Maschine getriebene Luftpumpe den Kondensator luftfrei hält, fördert nur die Geschwindigkeit der Drucksenkung in D, sobald a zu und b offen ist. Ist keine Luft, nur Dampf vorhanden, so sinkt der Druck sofort auf denjenigen geringen Druck herab, der dem kältesten Punkt der miteinander verbundenen Räume, nämlich dem Kondensator, entspricht (212). Wird der Kondensator durch eingespritztes Wasser gekühlt, statt von außen, so muß das überschüssige Wasser wieder fortgeschafft werden, und es gibt noch mehrere dergleichen Nebenvorgänge an Dampfmaschinen.

des Kessels auch aus dem Freien; bei ihnen wirkt die ganze Atmosphäre als Kondensator.

Dem Kessel wird von der Feuerung fortdauernd Wärme zugeführt, um ihn bei gleichbleibender Temperatur T_2 zu halten, entgegen dem Verbrauch von Verdampfungswärme und von Wärme zur Erhitzung des Speisewassers. Dem Kondensator muß dagegen fortdauernd Wärme entzogen werden, was durch Kühlwasser geschieht, um seine niedrige Temperatur T_1 aufrecht zu halten, entgegen der ständigen Zufuhr der Verdichtungswärme des in ihn strömenden Dampfes[1]).

247. Wirkungsgrad. — Man bemerkt somit bei der Dampfmaschine, was bei allen sehr verschiedenen Vorgängen von Arbeitsleistung durch Wärme schon zu bemerken war (15, 25, 43) und was auch für alle sonstigen Wärmemotoren (251) gilt, auch wenn sie mit Thermosäulen arbeiten (E 228), und was außerdem mit allgemeinster Erfahrung fest zusammenhängend sich zeigte (111, 112): daß Wärme nur dann andauernd Arbeit leisten kann, wenn gleichzeitig ein Teil der zur Verfügung stehenden Wärme unverwandelt von einem heißeren Körper zu einem kälteren übergeht. Bei der Dampfmaschine findet dieser Übergang vom Kessel zum Kondensator statt.

Ist Q_2 die dem Wärmemotor zugeführte Wärmemenge, Q_1 die von ihm unverwandelt wieder abgegebene Wärmemenge, $Q_2—Q_1$ also die in Arbeit verwandelte Wärmemenge, so wird $(Q_2—Q_1)/Q_2$ der Wirkungsgrad des Motors genannt. Er ist der in Arbeit verwandelte Bruchteil der Wärme und liegt zwischen 0 und 1, ohne aber 1 ganz erreichen zu können, weil Q_1 nicht verschwindet.

Als die Wärme noch nicht als Energieform erkannt war, erschien dies Verhalten der Wärmemotoren in Analogie mit dem der Wassermotoren. So wie in den letzteren das Wasser von einem höher gelegenen Ort nach einem tiefer gelegenen fallen muß, um Arbeit leisten zu können, wobei seine Menge unverändert bleibt, so schien die Wärme in den Wärmemotoren ebenfalls ohne Mengenänderung nur von höherer Temperatur auf tiefere Temperatur „fallen" zu müssen. Und wie in den Wassermotoren die mit gegebener Wassermenge zu erhaltende Arbeit proportional der Höhenstufe ist, so war in den Wärmemotoren die Arbeitsleistung mit gegebener Wärmemenge proportional der verfügbaren Temperaturstufe anzunehmen. Letzteres hat sich auch als richtig erwiesen, wenn auch die Temperaturstufe nicht allein maßgebend ist, sondern Anfangs- und Endtemperatur, T_2 und T_1, beide einzeln bekannt sein müssen, um den Wirkungsgrad festzulegen (253), und wenn auch die Menge der Wärme bei der Arbeitsleistung dem Energiegesetz entsprechend abnimmt (74).

248. Umkehrbarkeit. — Wichtig war immer die Frage nach der höchsten möglichen Arbeitsleistung durch Wärme bei gegebener Anfangs- und Endtemperatur T_2 und T_1, zunächst bei der Dampfmaschine und dann auch bei den anderen Wärmemotoren. Es zeigte sich, daß die beste, nicht weiter zu

[1]) Da die Verdichtungswärme bei der tiefen Temperatur T_1 des Kondensators größer ist als die Verdampfungswärme bei der höheren Temperatur T_2 des Kessels (226), so ist ersichtlich, daß zur Verwandlung in Arbeit sogar nur ein Teil der zur Erhitzung des Speisewassers von T_1 auf T_2 erforderlichen Wärme in Betracht kommt.

steigernde Leistung, der höchste Wirkungsgrad, dann eintritt, wenn die Maschine vollkommen umkehrbar arbeitet (S. Carnot 1824).

Die Umkehrung der Dampfmaschine besteht darin, daß man mit Aufwendung von Arbeit ihr Schwungrad zurückdreht. Die Maschine wirkt dann mittels ihres Zylinders als Pumpe, und sie pumpt Wasserdampf aus dem Kondensator in den Kessel und von diesem mittels der ebenfalls verkehrt wirkenden Speisepumpe in den Kondensator zurück. Es sind dann also mit der Umkehrung der Arbeitsübertragung, die jetzt in die Maschine hinein statt aus ihr heraus geht, nicht nur die Bewegungen der festen Teile der Maschine umgekehrt, sondern auch der Kreislauf des Wassers. Aber auch die Bewegungen der Wärme sind verkehrt; denn der Kondensator verliert jetzt Verdampfungswärme und der Kessel gewinnt die Verdichtungswärme. Ungeändert bleibt nur die Temperaturverteilung in der Maschine; der Kessel hat immer die hohe Temperatur T_2, der Kondensator die tiefe T_1, nur daß zur Erhaltung dieser Temperaturen dem Kessel jetzt Wärme entzogen, dem Kondensator aber Wärme zugeführt werden muß.

Man sieht, daß die Dampfmaschine bei der Umkehrung als Kältemaschine wirkt (227); sie fördert unter Arbeitsaufwand Wärme von einem kälteren Körper, dem Kondensator, zu einem wärmeren, dem Kessel.

249. Nichtumkehrbare Vorgänge. — Diese Umkehrung der Vorgänge in der Maschine kann mehr oder weniger vollkommen sein. Leicht kann es vorkommen, daß einzelne Teile des Gesamtvorganges die Umkehrung nicht mitmachen. Es zeigt sich, daß jede solche Unvollkommenheit der Umkehrung die Arbeitswirkung der Maschine verschlechtern muß, weil sie Verlust von Arbeit oder von Wärme gibt; daher der beste Wirkungsgrad bei vollkommener Umkehrbarkeit. Es seien folgende Hauptfälle nichtumkehrbarer Vorgänge betrachtet:

Jeder Reibungsvorgang, sei es an den beweglichen festen Teilen der Maschine oder beim Strömen des Dampfes in den Rohrleitungen, ist nichtumkehrbar; denn er bringt Wärme hervor, die bei der Umkehrung der Bewegungsrichtung nicht Kälte wird, sondern wieder Reibungswärme bleibt. Reibung bedeutet aber auch Arbeitsverlust.

Jede Ableitung von Wärme aus der Maschine nach außen hin, z. B. aus dem Kessel, ist ebenfalls nicht umkehrbar; sie verwandelt sich bei der Umkehrung nicht in Zuleitung von Wärme, sondern bleibt dem Temperaturgefälle folgend; sie bedeutet aber auch Verlust.

Nicht umkehrbar ist auch das stoßweise Hinüberströmen des Dampfes aus dem Zylinder in den Kondensator, sobald a geschlossen und b geöffnet ist (Abb. 87). Der hohe Druck im Zylinder grenzt dann an den tiefen des Kondensators; diese Druckstufe gleicht sich beim Vorausgang der Maschine aus, sie stellt sich aber beim umgekehrten Gang keinesfalls her. Ihre Ausgleichung ist ein gar nicht umkehrbarer Vorgang, ein Vorgang aber auch, der großen Arbeitsverlust bedeutet. Denn der hohe Druck sowohl als die hohe Temperatur des Dampfes im Zylinder könnten vor Herstellung der Verbindung mit dem Kondensator noch zu Arbeitsleistung benutzt werden. Man sieht, daß dieser nicht umkehrbare Vorgang durch verfeinerte Einrichtung der Maschine vermeidbar ist, indem der Dampfzufluß aus dem Kessel bei a schon vor Beendigung des Kolbenhubes abgeschnitten werden kann, so daß von da ab der im Zylinder

eingeschlossene Dampf mit seinem Drucke noch weiter arbeitet, wobei Druck und Temperatur sinken, bis bei Ende des Kolbenhubes die Verbindung mit dem Kondensator hergestellt wird. Dies geschieht in den „Expansionsmaschinen", die entsprechend vermehrten Wirkungsgrad haben. Vollkommene Umkehrbarkeit und zugleich beste Ausnutzung des Dampfes wäre erreicht, wenn Druck und Temperatur des Dampfes bei Ende des Kolbenhubes nur mehr ebenso groß wären wie im Kondensator. Man nähert sich dem möglichst durch Weiterwirkenlassen des abgesperrten Dampfes in einem besonderen zweiten oder auch noch dritten „Expansions"-Zylinder.

Ebenso hat auch schädlicher Raum (vgl. M 353) im Zylinder nicht umkehrbare Druckstufen und zugleich Arbeitsverlust zur Folge.

Nicht umkehrbar sind auch alle Wärmeübergänge mit großen Temperaturstufen, so besonders die Erwärmung des kalten Speisewassers im Kessel; denn das kalt hineingeleitete Wasser kommt bei Umkehrung nicht kalt heraus. Diese und auch jede sonstige nicht verschwindend kleine Temperaturstufe bedeutet aber auch Arbeitsverlust; denn Temperaturstufen geben immer die Möglichkeit zu Arbeitsleistung; wenn sie aber durch bloße Wärmeleitung zum Ausgleich kommen, bleiben sie ungenutzt. Man sieht daraus auch, daß der gewöhnlich große Überschuß der Feuertemperatur über die Temperatur des Kesselwassers ebenfalls eine schlechte Arbeitsausnutzung der Wärme bedeutet, ganz so wie der Temperaturüberschuß bei Erwärmung des Speisewassers[1]).

250. Vollkommene Umkehrbarkeit. — Das Vorige zusammenfassend kann man sagen, daß für beste Wirkung einer Dampfmaschine nicht nur Verluste von Arbeit und von Wärme nach außen hin vermieden sein müssen, sondern daß auch keine Temperaturstufen und keine Druckstufen von endlicher Größe in der Maschine vorkommen dürfen. Eine Maschine, die all dem entspricht, ist — wie die Beispiele zeigten — auch vollkommen umkehrbar[2]).

Sieht man Wärmeverluste und Arbeitsverluste nach außen als selbstverständlich vermieden an, so kann die Besonderheit der vollkommen umkehrbaren Vorgänge dahin zusammengefaßt werden, daß bei ihnen nur unendlich kleine Temperaturstufen, Druckstufen und Geschwindigkeitsstufen vorkommen dürfen. Die Bezugnahme auf Geschwindigkeitsstufen schließt dabei auch Reibung und unelastischen Stoß und damit Arbeitsverluste im Inneren der Maschine aus.

Man sieht, daß die vollkommene Umkehrbarkeit ein Grenzzustand ist, der zwar nur mit Annäherung, aber doch mit stufenweise gesteigerter Annäherung verwirklicht werden kann. Gedankenversuche mit vollkommen umkehrbaren Kreisvorgängen sind daher erlaubt. (Vgl. M 86.)

---

[1]) Wenn man zur Beurteilung einer Dampfmaschine von der Feuerungstemperatur als Anfangstemperatur ausginge, statt von der Kesseltemperatur, so würde die Maschine besonders schlecht wirkend erscheinen müssen, weil die nicht umkehrbare Wärmeleitung über die beträchtliche Temperaturstufe von der Feuerung in den Kessel mit eingeschlossen wäre. Die ebenfalls nicht umkehrbare Speisewassererhitzung ist aber auch bei Zugrundelegung der Kesseltemperatur mit eingeschlossen, und allein schon deshalb kann keine sonst noch so vollkommene Dampfmaschine den Wirkungsgrad einer vollkommen umkehrbaren, mit den gegebenen Temperaturen arbeitenden Maschine erreichen.

[2]) Am nächsten können dem in der technischen Ausführung sehr große und langsam wirkende Dampfmaschinen kommen.

251. Andere Wärmemotoren. — Es gibt neben der Dampfmaschine noch viele andere Vorrichtungen, die aus Wärme Arbeit leisten, so die Dampfturbinen (M 377), die Explosionsmotoren mit gasförmigen und flüssigen Betriebsstoffen verschiedener Art, auch Heißluftmotoren; auch die früher schon betrachteten Beispiele von dauernden Arbeitsleistungen durch Wärme gehören dazu (15, 25, 43), und viele mögliche Abänderungen wären angebbar, wie z. B. Dampfmaschinen, die mit anderen Flüssigkeiten als Wasser zu betreiben wären. Gemeinsam ist allen diesen Vorrichtungen, daß Wärme Arbeit bei Volumänderung leistet, wie in der Dampfmaschine. Daher gilt auch für alle diese Motoren, wie für die Dampfmaschine, daß sie bei gegebener Anfangs- und Endtemperatur die meiste Arbeit aus gegebener Wärmemenge liefern, den höchsten Wirkungsgrad haben, wenn sie keine Wärme und keine Arbeit verlieren, keine endlichen Temperaturstufen, Druckstufen und Geschwindigkeitsstufen benutzen (250), d. h. wenn sie vollkommen umkehrbar arbeiten.

252. Alle vollkommen umkehrbaren Wärmemotoren mit gleicher Anfangs- und Endtemperatur haben den gleichen Wirkungsgrad. — Dieser Satz wird nach der vorausgegangenen Kenntnis durch einen erlaubten Gedankenversuch (250) erwiesen (Clausius 1850); er ist von großer Tragweite, nicht nur weil er Klärung gibt über die bei den Wärmemotoren beliebiger Art vorhandenen Möglichkeiten, sondern auch wegen zahlreicher weiterer Folgerungen, die er vermittelt (253 u. f.).

Der Gedankenversuch wird mit zwei Motoren I und II ausgeführt, die beide an dieselben Wärmebehälter T_2 und T_1 (Kessel und Kondensator) geschlossen sind, mit denen sie Wärmeaustausch haben. Die Motoren I und II sind in Abb. 88 durch Rechtecke dargestellt, die Wärmebehälter durch Quadrate.

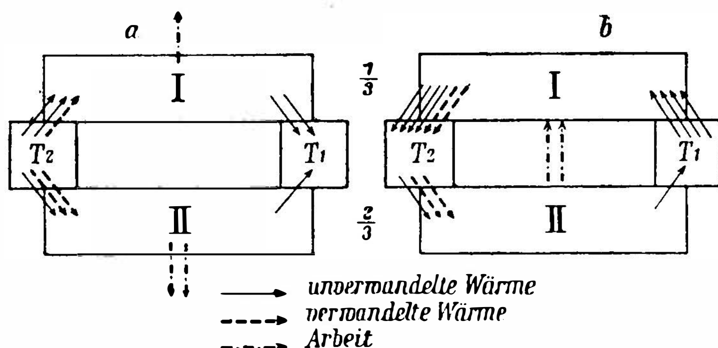


Abb. 88 a und b. Clausius' Gedankenversuch.

Beide Motoren seien vollkommen umkehrbar; sie sollen aber verschiedene Wirkungsgrade haben, nämlich im Beispiel der Abbildung der Motor I den Wirkungsgrad $^1/_3$ und II den Wirkungsgrad $^2/_3$. Abb. 88a zeigt die Wirkung der beiden Motoren: Beide empfangen in gegebener Zeit 3 Wärmeeinheiten von T_2 (dargestellt durch je 3 Pfeile); I verwandelt, seinem Wirkungsgrade $^1/_3$ entsprechend, eine dieser Wärmeeinheiten in eine äquivalente Arbeitseinheit, die nach außen abgegeben wird (dargestellt durch den mittleren Pfeil), während

2 Wärmeeinheiten unverwandelt an T_1 abgegeben werden; II liefert, dem Wirkungsgrad $^2/_3$ entsprechend, 2 Arbeitseinheiten nach außen, während eine Wärmeeinheit unverwandelt nach T_1 geht.

Der entscheidende Gedankenversuch besteht nun darin, daß die von II gelieferten Arbeitseinheiten in die Maschine I geleitet und dazu benutzt werden, diese Maschine umgekehrt laufen zu lassen. Abb. 88b stellt dies durch die Pfeile dar. Bei der Maschine II ist alles unverändert wie in a; bei der Maschine I verdoppeln sich alle Pfeile, weil sie jetzt mit 2 Arbeitseinheiten betrieben wird, außerdem sind alle Pfeile umgekehrt gerichtet, wie es der vollkommenen Umkehrbarkeit der Maschine entspricht. Man sieht die Wirkung: T_2 empfängt doppelt so viel Wärme von I als an II abgeht, wird also heißer; T_1 dagegen verliert im ganzen Wärme, wird also kälter. Dies ist Wärmeübergang von einem kälteren Körper T_1 auf einen heißeren T_2 und zwar andauernd und von selber, ohne äußere Einwirkung auf die Gesamtheit dieser aus I, II, T_2 und T_1 bestehenden Vorrichtung, die somit unbegrenzt diese nach Erfahrung unmögliche Wirkung (111, 112) haben würde. Da diese Wirkung auf der Ungleichheit der Wirkungsgrade der beiden Maschinen I und II beruht, kann diese Ungleichheit nicht möglich sein. Es kann auch nicht etwa der Wirkungsgrad von I größer sein als der von II, weil man sonst bei Rücktreibung von II durch I wieder das unmögliche Ergebnis hätte. Sind also beide Maschinen vollkommen umkehrbar, wie im Gedankenversuch, so können sie nicht ungleiche Wirkungsgrade haben; nur bei gleichem Wirkungsgrad bleibt das unmögliche Ergebnis aus. Damit ist der vorangestellte Satz, als durch die Natur der Dinge gegeben, erwiesen.

253. Größe des Wirkungsgrades aller vollkommen umkehrbaren, mit gleichen Temperaturen arbeitenden Wärmemotoren. — Die erwiesene Gleichheit des Wirkungsgrades erlaubt die Berechnung von dessen Größe an einem beliebigen, möglichst einfach zu wählenden Fall. Einen solchen bietet ein Heißluftmotor[1]), der mit verdünntem Gase folgendermaßen arbeitet: Eine abgeschlossene Luftmenge empfängt vom Wärmebehälter T_2 eine Wärmemenge Q_2, wobei die Luft unter entsprechender Arbeitsleistung sich dehnt, ohne aber ihre Temperatur zu ändern, die schon anfänglich T_2 gewesen sei. Darauf werde der Wärmebehälter von der Luft fortgenommen, und es dehne sich dieselbe jetzt ohne Wärmezufuhr Arbeit leistend weiter, wobei ihre Temperatur auf T_1 sinkt. Nun werde die Luft — um den Vorgang wiederholbar zu machen — unter Aufwendung von Arbeit zusammengepreßt und zwar ohne Temperaturänderung, indem sie eine entsprechende Wärmemenge Q_1 an einen Wärmebehälter der Temperatur T_1 abgeben kann. Endlich werde bei Fortnahme des Wärmebehälters T_1 nochmals Arbeit aufgewendet, um die Temperatur der Luft ohne Wärmezufuhr auf T_2 zu steigern. Die dabei eingehaltenen Volume seien so abgepaßt, daß die Luft zuletzt mit Erreichung der Anfangstemperatur T_2 auch wieder ihr Anfangsvolum habe. Sie hat damit einen Kreisvorgang durchgemacht, der beliebig oft wiederholt werden kann, womit die Maschine zu dauernder Arbeitsleistung geeignet ist. Es genügt zur

[1]) Heißluftmotoren verschiedener Einrichtungen wurden früher viel als Kleinmotoren benutzt, weil sie keinen erst anzuheizenden Wasserkessel haben und daher schnell in Gang zu setzen sind.

Beurteilung ihrer Wirksamkeit die Betrachtung des einzelnen, beschriebenen Kreisvorgangs.

Man kann den Kreisvorgang noch viel kürzer beschreiben, wenn man die Bezeichnungen „adiabatisch“ und „isothermisch“ einführt. Adiabatisch heißt: ohne Wärme-Zu- oder -Abfuhr[1]); isothermisch heißt: ohne Temperaturänderung. Es arbeitet somit die Luft erst isothermisch bei T_2, dann adiabatisch von T_2 bis T_1; dann wird sie isothermisch bei T_1 und zuletzt adiabatisch von T_1 bis T_2 zusammengedrückt, womit sie das alte Volum erreicht haben soll.

Die vollkommene Umkehrbarkeit des Kreisvorgangs ist leicht einzusehen: es kommen keine Temperatursprünge und keine Druckstufen in ihm vor, und auch die sonstigen Erfordernisse (250) sind mit gehöriger Annäherung erfüllbar.

Zur Berechnung des Wirkungsgrades dieses Kreisvorganges ist es nur erforderlich, das Verhältnis Q_2/Q_1 der beiden Wärmemengen zu ermitteln, die bei den Temperaturen T_2 bzw. T_1 dem Gas zugeführt bzw. wieder entzogen werden; es ist dann auch der Wirkungsgrad $(Q_2 - Q_1)/Q_2$ (247) bekannt. Bei dieser Berechnung kommen nur die wohlgesichert bekannten, einfachen Eigenschaften der verdünnten Gase und das Energiegesetz in Betracht; sie bietet daher grundsätzlich nichts Neues[2]). Ihr Ergebnis ist $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$; somit ist der Wirkungsgrad

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}, \qquad 253)$$

in Worten: Der Wirkungsgrad irgendeines vollkommen umkehrbaren Wärmemotors, nämlich das Verhältnis der von ihm in Arbeit verwandelten Wärme zur gesamten von ihm aufgenommenen Wärme, ist gleich dem Verhältnis des Unterschiedes der beiden Temperaturen, bei welchen er Wärme aufnimmt und abgibt, zur höheren dieser beiden Temperaturen.

254. Beispiele. — Dies also ist der Wirkungsgrad aller beliebig beschaffenen, jedoch aufs beste, d. i. vollkommen umkehrbar eingerichteten Wärmemotoren, die mit den Temperaturen T_2 und T_1 arbeiten. Daß er nur von den beiden Temperaturen abhängt, gar nicht von der besonderen Art der Arbeitsweise der Motoren, auch nicht von dem in ihnen benutzten Stoffen, wie schon frühe gedacht (247), hat sich somit bestätigt, auch daß der Wirkungsgrad dem Unterschied der beiden Temperaturen, $T_2 - T_1$, proportional ist; doch zeigt sich, daß außerdem noch T_2 mitbestimmend ist, so daß bei gleicher Temperaturstufe $T_2 - T_1$ der Wirkungsgrad mit Erniedrigung von T_2 und T_1 besser wird. Der Wirkungsgrad 1 würde erreicht, wenn für den kalten Teil (den Kondensator bei der Dampfmaschine) der absolute Nullpunkt zur Verfügung stünde ($T_1 = 0$). Dies ist in aller Anwendung ausgeschlossen; das Erfordernis dauernder Kühlung des Kondensators, z. B. der Dampfmaschine, läßt kaum unter $T_1 = 293^0$ ($= 20^0$C) herunterkommen. Es kommt dann ganz darauf an, T_2 möglichst hoch zu machen, was bei der Dampfmaschine möglichst hohen Kesseldruck oder aber Nacherhitzung des Dampfes bedeutet („Heißdampfmaschinen“).

Beispielsweise wird für einen Kesseldruck von 10 Atm. (ohne Überhitzung des Dampfes) $T_2 = 453^0$ ($= 180^0$C, Tab. 32), was mit $T_1 = 293^0$ ($= 20^0$C) den Wirkungsgrad $(T_2 - T_1)/T_2 = 0{\cdot}35$ gibt. Es könnte also selbst bei vollkommener

[1]) Siehe dazu Anhang W II, 1.

[2]) Die Ausführung der Rechnung ist im Anhang W III zu finden.

Umkehrbarkeit nur rund $^1/_3$ der in den Kessel geleiteten Wärme in Arbeit verwandelt werden[1]). Mit $T_2 = 573^0$ (= 300°C, Heißdampfmaschine) wird der höchstmögliche Wirkungsgrad 0·49. Die Verbrennungsmotoren (Explosionsmotoren) haben den Vorteil noch viel höherer Temperaturen T_2, allerdings auch mit erhöhter Temperatur T_1 der Auspuffgase.

Die unmittelbare Verwandlung von chemischer Energie in mechanische Arbeit, unter Umgehung der Wärme, wie sie der lebende Muskel leistet, erreicht hohe Wirkungsgrade (134), ohne der Temperaturstufen zu bedürfen, die nur notwendig werden, wenn die chemische Energie erst in Wärme und diese dann in mechanische Arbeit verwandelt wird, wie es in der Dampfmaschine und den Verbrennungsmotoren geschieht. Es versteht sich aus der Herleitung der Gl. 253, daß sie nur für den Wirkungsgrad der Verwandlung von Wärme in Arbeit gilt; sie ist eine Gleichung für Wärmemotoren.

255. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik. — Thermodynamik, auch kurz „Wärmetheorie" (früher „mechanische Wärmetheorie") genannt, ist die Zusammenfassung aller quantitativen Beziehungen zwischen Wärme und Arbeit und der zugehörigen Folgerungen. Sie stützt sich auf zwei „Hauptsätze".

Der I. Hauptsatz ist das Energiegesetz, im besonderen die Äquivalenz von Wärme und Arbeit (70 u. f.).

Der II. Hauptsatz hat seinen Ursprung in der Erkenntnis vom einheitlichen, allein durch die Temperaturen bestimmten Wirkungsgrad der vollkommen umkehrbaren Kreisvorgänge (252). Diese Erkenntnis ist weitgehend wichtig geworden durch die Möglichkeit, aus ihr quantitative Schlüsse für viele Wärmevorgänge zu folgern. Gelingt es, einen in quantitativer Beziehung noch ungeklärten Vorgang in einen vollkommen umkehrbaren Kreisvorgang einzubeziehen, den man als Gedankenversuch ablaufen läßt, so gibt die Kenntnis des Wirkungsgrades sogleich einen, den fraglichen Vorgang betreffenden, quantitativen Zusammenhang. In dieser Weise sind Zusammenhänge aufgedeckt worden, die anderweitig unergründlich erscheinen konnten oder die genügend feiner unmittelbarer Untersuchung durch Beobachtung schwer zugänglich waren.

In solcher Verwendung hat der Satz vom Wirkungsgrad der vollkommen umkehrbaren Vorgänge, Gl. 253, den Namen des II. Hauptsatzes der Thermodynamik erhalten.

Es sind dem Satz auch andere Formen gegeben worden[2]), die aber an seinem Erfahrungsinhalt und daher auch an seinem Erkenntniswert nichts ändern. Dieser Erfahrungsinhalt kommt gleich dem der drei schon betrachteteten, umfassend gesicherten allgemeinsten Erfahrungssätze über Wärme (111, 112). Denn mittels eines dieser fest miteinander verbundenen Sätze ist die Allgemeingültigkeit des Satzes vom Wirkungsgrad gefolgert worden (252). Jeder dieser drei Sätze ist vermöge deren Verbundenheit ebenfalls als eine besondere Form des II. Hauptsatzes und als erfahrungsinhaltlich gleichwertig mit ihm zu betrachten.

Wir geben im folgenden einige besonders wichtige und charakteristische Bei-

---

[1]) Erreichbar zeigte sich bei Kondensatormaschinen mit 10 Atm. wegen unvollkommener Umkehrbarkeit nur etwa der Wirkungsgrad 0·1, bezogen, wie oben, auf die im Kessel verbrauchte Wärme. Bezogen auf die in der Feuerung verfügbare Wärme ist der Wirkungsgrad wegen der Wärmeverluste noch kleiner (vgl. 249).

[2]) Siehe 2. Note zu 256 und Anhang W IV.

spiele von Schlüssen aus dem II. Hauptsatz, wobei immer der I. Hauptsatz mitbenutzt wird (256—258).

256. Zusammenhänge bei Aggregatzustandsänderungen. — Es werde folgender vollkommen umkehrbare Kreisvorgang in einem erlaubten Gedankenversuch ausgeführt:

1. Es sei ein ausdehnsames Gefäß (etwa Zylinder mit Kolben) ganz von 1 gr Flüssigkeit erfüllt; die Temperatur sei T_2, das Volum v. Nun werde bei dieser Temperatur eine Wärmemenge Q_2 zugeführt, die eben hinreicht, alle Flüssigkeit in Dampf von T_2^0 zu verwandeln, wobei das Volum auf V wächst und entsprechende Arbeit A_2 geleistet wird.

2. Auf diese isothermische (253) Änderung folge eine adiabatische (253), indem der Dampf ohne Wärmezufuhr noch weiter sich dehne, wobei seine Temperatur T_1 wird.

3. Danach werde der Dampf isothermisch bei T_1 ganz zu Flüssigkeit verdichtet, was Arbeit A_1 erfordert und die Wärmemenge Q_1 zurückliefert.

4. Endlich werde die Flüssigkeit adiabatisch durch Druckänderung wieder auf ihre Anfangstemperatur T_2 mit dem Anfangsvolum v gebracht, womit der Kreisvorgang geschlossen ist.

Die beiden adiabatischen Änderungen 2 und 4 seien unendlich klein, so daß ihre Einzelheiten nicht in Betracht kommen. Man hat dann auch nur mit den zwei Volumen v und V, der Flüssigkeit und des Dampfes, zu rechnen, und es ist deren für die Arbeit bestimmende Differenz, V — v, bei den zwei isothermischen Änderungen nur unendlich wenig verschieden. Auch ist dann zwischen den beiden Temperaturen T_2 und T_1 nur ein unendlich kleiner Unterschied, dT, vorhanden, zu welchem nach der Dampfspannungstabelle bei der gemeinsamen, mit T zu bezeichnenden Temperatur der ebenfalls unendlich kleine Druckunterschied dp gehört.

Die Arbeit (378) A_2 ist dann $(V - v)(p + dp)$, und $A_1 = (V - v)\,p$; der Unterschied beider, $(V - v)\,dp$, ist die im ganzen in Arbeit verwandelte Wärme[1]), welche in der Gl. 253 an Stelle von $Q_2 - Q_1$ zu treten hat. Die gesamte aufgenommene Wärme Q_2 ist die Verdampfungswärme ϱ der Flüssigkeit. Es geht daher die den II. Hauptsatz enthaltende Gl. 253 über in

$$\frac{(V - v)\,dp}{\varrho} = \frac{dT}{T}, \quad \text{oder} \quad \varrho = T(V - v)\frac{dp}{dT}. \qquad 256)$$

Dies ist der bereits (225) erwähnte Zusammenhang zwischen der Verdampfungswärme und der Dampfspannungstabelle, welche dp/dT bei der Verdampfungstemperatur T angibt. Wesentlich mitbestimmend ist der Volumunterschied der Gewichtseinheit von Dampf und Flüssigkeit, V—v; wird dieser Null, so wird auch die Verdampfungswärme Null, was bei der kritischen Temperatur erfolgt (226, 239).

Das sehr genau kontrollierbare Zutreffen dieses Zusammenhanges war eine der ersten besonderen Bestätigungen der — wegen möglichem Zweifel an der Erlaubtheit der Gedankenversuche und der vollkommenen Umkehrbarkeit der

[1]) Wir messen hierbei einfacherweise alle Wärmemengen in Arbeitseinheiten, entsprechend dem I. Hauptsatz.

Vorgänge — immerhin vorsichtig zu behandelnden Gedankengänge des II. Hauptsatzes[1]).

Durch einen ganz gleichen Gedankenversuch mit zugehöriger gleicher Rechnung ergibt sich auch der schon betrachtete Zusammenhang von Schmelzpunkt und Druck (200). Es ist dabei das ausdehnsame Gefäß zuerst ganz mit festem Körper gefüllt, der darin isotherm geschmolzen, darauf adiabatisch auf benachbarte Temperatur gebracht, dann isotherm verfestigt und zuletzt adiabatisch zum Anfangszustand zurückgeführt wird. Das Ergebnis (Gl. 256) kann hier in der Form $dT/dp = T(V - v)/\varrho$ betrachtet werden, welche zeigt, daß der Schmelzpunkt T mit zunehmendem Druck p steigt (dT/dp positiv), wenn das Volum beim Schmelzen zunimmt ($V - v$ positiv), dagegen im entgegengesetzten Falle (wie beim Eis) sinkt. Da die Schmelzpunktsänderungen nur sehr gering und überhaupt nur bei hohen Drucken gut beobachtbar sind (200), war die Aufdeckung des vorher nicht sicher bekannt gewesenen Zusammenhanges von Schmelzpunkt und Druck durch den II. Hauptsatz besonders wertvoll.

257. Stefans Gesetz (175) aus dem II. Hauptsatz. — So wie der Druck eines Gases oder Dampfes kann auch der Druck elektromagnetischer Wellenstrahlung (E 433, vgl. auch M 376), wie des Lichtes und der Wärmestrahlung (156), einen Motor treiben, und da diese Strahlung, wenn sie von heißen Körpern ausgesandt wird, ihre Energie aus Wärme nimmt (160), so wird auch hierbei Arbeit durch Wärme geleistet. Umgekehrt wird auch gegen den Strahlungsdruck geleistete Arbeit als Strahlungsintensität und auf dem Wege der Absorption durch einen schwarzen Körper wieder als Wärme zurückgegeben (158, E 433); man hat also in jeder Hinsicht einen Wärmemotor. Es muß daher ein solcher, vollkommen umkehrbarer Motor auch den Wirkungsgrad haben, welcher nach Gl. 253 den von ihm verwendeten Temperaturen entspricht. Es ist leicht zu sehen, daß diese Gleichung fast unmittelbar die Bedeutung des Gesetzes von der vierten Temperaturpotenz erhält, wenn man folgenden Gedankenversuch durchführt:

Es sei der Raum eines Zylinders mit Kolben erfüllt von der Strahlung eines vollkommen schwarzen Körpers, dessen Oberfläche den Boden des Zylinders bildet. Die sonstigen Innenflächen des Zylinders und Kolbens seien vollkommen spiegelnd, so daß die Energiedichte D im Zylinder proportional ist der Ausstrahlung des schwarzen Körpers am Boden (177). Die Spiegelung sei jedoch diffus, so daß jede Strahlungsrichtung im Zylinderraum gleichmäßig vertreten ist (O 33). Man hat dann zur Berechnung des Druckes der Strahlung auf jede beliebig gerichtete Fläche nur die Energiedichte $D/3$ zu berücksichtigen, weil man stets $\frac{1}{3}$ der Gesamtstrahlung senkrecht, die beiden anderen Drittel streifend zur Fläche gerichtet annehmen kann[2]).

Die Benutzung vollkommen und zwar diffus reflektierender Oberflächen im Gedankenversuch ist erlaubt, weil solche Oberflächen in verschiedenem Grade der Annäherung wirklich herstellbar sind. Dasselbe gilt für den strahlungsdicht schließenden und reibungslosen Kolben.

Der Versuch besteht nun wieder aus abwechselnd zwei isothermischen und zwei adiabatischen Vorgängen:[3])

1. Es habe zuerst der Zylinderboden dauernd die Temperatur T_2 und es leiste der Strahlungsdruck am Kolben die Arbeit A_2 unter Verbrauch der Wärmemenge Q_2 aus dem Strahlung nachliefernden Zylinderboden, wobei das Volum des Zylinderraums von v bis V wachse.

2. Darauf erfolge adiabatische Weitervergrößerung des Strahlungsraumes, indem der Zylinderboden jetzt nicht mehr Strahlung nachliefere, sondern nur die vorhandene Strahlung zerstreut reflektiere, wie die übrigen Wände[4]). Diese Weitervergrößerung des Strahlungs-

---

[1]) Das meistgebrauchte Verfahren zu Schlüssen aus dem II. Hauptsatz, welches — bei gleicher Schlußsicherheit — die zu betrachtenden Vorgänge vereinfacht, dafür aber mehr Rechenaufwand mit wenig ersichtlichem Sinn gibt, wird im Anhang W IV erläutert.

[2]) Die Überlegung ist hierbei gleich der bei Berechnung des Druckes der Gasmoleküle (34), deren Bewegungsrichtungen ebenfalls allseitig gleichmäßig verteilt sind.

[3]) Die besonders zugerichtete Rechenweise, für welche nur ein kurzes Stück des Gedankenversuchs nötig ist, siehe im Anhang W IV, 5 und 6; vgl. dazu 2. Note zu 256.

[4]) Um solchen Wechsel des Zylinderbodens einwandfrei zu ermöglichen, sei der Boden

raumes dauere an, bis die hierbei sinkende Strahlungsdichte nur mehr so groß ist wie es der Temperatur T_1 entspräche.

3. Nun wirke der Zylinderboden wieder als schwarzer Körper und zwar von der Temperatur T_1 und es werde unter Aufwendung der Arbeit A_1 gegen den Strahlungsdruck der Zylinderraum isothermisch verringert, wobei die Wärmemenge Q_1 durch absorbierte Strahlung an den Zylinderboden zurückgegeben wird.

4. Zuletzt erfolge noch adiabatische Verdichtung der Strahlung, bis sie wieder der Anfangstemperatur T_2 entspricht, so daß nun ein Kreisvorgang abgeschlossen ist, der beliebig wiederholt werden kann.

Es gilt für diesen Kreisvorgang wieder dieselbe Überlegung wie vorher (256), indem wieder die adiabatischen Teile unendlich klein genommen seien, so daß T_2 und T_1 nur um dT verschieden sind und nur der dT entsprechende Energiedichtenunterschied dD wirksam wird.

Danach ist der entsprechend unendlich kleine, $Q_2 - Q_1$ gleiche[1]) Arbeitsunterschied $A_2 - A_1$ gegeben durch $\frac{1}{3} dD(V-v)$, weil der Strahlungsdruck, wie bemerkt, $\frac{1}{3}$ der Energiedichte ist. Die zugeführte Wärme Q_2, welche mit der Volumvergrößerung $V-v$ verbunden ist, hat hier zweierlei zu bewirken, nämlich erstens die Neuerfüllung des Raumes $V-v$ mit Strahlungsenergie der Dichte D, wozu $D(V-v)$ erforderlich ist, und zweitens die Arbeitsleistung $\frac{1}{3} D(V-v)$. Es ist daher $Q_2 = D(V-v) + \frac{1}{3} D(V-v) = \frac{4}{3} D(V-v)$.[2])

Die den II. Hauptsatz enthaltende Gl. 253 nimmt daher hier die Form an

$$\frac{\frac{1}{3} dD(V-v)}{\frac{4}{3} D(V-v)} = \frac{dT}{T}, \quad \text{oder} \quad \frac{dD}{D} = 4 \cdot \frac{dT}{T}.$$

Danach muß nach den Regeln der Rechnung mit unendlich kleinen Größen

$$D = C \cdot T^4$$

sein, wobei C eine auf diesem Wege nicht ermittelbare Konstante ist[3]).

Damit ist Stefans Gesetz in festen Zusammenhang gebracht mit den im II. Hauptsatz enthaltenen allgemeinsten Erfahrungen über Wärme (255), was auch eine besondere Sicherung der anderen, mit Stefans Gesetz zusammenhängenden, durch die Messungen am schwarzen Körper erhaltenen Kenntnisse über Wärmestrahlung (178) bedeutet.

258. **Verschiebungssatz der Wellenlängen aus dem II. Hauptsatz und aus Dopplers Prinzip.** — Wenn man Hohlraumstrahlung (177) durch Volumverkleinerung verdichtet, wie es beim vorbetrachteten Kreisvorgang (257) adiabatisch bei spiegelnden Wänden geschehen ist, so kann man, ausgehend von Strahlung niedriger Temperatur, Energiedichten erreichen, die beliebig hohen Temperaturen entsprechen.

Es ist aber nicht nur die Dichte der Energie, welche bei der Volumänderung verändert wird, sondern es muß notwendigerweise auch eine Wellenlängenänderung dabei eintreten, wie sie der Reflexion von den bei der Volumänderung bewegten Wänden nach Dopplers Prinzip (A 88 u. f.) entspricht[4]). Beim Zusammenschieben der Wände müssen die Wellen kürzer werden, beim Auseinanderschieben länger. Erzeugt man also erhöhte Strahlungsdichten durch Zusammenpressung der Strahlung, so erhält man zugleich auch verkürzte Wellenlängen.

Sind dieselben erhöhten Strahlungsdichten durch Erhöhung der Temperatur schwarzer Wände erzeugt, so hat man aber nach alter Erfahrung ebenfalls kürzere Wellen (171), und es

---

von vornherein doppelt. Der innere Boden sei dauernd diffus spiegelnd, habe aber eine Öffnung mit Klappe, die nach Bedarf geöffnet oder strahlungsdicht verschlossen werden kann. Der zweite, unter der Klappe liegende Boden sei schwarz und könne nach Bedarf bei der Temperatur T_2 oder T_1 gehalten werden. Für die isothermischen Änderungen ist dann die Klappe offen, für die adiabatischen ist sie geschlossen. Der Raum zwischen den zwei Böden sei klein gegen v.

[1]) Vgl. 1. Note zu 256.

[2]) Hierin unterscheidet sich der Strahlungsraum von einem Gasraum. Letzterer behält unveränderte innere Energie bei isothermischer Arbeitsleistung; ersterer muß seine innere Energie entsprechend der Volumvergrößerung vermehren, und dadurch wird die Wärmeaufwendung zu gegebener Arbeitsleistung vervierfacht, wie es die obige Gleichung zeigt. In dieser Vervierfachung liegt bereits die 4. Temperaturpotenz beschlossen, wie sich oben sogleich zeigt.

[3]) Sie ist gegeben durch die in 175 und 178 angemerkten Konstanten.

[4]) Die Bewegung eines Spiegels wirkt auf die Wellenlängen des reflektierten Lichtes gleich der Bewegung eines Spiegelbildes hinter dem Spiegel.

entsteht damit die Frage, ob beide Wege der Energiesteigerung der Strahlung genau die gleichen Verkürzungen der Wellenlängen ergeben.

Die Frage ist zu bejahen; denn Strahlungen, die schwarzen Körpern gleicher Temperatur zugehören, müssen nicht nur gleiche Intensität, sondern auch die gleiche spektrale Zusammensetzung haben, seien sie wie immer erzeugt. Zum Beweise dieser Behauptung denke man zwei Räume aneinandergrenzend, die auf den zwei verschiedenen Wegen erzeugte gleiche Strahlungsdichten enthalten. Mit der gleichen Strahlungsdichte, d. i. Energiedichte, besteht dann auch gleicher Strahlungsdruck in beiden Räumen (E 433, vgl. auch M 376). Bestünde aber diese Gleichheit nicht für jede Wellenlängengruppe der beiderseitigen Strahlungen einzeln, so würde bei Bedeckung einer die beiden Räume verbindenden Öffnung mit einer Platte, die eine bestimmte Wellenlängengruppe vorzugsweise durchließe, die anderen Wellenlängen aber vorzugsweise reflektierte[1]), Ungleichheit der Strahlungsdichte beider Räume und somit auch Druckungleichheit entstehen, indem die durchgelassenen Wellenlängen nach der Seite hin überwiegend übergehen, wo sie weniger vertreten waren, die anderen Wellenlängen aber nicht ausgleichend wirken können, weil sie reflektiert werden. Die so entstehende Druckungleichheit könnte einen Motor treiben; denn sie wäre bei geeigneter Anwendung in erlaubtem Gedankenversuch dauernd wiederholt herstellbar. Dies widerspricht aber der auch im II. Hauptsatz enthaltenen allgemeinsten Erfahrung (255), da dieser Motor ohne Wärmeübergang von einem heißeren zu einem kälteren Körper und doch mittels Wärme arbeiten würde. Also müssen die Wellenlängen bei Verdichtung der Strahlung durch Volumänderung zwischen spiegelnden Wänden und bei Dichteerhöhung durch Temperaturänderung schwarzer Wände die gleichen Änderungen erleiden.

Damit ist aber die Wellenlängenverschiebung bei Temperaturänderung berechenbar; denn es ist die Änderung bei Zusammenschieben der Wände nach Dopplers Prinzip berechenbar. Die Ausführung dieser Rechnung ergibt den Verschiebungssatz, nach welchem jede Wellenlänge verkehrt proportional der Temperatur des schwarzen Körpers sich ändert (179). Damit ist auch dieser Satz, ein Teil der Strahlungsgleichung des schwarzen Körpers (178), fest verbunden mit den allgemeinsten Erfahrungen über Wärme.

259. Rückblick. — Man sieht aus der Gesamtheit unserer Darstellung, daß eine erstaunlich feste, maßmäßige (quantitative) Verbindung besteht zwischen entlegenst verschiedenen Kenntnissen von der Wärme, so daß sie nur alle miteinander entweder richtig (mit der Wirklichkeit stimmend) oder falsch (mit ihr nicht stimmend) sein können. Die Verbindung ist hergestellt durch Erfahrungen nicht nur an Wärmevorgängen, sondern auch allgemeinster Art, die, von frühesten Zeiten her gesammelt, immer wieder in Wiederholung und Bestätigung auftraten und die auch untereinander die gleiche feste Verbindung zeigten (111, 112). Wir haben diese Erfahrungen bei vielen Gelegenheiten ihres Auftretens hervorgehoben (6, 15, 25, 43, 135, 138, 153, 247), bis schließlich zu ihrer maßmäßigen Verdichtung im II. Hauptsatz der Wärmetheorie (255) mit seinen (in den Anhängen W IV und V behandelten) Ausläufern.

Noch allgemeiner und freilich auch einfacher ersichtlich verbindend für alle Kenntnisse von der Wärme wirkt der I. Hauptsatz (255), das Energiegesetz, mit dessen Auffindung überhaupt erst umfassend gesicherte Kenntnis von den Wärmevorgängen beginnen konnte und der auch für sich allein schon die in der kinetischen Gastheorie (81—112) ausgiebig hergestellte Verbindung aller Kenntnis von der Wärme mit den Kenntnissen von den Atomen und Molekülen und ihren Kräften ermöglichte.

[1]) Solche Platten gibt es (O 130); der Gedankenversuch ist also erlaubt.

ANHÄNGE

ZUR

AKUSTIK (WELLENLEHRE)

UND ZUR

WÄRMELEHRE

Anhänge zur Akustik.

Anhang A I (zu A 3 u. f.). Wellengleichung.

Wir haben Wellen als räumliche Fortpflanzung von Bewegung betrachtet. Allgemeiner kann man sagen: „Welle" ist räumliche Fortpflanzung eines Zustandes irgendwelcher Art. Der Zustand kann Bewegung sein, eine Verschiebung, eine Geschwindigkeit, auch ein Druck; er kann aber auch etwa elektrische oder magnetische Kraft sein, welches letztere der Fall der elektrischen Wellen ist (Anhang E V b), deren allgemeines Verhalten hier einbegriffen wird.

Es genügt zur Erkenntnis der wesentlichen Zusammenhänge Wellen zu betrachten, die nur in einer Richtung laufen. Es können das ebene Wellen[1]) in einem räumlichen Medium sein oder auch Wellen, die an einem linearen Medium laufen, wie etwa elastische Längswellen an einem Stab, oder Querwellen an einem Seil.

Wir bezeichnen räumliche Abmessungen am Medium in Laufrichtung der Welle mit z und die Zeit mit t. Das Maß des sich fortpflanzenden Zustandes sei X.

Die Art von X bestimmt die Art der Welle. Ist X eine elastische Verschiebung, so ist es eine elastische Welle; ist X elektrische Kraft, so ist es eine elektrische Welle; hat X die Richtung von z, so ist die Welle longitudinal, steht X senkrecht zu z, so ist sie transversal.

Das Wesentliche einer Welle ist in allen Fällen, daß in ihr räumlich nebeneinander dieselben Zustände verteilt sind, die zeitlich nacheinander an derselben Stelle statthaben (A 3, 4). Dies kommt zum Ausdruck in der Gleichung

$$X = f\,(z - vt), \qquad \text{a)}$$

welche daher „Wellengleichung" zu nennen ist. f ist eine beliebige Funktion; sie bestimmt die Form der Welle (A 5, 60). Ist f Sinusfunktion, so hat man eine Sinuswelle (A 6). v als Faktor zu t ist notwendig, weil nur Größen gleicher Art addiert werden können, und zwar muß v eine Geschwindigkeit sein, weil nur dann vt eine Länge ist wie z.

Behält t seinen Wert, z. B. $t = 0$, d. h. betrachtet man ein Augenblicksbild der räumlichen Verteilung von X, so gibt $X = f(z)$ die verschiedenen, längs der Welle nebeneinander vorhandenen Zustände. Behält dagegen z seinen Wert, z. B. $z = 0$, d. h. faßt man einen bestimmten Punkt am Weg der Welle ins Auge, so gibt $X = f(-vt)$ an, was in zeitlicher Folge an diesem Punkt geschehen ist[2]), und man sieht, daß eine und dieselbe Funktion f das Räumliche wie das Zeitliche bestimmt, wie es für Wellen wesentlich ist (A 4).

---

[1]) „Eben" werden Wellen genannt, bei welchen gleichzeitig gleicher Zustand auf Ebenen herrscht. Da die Flächen gleichzeitigen gleichen Zustandes „Wellenflächen" genannt werden (A 5), kann man auch sagen: eben sind Wellen, deren Wellenflächen Ebenen sind. Beispiel: Wellen, die von einem Punkt ausgehend schon sehr weit gelaufen sind, so daß die erst kugeligen Wellenflächen schon eben geworden sind.

[2]) Das Minuszeichen bedeutet, daß das, was in Fortpflanzungsrichtung weiter vorangeschritten ist (also zu größeren z gehört), am Ursprungsort früher (also bei kleineren t) stattgefunden hat.

Zugleich sieht man, daß v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist. Denn es ergibt sich derselbe Wert für X, ob man in Fortpflanzungsrichtung um z vorangeht oder in der Zeit um t zurück, so daß $vt = z$ wird, wonach $v = z/t$. Da z räumliche Abmessungen am Medium bedeutet, gilt die Wellengeschwindigkeit v relativ zum Medium.

Anhang A II (zu A 3 u. f.). Wellengleichung in Differentialform.

Geht man von den Kräften aus, welche die Wellenausbreitung bei gegebenen Mediumsmassen bewirken, um den Vorgang nach dem Grundgesetz aller Bewegung (M 116) zu berechnen, wie etwa bei elastischen Wellen, so kommt man nach diesem Gesetz auf zweite Differentialquotienten (siehe M 54) der Verschiebungen X nach der Zeit t, $\partial^2 X/\partial t^2$, und man erhält dementsprechend auch eine Differentialgleichung 2. Ordnung für den Vorgang[1]).

Man kann aus der schon betrachteten Integralgleichung a) (Anhang A I) für Wellen leicht angeben, welche Form die Differentialgleichung haben muß, wenn sie Wellen bedeuten soll. Es ist nach Gleichung a $\frac{\partial X}{\partial t} = -f' \cdot v$, $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = f'' \cdot v^2$

und $\frac{\partial X}{\partial z} = f'$, $\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = f''$, also

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\,. \qquad \text{b)}$$

Dies ist die charakteristische Wellengleichung in Differentialform. Man sieht es auch in dieser Form unmittelbar, daß die Gleichung Wellen bedeutet; denn sie setzt zeitliche Änderungen von X gleich räumlichen Änderungen derselben Größe, wobei der Faktor $1/v^2$ den notwendigen Ausgleich der Dimensionen[2]) bewirkt. X kann dabei auch andere Bedeutung als die einer Verschiebung haben; denn seine Dimension fällt heraus, da sie an beiden Seiten der Gleichung in gleicher Weise vorkommt.

Erhält man für irgendeinen Zustand X, nach dessen Gesetzen rechnend, eine Gleichung von der Form b, so ist man sicher, daß der Zustand in Wellen sich auszubreiten vermag, und man erhält aus dem Faktor in der Gleichung auch sogleich die Ausbreitungsgeschwindigkeit (siehe z. B. Anh. A III und auch das Beispiel der elektrischen Wellen, Anhang E V b, Bd. IV).

Findet die Ausbreitung nach allen 3 Raumrichtungen x, y und z, d. i. in Kugelwellen statt, so treten als Summanden zur rechten Seite von Gl. b noch die zweiten Differentialquotienten von X nach den anderen Richtungen hinzu, so daß die Gleichung wird

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\,.$$

Anhang A III (zu A 8, 11, 102). Elastische Längswellen an einem Stab.

Es entstehen solche, hier als einfaches Beispiel zu berechnende Wellen, wenn ein Ende des Stabes in seiner Längsrichtung zum Erzittern gebracht ist, z. B. durch einen Schlag oder durch Reiben in dieser Richtung (A 102).

Es ist hier z die Längskoordinate des Stabes und X die in z-Richtung erfolgende elastische Verschiebung der einzelnen Raumelemente des Stabes aus ihrer Ruhelage. Ist q der (kleine) Querschnitt des Stabes, so haben diese Raum-

[1]) Runde Differentialzeichen ∂ heben hervor, daß von einer Größe (X), die Funktion mehrerer Größen (z, t) ist, nur Änderungen infolge Änderung einer der Größen (z. B. t) betrachtet werden.

[2]) Über Dimensionen siehe E 291.

elemente im ruhenden Zustand das Volum $q \cdot dz$ und die Masse $D \cdot q \cdot dz$, wenn D die Dichte des Stoffes ist.

Ist die Verschiebung X für alle Elemente des Stabes gleich, also $dX/dz = 0$, so sind keine elastischen Kräfte der einzelnen Raumelemente aufeinander vorhanden (der ganze Stab wäre so um X verschoben). Ist dX/dz nicht Null, aber konstant über den ganzen Stab, also $d^2X/dz^2 = 0$, so sind zwar elastische Kräfte geweckt; sie sind aber gleichmäßig über den ganzen Stab verteilt (er ist überall gleichmäßig gedehnt oder gedrückt), und dies gibt keine resultierenden Kräfte auf die einzelnen Raumelemente. Nur wenn d^2X/dz^2 nicht Null ist, sind resultierende Kräfte da, die Wellen geben können, wie das Folgende zeigt.

Es ist $\partial X/\partial z$ die Längsdehnung (M 258), daher $E\partial X/\partial z$ der Druck oder Zug, unter welchem das Raumelement steht und $Eq\partial X/\partial z$ die an dessen beiden Endflächen in entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft, wobei E der Elastizitätsmodul des Stoffes ist (M 259). Der resultierende Kraftunterschied ist das Differential hiervon, nämlich $Eq\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \cdot dz = K$, und diese Kraft K, wirkend auf die Masse $m = Dqdz$ des Elements, bringt nach dem Grundgesetz (M 116 mit 54) die Beschleunigung $\partial^2X/dt^2 = K/m$ hervor. Man hat also

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{E}{D} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} .$$

Man sieht nach Anh. A II, daß dies die Gleichung einer in z-Richtung fortschreitenden Welle ist mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{E/D}.$$

Diese Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht der allgemeinen Form (A 8), $v = \sqrt{\text{Kraftmaß}/\text{Massenmaß}}$; denn der Elastizitätsmodul E ist das Kraftmaß für die bei der Längswelle vorkommende Dehnung oder Pressung, die Dichte D ist Massenmaß, und der Quotient E/D hat richtig die Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats[1]).

Anhang A IV (zu A 8, 16 u. f.). Andere elastische Wellen in festen Körpern.

Wie im Anhang A III, wenn auch in manchen Fällen weniger einfach, verläuft die Rechnung bei den anderen elastischen Wellen. Es kommt auf die Kenntnis der elastischen Kräfte an (M 253 u. f.), auf welche das Grundgesetz aller Bewegung anzuwenden ist, woraus sich die Wellengleichung ergibt und aus dieser die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Man erhält für Längswellen im Inneren von festen Körpern, wie sie bei Erdbeben vorkommen, die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{E}{D} \cdot \frac{1-\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)}} = \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{ZD(1+\mu)}} ,$$

wobei μ das Verhältnis von Längsdehnung zu Querschrumpfung, Z die Kompressibilität ist. Der Unterschied gegenüber den einfacheren Stabwellen (Anh. A III) besteht darin, daß im Körperinneren die mit Längenänderungen der Raumelemente verbundene Querschrumpfung bzw. Querdehnung verhindert ist.

Für Querwellen an Stäben oder auch im Körperinneren gilt einfach

$$v = \sqrt{F/D} ,$$

wie es dem Torsionsmodul F als Kraftmaß für die hier vorkommende Scherbewegung entspricht. Ein Unterschied zwischen Stäben und Körperinnerem be-

---

[1]) Vgl. die Einheiten für Kraft und Masse, M 67, 131.

steht hier nicht, da Volumänderung bei Scherung nicht vorkommt. Die Querwellen an Stäben können auch Drillwellen sein.

Da $F = E/2(1+\mu)$ (M 272), ist das Verhältnis der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, längs:quer, im Körperinneren $\sqrt{2(1-\mu)/(1-2\mu)}$. Mit $\mu = 1/3$, was für viele feste Körper nahe zutrifft (M Tab. 7), wird dies Verhältnis gleich 2. Dies stimmt mit den Messungen an Erdbebenwellen überein; die Längswellen laufen doppelt so schnell als die Querwellen (A 17).

Anhang A V (zu A 4 u. f.). Seilwellen.

Diese Wellen haben nichts mit Scherung oder Drillung oder mit Biegung zu tun; sie werden nicht durch innere Kräfte fortgepflanzt, sondern durch die äußere Kraft, welche das Seil an seinen Enden gespannt hält. Die elastischen Eigenschaften des Seiles besorgen nur die Verbreitung dieser Kraft über die ganze Länge des Seiles. Wo Krümmung des Seiles vorhanden ist, gibt diese Kraft eine quer zum Seil gerichtete Resultierende, welche die Welle fortpflanzt (A 7). Wo Krümmung ist, ist der zweite Differentialquotient der Querverschiebung nach der Länge des Seils von Null verschieden, woraus man sieht, daß die Rechnung nahe ähnlich verläuft wie im Anh. A III. Das Ergebnis für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{\frac{\text{spannende Kraft}}{\text{Längeneinheitsmasse}}}$$

Anhang A VI (zu A 18, 24, 39). Schallwellen.

Für Längswellen in Gasen gilt dieselbe Rechnung wie im Anh. A III, nur bedeutet die (stets klein anzunehmende) Längsdehnung dX/dz hier Volumänderung des Gases im Verhältnis zum ursprünglichen Volum, dV/V, und es muß deshalb, um wieder richtig Kräfte zu berechnen, an Stelle des Elastizitätsmoduls E die Druckänderung $-dp$ des Gases im Verhältnis zu dV/V treten, $-dp : (dV/V) = -V \cdot dp/dV$. Dieses Elastizitätsmaß des Gases ist, wie zu erwarten, identisch mit der reziproken Kompressibilität (M 267); es ist aus dem Gasgesetz (M 356) zu berechnen. Bei unveränderlicher Temperatur ist dieses Gesetz $pV = \text{const.}$, wonach $dp/p = -dV/V$ und daher $-V dp/dV = p$. Die Kompressibilität ergäbe sich also gleich dem reziproken Druck, die Volumelastizität gleich dem Druck.

Da aber in den Schallwellen die Volumänderungen — welche Temperaturänderungen mit sich bringen (A 24) — so schnell erfolgen, daß keine Zeit zum Temperaturausgleich bleibt, muß mit dem für adiabatische Volumänderungen geltenden, potenzierten Gesetz $pV^k = \text{const.}$ gerechnet werden (Anh. W II, 2), welches $dp/p = -k \cdot dV/V$ und also $-V dp/dV = p \cdot k$ ergibt, wobei k das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen des Gases ist. Die Kompressibilität ist also hier k-fach verringert, die Volumelastizität k-fach vergrößert.

Die Schallgeschwindigkeit v in Gasen ergibt sich danach, indem man in der Gleichung des Anh. III statt E pk setzt;

$$v = \sqrt{\frac{p}{D} \cdot k} \; .$$

In Flüssigkeiten ist das Elastizitätsmaß das Reziproke der Kompressibilität Z (M 267), die Schallgeschwindigkeit also

$$v = \sqrt{1/ZD} \; .$$

Temperaturänderungen kommen bei Flüssigkeiten (ebenso auch bei festen Körpern) meist nur in sehr geringem Maße vor, ausgenommen bei äußerst schnellen

Schwingungen, wo man aus gemessenen Schallgeschwindigkeiten merklich verkleinerte (mehr oder weniger „adiabatische") Kompressibilitäten berechnet.

Anhang A VII (zu A 18). Lineare (Verschiebungs-) Amplitude X_0, Geschwindigkeitsamplitude W_0 und Druckamplitude P_0 bei Sinus-Schallwellen in Gasen.

Ist X_0 die lineare Amplitude der Gasteile, so ist die Geschwindigkeitsamplitude, d. i. die Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage, die höchste vorkommende Geschwindigkeit,

$$W_0 = 2\pi X_0/T = 2\pi n X_0 ,$$

wie bei jeder Sinusbewegung (M 168), wenn T die Schwingungsdauer, n die Schwingungszahl ist.

Um die Druckamplitude zu finden, d. i. die größten vorkommenden Überdrucke und Unterdrucke an den Verdichtungs- und Verdünnungsstellen, geht man von der Volumänderung dV/V aus. Diese ist (vgl. Anh. A VI) $dV/V = dX/dz$. Da in der Sinuswelle von der Länge λ $X = X_0 \sin(2\pi z/\lambda)$, wird $dX/dz = X_0(2\pi/\lambda)\cdot\cos(2\pi z/\lambda)$, wovon der Höchstwert $2\pi X_0/\lambda$ ist, und dies ist also der Höchstwert von dV/V. Die entsprechende Druckänderung ist nach dem hier geltenden adiabatischen Gesetz (vgl. Anhang A VI) $dp/p = -k\cdot dV/V$; also ist die (sehr klein angenommene) Druckamplitude dp, welche wir ohne Rücksicht auf das Vorzeichen mit P_0 bezeichnen, mit dem gefundenen Höchstwert von dV/V berechnet,

$$P_0 = pk\cdot dV/V = 2\pi p k X_0/\lambda .$$

Man sieht, daß die Amplitude X_0 klein sein muß gegen die Wellenlänge λ, um die bei der Anwendung des Gasgesetzes angenommene Kleinheit von P_0 und also die Gültigkeit des Ergebnisses zu gewährleisten.

Führt man die Schallgeschwindigkeit $v = \sqrt{pk/D}$ ein (Anh. A VI), so wird

$$P_0 = 2\pi D v^2 X_0/\lambda .$$

Über die unvermeidliche Asymmetrie von Längswellen mit nicht verschwindend kleinen Amplituden siehe A 100.

Anhang A VIII (zu A 19 u. f., 44). Energie.

Beim Passieren der Gleichgewichtslage, wo die Geschwindigkeit am größten und gleich $W_0 = 2\pi n X_0$ ist (Anh. A VII), ist alle Schwingungsenergie des betreffenden Raumteiles kinetisch. Zu den anderen Zeiten ist sie ebenso groß, nur teilweise bis ganz potentiell, nämlich als Druck vorhanden[1]). Die Energie der Raumeinheit oder Energiedichte ist daher $DW_0^2/2 = 2\pi^2 D n^2 X_0^2$.

Die in der Zeiteinheit senkrecht auf die Flächeneinheit fallende Energie, auch die Intensität J der Welle genannt (A 20), erhält man in leicht verständlicher Weise durch Multiplikation der Energiedichte mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v. Es ist daher

$$J = 2\pi^2 D v n^2 X_0^2$$

oder mit Einführung der Druckamplitude P_0 (Anh. A VII)

$$J = P_0^2/2Dv .$$

Man sieht, daß die Energie (Intensität) stets proportional dem Quadrat der Amplitude ist (A 44). Benützt man dabei die lineare Amplitude X_0, so ist noch die Schwingungszahl n mitbestimmend; die Druckamplitude bestimmt dagegen für sich allein die Intensität.

---

[1]) Daß die Energie unter Druck befindlichen Gases auch nur kinetische Energie der Gasmoleküle ist, allerdings bei ungeordneten Geschwindigkeiten und daher verborgen, ist in der Wärmelehre gezeigt (W 34).

Anhänge zur Wärmelehre.

Anhang W I (zu W 144 u. f.). Theorie der Wärmeleitung (Fourier, 1822).

1. Gegeben sei die Temperaturverteilung in einem Körper zu einer Anfangszeit. Zu finden ist die Temperaturverteilung für alle folgenden Zeiten, sofern nur Leitung den Verlauf bestimmt.

Die Lösung erfolgt durch Anwendung einfachster Erfahrung über Wärmeleitung und spezifische Wärme auf jedes Raumelement des Körpers.

Es habe das Raumelement dxdydz zur Zeit t die Temperatur ϑ, welche Funktion von x, y, z und von t ist. Die Wärmeleitfähigkeit des Stoffes sei $\varkappa$, seine spezifische Wärme C, sein spezifisches Gewicht s. Das Raumelement gewinnt und verliert Wärme durch Leitung an seinen 6 Grenzflächen, je nach der Temperatur seiner Nachbarelemente.

Die durch die Grenzfläche dydz in der Zeit dt tretende Wärmemenge ist nach der in der Bedeutung von $\varkappa$ schon enthaltenen Erfahrung (W 140) gegeben durch das Produkt

$$dydzdt \cdot \varkappa \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

wo $\partial\vartheta/\partial x$ das zu dydz senkrechte Temperaturgefälle ist[1]). Die gegenüberliegende Grenzfläche dydz des Raumelements hat ebensolchen Wärmedurchtritt in der gleichen Raumrichtung nur mit dem wegen des Abstandes dx örtlich veränderten Wert von $\partial\vartheta/\partial x$. Für den Wärmeinhalt des Raumelementes kommt nur die Differenz der beiden Wärmedurchtritte zur Wirkung, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(dydzdt \cdot \varkappa \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)dx = dxdydzdt \cdot \varkappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

Diese selbe Betrachtung, wie für den Wärmefluß in Richtung von x, gilt auch für die Wärmeflüsse in den Richtungen von y und z, welche demnach für die Änderung des Wärmeinhaltes des Raumelements in der Zeit dt liefern

$$dxdydzdt \cdot \varkappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad dxdydzdt \cdot \varkappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}.$$

Die Gesamtänderung dieses Wärmeinhalts ist daher

$$dxdydzdt \cdot \varkappa \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right).$$

Diese durch die Temperaturverteilung der Umgebung bedingte Änderung des Wärmeinhaltes des Raumelements hat in der gleichen Zeit dt eine Änderung $d\vartheta$ der Temperatur ϑ des Raumelements zur Folge. Dabei gilt nach Definition der spezifischen Wärme C (W 47) für die Änderung des Wärmeinhalts $C \cdot dxdydz \cdot s \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot dt$, wobei dxdydz·s das Gewicht des Raumelements ist.

Demnach muß die Gleichheit bestehen:

$$dxdydzdt \cdot \varkappa \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) = Cdxdydz \cdot s\,\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot dt$$

oder

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\varkappa}{Cs}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right). \qquad 1)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Wärmeleitung. Sie enthält die

[1]) Die runden („partiellen") Differentialzeichen ∂ machen auf die Ursache der betrachteten Änderungen aufmerksam, was gut ist, wenn mehrere Ursachen bestehen. In $\partial\vartheta/\partial x$ ist $\partial\vartheta$ die räumliche Temperaturänderung längs des Weges ∂x; in $\partial\vartheta/\partial t$ ist $\partial\vartheta$ die zeitliche Temperaturänderung während ∂t.

Lösung der vorangestellten Aufgabe für alle beliebig gegebenen Fälle[1]). Es kommt nur darauf an, eine Funktion ϑ von x, y, z, t zu finden, welche dieser Gleichung genügt und außerdem zur gegebenen Anfangszeit die gegebene räumliche Anfangsverteilung besitzt, wozu je nach Umständen auch noch andere Bedingungen kommen können, denen die Funktion zu genügen hat. Solche Bedingungen treten z. B. ein, wenn der betrachtete Körper begrenzt ist und wenn an seinen Grenzen vorgeschriebene Temperaturen herrschen sollen, die auch noch Funktion der Zeit t sein können. Die Besonderheiten der „Anfangsbedingungen" und solcher „Randbedingungen" bestimmen jeweils die Wahl unter den sehr vielen Möglichkeiten, welche eine solche „partielle Differentialgleichung" für ihre Lösungen („Integrale") frei läßt. Das Auffinden der Lösungen ist, wie bei allen Gleichungen, rein Sache des mathematischen Handwerkszeuges; Gedanken über die Natur der Dinge kommen dabei nicht weiter hinzu; diese sind in der Gleichung 1 schon zusammengefaßt. Es kommt auch — wie stets in solchem Falle — gar nicht darauf an, wie die geeignete Funktion jeweils gefunden wird; es kann das besonders bei partiellen Differentialgleichungen oft am besten durch Erraten und Probieren geschehen, wobei über die Richtigkeit der Lösung in jedem Falle die Gleichung entscheidet.

2. Für einfache Fälle genügt auch das Zurückgehen auf die Grundgedanken; entsprechend vereinfacht sich auch die Gleichung für solche Fälle.

Ist beispielsweise der Vorgang stationär (W 139), so ist überall $\partial\vartheta/\partial t = 0$, und es bleibt als Bedingung

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = 0 \ . \qquad 2)$$

Nur Temperaturverteilungen, die dieser Gleichung genügen, können stationär vorkommen. Die Gleichung besagt aber, wie die Herleitung zeigt, nur — was von vornherein klar ist —, daß jedes Raumelement ebensoviel Wärme von der Umgebung erhalten muß als es gleichzeitig verliert, andernfalls seine Temperatur sich ändern würde. Dies ist eine ähnliche Bedingung wie beim Strömen einer Flüssigkeit von unveränderlicher Dichte, in deren Innerem auch jedem Raumelement ebensoviel zuströmen muß als gleichzeitig abströmt[2]). Daher kann stationäre Wärmeleitung ebenso durch Strömungslinien (M 388 u. f.) dargestellt werden, wie stationäre Flüssigkeitsbewegung. Wenn beispielsweise im Inneren eines Wärmeleiters eine heiße und eine kalte Stelle durch Wärmezufuhr bzw. -abfuhr dauernd erhalten bleiben, so wird der Leitungsvorgang von der ersteren Stelle (+) zur letzteren (—) durch die Strömungslinien von Abb. 103 (Bd. I) dargestellt. Die Linien geben überall die Richtung des Temperaturgefälles an, die Dichte der Linien die Größe dieses Gefälles. Überall senkrecht zu den Strömungslinien stehende Flächen verbinden Punkte gleicher Temperatur.

3. Die Behandlung nichtstationärer Wärmeleitungsvorgänge ist in allem Wesentlichen schon bei Leitung in nur einer Richtung zu erläutern ($\partial\vartheta/\partial y = 0$, $\partial\vartheta/\partial z = 0$). Es wird dann Gleichung 1

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\varkappa}{Cs}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} \ . \qquad 3)$$

[1]) Man bemerkt, daß Einheitlichkeit von $\varkappa/Cs$ im ganzen wärmeleitenden Körper vorausgesetzt war. Nichteinheitliche Körper behandeln wir hier nicht, da sie grundsätzlich Neues nicht bieten.

[2]) Diese Ähnlichkeit kommt in Gl. b des Anhangs M V über Hydrodynamik (Bd. I) zum Ausdruck. Ist in dieser Gleichung die Dichte D unveränderlich, so wird $du/dx + dv/dy + dw/dz = 0$; die Gleichung wird somit identisch mit Gl. 2 hier, wenn die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w durch die Komponenten des Temperaturgefälles $\partial\vartheta/\partial x$, $\partial\vartheta/\partial y$, $\partial\vartheta/\partial z$ ersetzt werden.

Die Gleichung fordert eine Funktion ϑ, die einmal nach der Zeit differenziert dasselbe gibt (bis auf eine Konstante), wie zweimal nach x differenziert. Eine solche Funktion ist

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_0 e^{-at} \sin bx \qquad 4)$$

Man findet durch Einsetzen in die Gleichung 3, daß derselben genügt wird, wenn $a = b^2\varkappa/Cs$ genommen wird. Es wäre dann zur Anfangszeit ($t = 0$) $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_0 \sin bx$, d. h. man hätte damit den Temperaturverlauf für alle Zeiten gefunden für den Fall einer sinusförmigen Anfangsverteilung der Temperatur. Der Verlauf besteht in allmählichem Verschwinden der Temperaturungleichheiten, so wie e^{-at} mit der Zeit herabsinkt, und schließlicher Erreichung der überall gleichen Endtemperatur ϑ_1.

Für andere, beliebige Anfangsverteilungen der Temperatur bedenkt man, daß eine Summe von Sinusfunktionen — wie 4 — mit beliebigen Werten von b ebenfalls der Gl. 3 genügt und daß durch eine solche Summe bei geeigneter Wahl der einzelnen Sinusbestandteile jede beliebige Funktion von x dargestellt werden kann (vgl. A 64). Damit ist der Temperaturverlauf in einer Leitermasse auch bei beliebiger Anfangsverteilung der Temperatur gefunden, wenn keine Grenzbedingungen hinzukommen. Der Verlauf besteht wieder im Verschwinden aller Ungleichheiten, was aber bei den einzelnen Sinusbestandteilen verschieden schnell stattfindet; die dichtest nebeneinander liegenden Ungleichheiten verschwinden am schnellsten, weil mit b auch $a = b^2\varkappa/Cs$ wächst. Übrigens ist, wie man sieht, für die Geschwindigkeit des Ausgleichs stets $\varkappa/Cs$ maßgebend (Temperaturleitvermögen, W 149).

4. Als Beispiel eines Falles mit gegebenen Grenzbedingungen sei das Eindringen von andauernd periodischen Temperaturschwankungen von einer Oberfläche her in eine Leitermasse betrachtet. Dieser Fall findet sich an der Erdkugel verwirklicht, deren Oberfläche den täglichen Temperaturschwankungen von Tag und Nacht und außerdem den jährlichen von Sommer und Winter ausgesetzt ist (W 145). Man kann dabei die Erdoberfläche als eben betrachten, und wenn die Tiefe unter dem Erdboden mit x bezeichnet wird, ist wieder Gl. 3 maßgebend.

Die Grenzbedingung ist, daß bei $x = 0$ $\vartheta = A \sin Bt$ sei, wobei B sowohl für den Tag als auch für das Jahr eingerichtet werden kann. Dieser Bedingung samt Gl. 3 genügt die Funktion

$$\vartheta = A \cdot e^{-ax} \sin(Bt - bx)\,, \qquad 5)$$

jedoch nur, wenn $b = a$ genommen wird, wie man durch Einsetzen in Gl. 3 findet, wobei außerdem sich zeigt, daß $a = \sqrt{BCs/2\varkappa}$ sein muß.

Die Temperaturschwankungen dringen danach mit gleicher zeitlicher Periode, wie an der Oberfläche, in die Tiefe ein, nur mit Verspätung (Wachsen von x erfordert Wachsen von t für gleichen Wert des Sinus) und mit Abschwächung. Letztere erfolgt nach e^{-ax}, d. i. um so stärker je größer B und je schlechter die Leitung ist; die tägliche Schwankung ($B = 2\pi/\text{Tag}$) wird also viel stärker abgeschwächt als die jährliche ($B = 2\pi/\text{Jahr}$). Man bemerkt, daß Gl. 5 eine Welle darstellt (vgl. Anh. A I), eine Temperaturwelle, und zwar wegen der Exponentialfunktion eine gedämpfte Welle (vgl. Anh. M I b, Bd. I), die von der Oberfläche aus ins Erdinnere eindringt. Die Wellenlänge, d. i. die Tiefe, in welcher dieselben Temperaturextreme (in Abschwächung) wiederkehren, wie gleichzeitig an der Oberfläche, ist $\lambda = 2\pi/b = 2\pi/\sqrt{BCs/2\varkappa}$, sie wächst also mit der Leitfähigkeit und ist für die jährliche Schwankung viel größer als für die tägliche. Zahlenbeispiele für den Verlauf dieser Temperaturwellen in der Erde sind unter W 145 gegeben.

4a. Die bei dieser Berechnung angenommene Grenzbedingung der periodischen Temperaturschwankung an der Oberfläche stimmt mit der Wirklichkeit in bezug auf die Erde überein; jedoch finden die Schwankungen bekanntlich verspätet gegenüber dem Sonnenstand statt; die heißeste Sommerzeit folgt nach den längsten Tagen, ebenso die höchste Tagestemperatur nachmittags. Man kann auch dies in die vorhergegangene Rechnung (4) einbeziehen, weil diese Verspätungen dieselben Ursachen haben wie das ebenfalls verspätete Eindringen der Temperaturen ins Erdinnere, nämlich Wärmeleitung und Wasserwert der Erdschichten.

Gegeben sei die Größe der jährlichen Temperaturschwankung Δ einer der Ein- und Ausstrahlung an der Erdoberfläche frei ausgesetzten schwarzen Thermometerfläche, die weder wesentlichen Wasserwert noch Wärmeableitung und daher auch keine Verspätungen hat (in mittleren Breiten ist vielleicht $\Delta = 50^0$). Die jährliche Temperaturschwankung ϑ des Erdbodens ist geringer (in mittleren Breiten etwa 30^0), weil er Wasserwert und Ableitung hat, und diese Schwankung hat die gesuchte Verspätung t. Man denke nun eine Erdschicht über den Erdboden gelagert von solcher Dicke x, daß eine jährliche Schwankung Δ an der Oberfläche dieser Schicht in dieser Tiefe x auf ϑ herabsinkt. Die Verspätung, mit welcher dies geschieht, muß — wie leicht einzusehen — auch die gesuchte Verspätung t der Schwankung ϑ an der Erdoberfläche gegen den Sonnenstand sein. Man hat danach, gemäß Gleichung 5 $e^{-ax} = \vartheta/\Delta$ und die Verspätung $t = ax/B$.

Mit $\vartheta/\Delta = 30^0/50^0$ und $B = 2\pi/\text{Jahr}$ ergibt sich $t = 0{\cdot}97$ Monat; mit $B = 2\pi/\text{Tag}$ ist $t = 1{\cdot}9$ Stunden. Beides entspricht der Wirklichkeit in mittleren Breiten: längster Tag Ende Juni, höchste Sommertemperatur Ende Juli; wärmste Tagesstunde 2 Uhr nachmittags (bei vorausgesetzter Tageslänge von 12 Stunden).

Anhang W II (zu W 61, 162, 240, 253). Adiabatische Zustandsänderung eines Gases.

1. Man nennt eine Zustandsänderung adiabatisch, wenn sie ohne Wärmezufuhr oder -abfuhr stattfindet. Das Gas kann dabei in einem wärmeundurchlässigen Gefäß eingeschlossen sein (daher der Name); es können aber auch ohne solches Gefäß adiabatische Zustandsänderungen stattfinden, besonders wenn sie sehr schnell sind, so daß keine Zeit zu Wärmeaustausch mit der Umgebung vorhanden ist, wie beispielsweise bei der Schallbewegung (A 24). Die große Geschwindigkeit ist in der Ausführung überhaupt meist die Hauptsache, so im pneumatischen Feuerzeug (W 61, 71) oder bei Gasverflüssigungsversuchen (W 240). Bei sehr großen Gasvolumen, die entsprechend wenig Austauschfläche gegen die Umgebung bieten, sind nicht zu langsame Änderungen überhaupt immer adiabatisch, so bei der Messung des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen (W 62) oder bei den Vertikalbewegungen in der Erdatmosphäre (W 162).

Es kommt darauf an, den für adiabatische Änderungen geltenden Zusammenhang zwischen den drei zustandsbestimmenden Größen, Volum V, Druck p und Temperatur T des Gases, zu ermitteln.

Wir beziehen die Rechnung auf 1 gr des Gases.

2. Gaskonstante R[1]. — Das Gas sei genügend verdünnt (M 359), so daß aus zweien der drei Größen V, p, T die dritte immer berechnet werden kann nach der Gl. W 38, $pV/T = R$.

Wärmemengen messen wir der Einfachheit halber in Arbeitsmaß.

Es ist dann die Konstante $R = p_1 V_1/T_1 = c_p - c_v$, was nach Robert Mayers bewährtem Gedankenversuch (W 72) leicht einzusehen ist. Denn wird $T_1 = 273^0$ abs. genommen, so ist V_1/T_1 die Volumzunahme bei Erwärmung des Gases um 1^0

[1]) Siehe über R auch W 38.

und also $p_1(V_1/T_1)$ die Arbeit dabei (M 378), welche aber auch durch den Unterschied der beiden spezifischen Wärmen, $c_p - c_v$, gegeben ist, die ebenfalls auf 1 gr Gas sich beziehen. Es ist demnach

$$pV/T = c_p - c_v \qquad 1)$$

3. Es werde nun das Volum V des Gases adiabatisch um dV geändert, was mit der Arbeit pdV verbunden ist. Diese Arbeit erscheint als Wärmemenge dQ im Gas, wenn Volumverkleinerung stattgefunden hat (dV negativ ist); sie verschwindet im Gas, wenn Volumvergrößerung stattgefunden hat (dV positiv ist). Es ist daher nach dem Energiegesetz, weil andere Energien nicht vorkommen, $dQ = -pdV$. Da Wärmeaustausch nach oder von außen ausgeschlossen ist, erfolgt eine dQ entsprechende Temperaturänderung dT des Gases nach der Gleichung $dQ = c_v dT$. Als spezifische Wärme des Gases gilt hierbei c_v, weil als Wirkung von dQ nur Temperaturänderung auftritt, nicht auch die in c_p mit einbegriffene Ausdehnungsarbeit[1]). Es muß demnach $c_v dT = -pdV$ sein, und dies ist die Gleichung, welche V, p und T für den Fall adiabatischer Änderung verbindet. Da die drei Größen außerdem durch Gl. 1 miteinander verbunden sind, kann je eine von ihnen eliminiert werden, um den adiabatischen Zusammenhang der beiden anderen Größen zu erhalten.

Elimination von p durch Einsetzen aus Gl. 1 gibt

$$c_v dT = -\frac{T}{V}(c_p - c_v)dV \quad \text{oder, mit } \frac{c_p}{c_v} = k\,,$$

$$\frac{dT}{T} + (k-1)\frac{dV}{V} = 0\,, \text{ was integriert } \log T + (k-1)\log V = \text{Konst. oder}$$

$$TV^{k-1} = \text{Konst.} \quad \text{gibt.} \qquad a)$$

Dies ist der adiabatische Zusammenhang von T und V. Nach ihm sind beispielsweise die Temperaturen berechenbar, welche im pneumatischen Feuerzeug (W 61, 71) bei gegebener, genügend schneller und also adiabatischer Volumverminderung der Luft eintreten. Man findet mit $k = 1.41$ (Tab. 23) bei Zusammendrückung auf ½, ¼, $^1/_{10}$ Volum, ausgehend von 0°C die Temperaturen 90°C, 209°C, 429°C.

Man kann nun in Gl. a V aus Gl. 1 durch T und p ersetzen, um den adiabatischen Zusammenhang von T und p zu erhalten; derselbe ist danach:

$$\frac{T^k}{p^{k-1}} = \text{Konst.} \qquad b)$$

Nach dieser Gleichung können beispielsweise die Temperaturerniedrigungen berechnet werden, welche, wie bei der ersten Verflüssigung des Sauerstoffs (W 240), bei plötzlicher Entlastung zusammengedrückten Gases eintreten, wobei die erst bei tiefen Anfangstemperaturen wesentliche Mitwirkung der Molekularkräfte (W 242) nicht mitgerechnet ist. Auch für die Beurteilung der Temperaturverteilung in der Erdatmosphäre ist Gl. b maßgebend (siehe 4).

Entsprechend erhält man auch den adiabatischen Zusammenhang zwischen V und p:

$$pV^k = \text{Konst.} \qquad c)$$

Dieser Zusammenhang ist beispielsweise maßgebend für zutreffende Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Gasen (A 24; Anh. A VI). Vergleicht man die adiabatische Gl. c mit dem isothermischen[2]) Zusammenhang zwischen V und p, welcher Boyles und Mariottes Gesetz ist, nämlich $pV = \text{Konst.}$, so sieht man als

---

[1]) Die Volumänderung dV ist nicht Wirkung, sondern Ursache von dQ.

[2]) Isothermisch heißt: bei gleichbleibender Temperatur (wonach Wärmezu- oder -abfuhr sich einzurichten hat; W 253).

Unterschied das Auftreten von k als Exponenten von V beim adiabatischen Zusammenhang. Man nennt daher Gl. c manchmal auch das „potenzierte Mariottesche Gesetz". Da $k > 1$, ist die adiabatische Druckänderung größer als die isothermische bei gleicher Volumänderung, was übrigens durch die Temperaturänderung wegen der Wärmewirkung der Arbeit unmittelbar verständlich ist (W 71); Gl. c gibt nur das Quantitative dazu.

4. Temperaturverteilung in der dauernd vollkommen durchmischten Atmosphäre.

Temperaturunterschiede verschiedener Höhen entstehen durch adiabatische Zustandsänderung der Luft- beim Auf- und Abströmen, entsprechend der Druckverteilung in der Atmosphäre (W 162).

Für die Druckverteilung gilt (Anh. M III)

$$dp = -p\frac{s_0}{p_0}\,dh$$

oder, weil es hier auch auf die Temperaturunterschiede der Höhen ankommt

$$dp = -\frac{p}{T}\frac{T_0}{V_0 p_0}\,dh\,,$$

wobei in der Bezeichnung dieses Anhanges $s_0 = 1/V_0$ gesetzt ist.

Aus dieser Druckverteilung folgt die Temperaturverteilung mittels Gl. b (3), nach welcher in Differentialform

$$dT = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{T}{p}\cdot dp \text{ ist, Es ist somit}$$

$$dT = -\frac{k-1}{k}\cdot\frac{T_0}{V_0 p_0}\cdot dh = -\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{c_p - c_v}\,dh = -\frac{1}{c_p}\,dh\,.$$

c_p (Tab. 22) ist in dem hierbenutzten Arbeitsmaß 0·238(Kal/kgr°C) · 427 mkgr/Kal = 102m/°C, daher

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{1}{102}\frac{{}^0C}{m}\,.$$

Es kommt also auf 102 m oder rund 100 m Höhenaufstieg 1° Temperaturabnahme. Die Beobachtungen zeigen durchschnittlich eine etwas geringere Temperaturabnahme. Es kann das teils dem Wassergehalt der Luft zugeschrieben werden, der wegen hinzukommender Verdichtungswärme bei Wolkenbildung die Luft oben weniger kalt machen muß; außerdem wirkt auch direkte Erwärmung trüber Luft durch die Sonnenstrahlung in diesem Sinne.

Über etwa 10 km reicht die Durchmischung der Atmosphäre nach Anzeige der Wolkenbildungen nicht hinauf, wohl weil dort die Druckunterschiede gegenüber der unverminderten inneren Reibung (W 97) zu klein sind; es ist daher die hier berechnete Temperaturverteilung dort auch nicht zu erwarten[1]).

Anhang W III (zu W 253). Berechnung des einfachsten Kreisvorganges an genügend verdünntem Gas.

Dieser aus 2 adiabatischen und 2 isothermischen Zustandsänderungen abwechselnd zusammengesetzte, schon von Carnot (1824) gedachte, unter W 253 eingehend beschriebene Kreisvorgang ist wichtig; denn er gab den Weg zur Ermittelung des Wirkungsgrades aller vollkommen umkehrbaren Kreisvorgänge (W 252) und damit zum II. Hauptsatz der Wärmetheorie.

[1]) Zu bemerken ist übrigens, daß es in größeren Höhen zunehmend schwierig wird, die Temperatur der Luft zu messen. Das Thermometer ist dort verhältnismäßig wenig Luftmolekülen und viel durch seine Hüllen aufgefangener und innen weiter gegebener Strahlung ausgesetzt; seine Anzeigen gehen daher leicht über Lufttemperatur. Die Anzeigen sind dann auch abhängig von der Beschaffenheit der Hüllen und, falls dieselben nicht kugelförmig sind, von ihrer Orientierung zur Strahlungsquelle (Sonne).

Es seien die 4 Volume, welche das Gas bei diesem Vorgang der Reihe nach annimmt, mit V_1, V_2, V_3, V_4 bezeichnet.

Die zweite und die vierte Änderung sind adiabatisch; es gilt für die zweite, welche von T_2 auf T_1 und von V_2 auf V_3 führt:

$$T_2/T_1 = (V_3/V_2)^{k-1} \qquad \text{(Anh. W II, 3, Gl. a)}$$

und für die vierte, die wieder auf T_1 und von V_4 auf V_1 zurückführt:

$$T_2/T_1 = (V_4/V_1)^{k-1} ,$$

woraus zusammengenommen folgt:

$$V_3/V_2 = V_4/V_1 \quad \text{oder} \quad V_2/V_1 = V_3/V_4 .$$

Dieser Proportion entsprechend müssen also die Volume zueinander abgepaßt sein, damit der ganze Vorgang in sich zurückläuft.

Die erste und die dritte Änderung sind isothermisch; sie erfolgen daher nach Boyles und Mariottes Gesetz,

$$pV = RT.$$

Die dabei geleistete Arbeit ist für jeden Teil der Volumänderung pdV (M 378), im ganzen also für die erste Änderung, die bei der Temperatur T_2 von V_1 auf V_2 führt,

$$\int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_2}{V} dV = RT_2 \log \frac{V_2}{V_1} ,$$

und für die dritte Änderung, die bei T_1 von V_3 auf V_4 führt, entsprechend

$$RT_1 \log \frac{V_3}{V_4} .$$

Ebenso groß wie diese Arbeiten müssen nach dem Energiegesetz auch die zugehörigen, gleichzeitig vom Gas aufgenommenen bzw. abgegebenen Wärmemengen Q_2 und Q_1 sein, weil der Energieinhalt des Gases bei gleichbleibender Temperatur ungeändert bleibt und andere Energien nicht auftreten. Es muß also sein

$$Q_2 = RT_2 \log (V_2/V_1) \text{ und } Q_1 = RT_1 \log (V_3/V_4).$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der bereits gefundenen Volumverhältnisse das Verhältnis der beiden Wärmemengen $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$, wonach der gesuchte Wirkungsgrad des Kreisvorgangs

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \quad \text{ist.}$$

Anhang W IV (zu W 255). Verschiedene Formen des Zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie; Entropie.

1. Durch die vorhergehende Gleichung vom Wirkungsgrad,

$$(Q_2 - Q_1)/Q_2 = (T_2 - T_1)/T_2,$$

ist der II. Hauptsatz der Wärmetheorie für den besonderen Fall eines vollkommen umkehrbaren — übrigens beliebigen — Kreisvorganges (W 252) ausgesprochen, der bei den 2 feststehenden Temperaturen T_2 und T_1 arbeitet und bei welchem die Wärmemenge Q_2 aufgenommen und Q_1 wieder abgegeben wird.

Der Satz, welcher in dieser Form unmittelbar nur auf den Wirkungsgrad des Kreisvorganges sich bezieht, läßt sich auch auf allgemeiner gültige Formen bringen.

2. Man kann zunächst die Gleichung in der Form schreiben:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0 .$$

Gibt man jetzt jeder aufgenommenen Wärmemenge das positive, jeder abgegebenen das negative Zeichen, rechnet man also überhaupt nur mit aufgenommenen Wärmemengen, Q_2 und $-Q_1$, so sagt die Gleichung, daß bei jedem vollkommen umkehrbaren Kreisvorgang die Summe der aufgenom-

menen Wärmemengen, jede geteilt durch die Temperatur, bei welcher sie aufgenommen wurde, gleich Null ist.

In dieser Form gilt der Satz nicht nur für zwei, sondern für beliebig viele Wärmemengen, die bei beliebig vielen verschiedenen Temperaturen aufgenommen sein können. Man kann ihn dann auch in der Form schreiben

$$\sum \frac{Q}{T} = 0 ,$$

wobei das Zeichen Σ die Summierung aller zum Kreisvorgang gehörigen Quotienten Q/T bedeutet. Jeder Quotient gehört zu einem der isothermischen Teile des Kreisvorganges, die mit beliebig vielen adiabatischen Teilen abwechseln können, welche letztere nichts zur Summe beitragen, da bei ihnen $Q = 0$ ist.

3. Die isothermischen Teile des Kreisvorgangs können dabei beliebig kurz sein, was Wärmeaufnahme bei veränderlicher Temperatur zu berücksichtigen erlaubt; es wird dann jeweils bei bestimmter Temperatur T nur eine unendlich kleine Wärmemenge dQ aufgenommen, und die nächste Wärmeaufnahme dQ findet schon bei anderer Temperatur T statt. Die Summe besteht dann, falls im ganzen endliche Wärmeaufnahme stattfindet, aus unendlich vielen Summanden, d. h. sie wird ein Integral, und der Satz nimmt dann die Form an

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 ,$$

wobei die Integration über einen geschlossenen Kreisvorgang zu nehmen ist.

4. Eine solche Summe von Wärmemengen, jede geteilt durch die Temperatur, bei welcher ein betrachteter Körper sie in umkehrbarer Weise aufgenommen hat oder aufnimmt, kann für jeden beliebigen Körper gebildet werden, der unter bekannter Wärmeaufnahme bei bekannten Temperaturen von einem festgesetzten Anfangszustand in einen beliebigen Endzustand übergeht. Null wird die Summe nach Vorigem, wenn der Körper einen Kreisvorgang durchlaufen hat, d. i. wenn der Endzustand mit dem Anfangszustand übereinstimmt; andernfalls hat sie einen bestimmten endlichen Wert, der mit S bezeichnet sei, so daß

$$S = \int_a^b \frac{dQ}{T}$$

ist, wobei die Zeichen a und b anzeigen, daß die Summierung von einem Anfangszustand a bis zum Endzustand b auszuführen ist. S wird dann die Entropie des Körpers im Zustand b genannt, bezogen auf den Anfangszustand a, oder auch die Entropieänderung von a bis b (Clausius 1865).

Die Bedeutung dieser Größe — samt der Rechtfertigung einer besonderen Benennung für sie — liegt darin, daß sie unabhängig ist von der Art der Überführung des Körpers vom Zustand a in den Zustand b, wenn nur — wie stets vorausgesetzt — alle von a bis b führenden, miteinander verglichenen verschiedenen Vorgangsreihen vollkommen umkehrbar sind. Denn wenn die Überführung von a nach b zuerst über eine bestimmte Reihe R_1 von Zuständen und dann über eine andere Reihe R_2 erfolgt, so kann S doch nicht verschieden ausfallen, weil man die Reihe R_2 auch umgekehrt durchlaufen lassen kann, so daß der Körper nach Durchlaufung von R_1 und dann der umgekehrten Reihe R_2 in den Zustand a zurückkehrt, also einen Kreisvorgang durchlaufen hat, für den die Entropieänderung Null ist (3). Da bei Umkehrung alle dQ ihr Vorzeichen ändern, ändert auch der ganze Entropieunterschied sein Vorzeichen, woraus man sieht, daß das Nullwerden der Gesamtentropieänderung von a bis b und dann von b bis a die Gleichheit der Entropieänderungen von a bis b auf den beiden Wegen R_1 und R_2 bedeutet. Da diese beiden Wege aber beliebig waren, gilt die

Gleichheit für alle Wege, die vom Zustand a zum Zustand b führen, wenn sie nur vollkommen umkehrbar sind.

Diese Feststellung der Abhängigkeit der Entropieänderung eines Körpers nur von Anfangs- und Endzustand, unabhängig von den beim Übergang umkehrbar durchlaufenen Zwischenzuständen, ist auch eine der brauchbaren Fassungen des II. Hauptsatzes.

5. Da man immer nur mit Entropieunterschieden zu tun hat,[1]) so ist es am einfachsten, unendlich kleine Unterschiede dS zu betrachten. Auch für diese gilt (4), daß sie unabhängig sind von der Art oder Reihenfolge der vollkommen umkehrbaren Zustandsänderungen, welche zur Entropieänderung dS führen, nur abhängig von den Zuständen am Anfang und am Schluß dieser Änderung. Diese Behauptung läßt sich in Gestalt einer Gleichung bringen, die dann auch eine Form des II. Hauptsatzes ist:

Der jeweilige Zustand eines gegebenen Körpers, an dem Wärmevorgänge ablaufen, ist nämlich meist durch 2 Veränderliche vollkommen bestimmt, seien es Temperatur und Druck oder Druck und Volum oder auch 2 andere willkürlich veränderliche Größen, die wir mit x und y bezeichnen wollen. Wird dann dem Körper von bekanntem Anfangszustand aus die kleine Wärmemenge dQ zugeführt, so wird das eine entsprechend kleine Änderung seines Zustandes hervorbringen, wobei x und y um dx und dy sich ändern. Ist der Ablauf dieser Änderung genügend bekannt, so kann der Zusammenhang

$$dQ = X dx + Y dy \qquad a)$$

angegeben werden, wobei X und Y irgendwelche, je nach Körper und Vorgang verschieden sich ergebende Funktionen von x und y sind[2]). Danach ist auch die Entropieänderung

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{X}{T} dx + \frac{Y}{T} dy \quad \text{bekannt.} \qquad b)$$

Während aber dQ nach Gleichung a wohl mit den zugehörigen unendlich kleinen Änderungen dx und dy zusammenhängt, gehört zu endlichen Änderungen von x und y doch keineswegs eine bestimmte Änderung von Q, sondern diese Änderung hängt noch von der Art und Reihenfolge der Änderungen von x und y ab[3]), was in der Ausdrucksweise der Mathematik heißt: Q ist durch Gl. a nicht als Funktion von x und y gegeben.[4]) Dagegen muß S durch Gl. b eindeutig als Funktion von x und y bestimmt sein; denn für die Entropie S ist nach Vorigem (4) jede Art vollkommen umkehrbaren Überganges von einem Zustand in einen anderen gleichwertig, so daß zu jeder beliebigen, den Körperzustand bestimmenden Angabe für x und y ein bestimmter Wert von S gehört, gerechnet von festgelegtem Anfangszustande aus. Dies findet seinen Ausdruck in der für alle Funktionen von 2 unabhängigen Veränderlichen geltenden Gleichung[5])

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy \, .$$

---

[1]) Um die ganze Entropie eines Körpers zu berechnen, müßte man von einem Anfangszustand ausgehen, in welchem die Entropie nicht mehr zu verkleinern wäre, d. i. in welchem man dem Körper keine Wärmemengen mehr entziehen kann. Es wäre das der Zustand beim absoluten Nullpunkt der Temperatur.

[2]) Vgl. als Beispiel 6.

[3]) Z. B. ob zuerst x und dann y geändert wird oder umgekehrt. Man überzeugt sich davon im nachfolgenden Beispiele (6).

[4]) Q wäre durch Gl. a nur dann als Funktion von x und y gegeben, wenn ein gegebener Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen bestünde. Dies ist aber nicht der Fall; denn sie sollen voneinander unabhängig sein, um Zustandsänderungen aller Art zu berücksichtigen.

[5]) Die runden Zeichen ∂ zeigen Differentialquotienten an, bei welchen jeweils nur die eine, im Nenner stehende Veränderliche geändert wird.

Danach muß also, im Vergleich mit Gl. b,

$$X/T = \partial S/\partial x \quad \text{und} \quad Y/T = \partial S/\partial y \quad \text{sein,}$$

oder, weil

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) \quad \text{ist,}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{T}\right) . \qquad \text{c)}$$

Diese Gleichung c ist somit ebenfalls Ausdruck der Bestimmtheit der Entropie durch den Körperzustand, unabhängig von der Art der Erreichung des Zustandes, und damit auch Ausdruck des II. Hauptsatzes. Die Gleichung ist aus Gl. a stets unmittelbar herstellbar; man besitzt sie also für jeden Fall eines genügend bekannten umkehrbaren Wärmevorganges an irgendwelchen Körpern, und es ist damit in Gl. c eine durch den II. Hauptsatz gesicherte Aussage für den betreffenden Vorgang gewonnen. Dabei ist es sogar nur nötig, das kleine Stück des Vorganges in einem Gedankenversuch zu verfolgen, welches zur Herstellung der Gl. a nötig ist.

In dieser Weise hat der II. Hauptsatz die meisten Anwendungen gefunden; auch die unter W 256—258 mit Hilfe von Kreisvorgängen entwickelten Sätze sind so zu gewinnen, wofür das Folgende ein Beispiel gibt.

6. Als ein Beispiel der Anwendung des Vorigen (5) sei die Herleitung von Stefans Gesetz (W 175, 257) mittels Gl. c aus der Kenntnis vom Strahlungsdruck betrachtet. Das Beispiel zeigt auch, daß von Wärmestrahlung erfüllte, materiefreie Räume ebenso gut der Behandlung zugänglich sind, wie materielle Körper. Die Vorgänge des zugehörigen Gedankenversuchs, von dem hier nur ein kleiner Teil benötigt wird, sind schon bei der früheren Berechnung des Falles behandelt (W 257); wir benutzen hier auch dieselben Bezeichnungen wie dort.

Als unabhängige Veränderliche, welche vollkommen das Maßgebliche des Zustandes des zu betrachtenden Strahlungsraumes bestimmen, sind hier zu wählen: das Volum V des Raumes und die Energiedichte $\mathfrak{D}$ in demselben.

Um die Gleichung a zu gewinnen, werde dem Raum, dessen Strahlungsdichte schon mit der schwarzen Wand von der Temperatur T ausgeglichen ist (W 177), durch unendlich kleine Steigerung von T, also in vollkommen umkehrbarer Weise (W 250), weitere Energie dQ in Gestalt von Strahlung zugeführt[1]). Dies hat zwei Folgen: 1. steigt der Energieinhalt $V\mathfrak{D}$ des Raumes um $d(V\mathfrak{D})$, 2. wird bei Dehnung des Raumes durch den Strahlungsdruck, welcher $\frac{1}{3}\mathfrak{D}$ ist (vgl. W 257), die Arbeit $\frac{1}{3}\mathfrak{D}dV$ nach außen abgegeben; es ist also nach dem Energiegesetz (I. Hauptsatz der Wärmetheorie)

$$dQ = d(V\mathfrak{D}) + \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}dV$$
$$= Vd\mathfrak{D} + \tfrac{4}{3}\mathfrak{D}dV . \qquad \text{a}')$$

Man bemerkt, daß die 4 Größen x, y, X, Y der allgemeinen Gleichung a (5) im hier vorliegenden Sonderfall a′ der Reihe nach durch $\mathfrak{D}$, V, V, $\frac{4}{3}\mathfrak{D}$ gegeben sind. Die den II. Hauptsatz enthaltende Gl. c (5) ist demnach hier

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}}\left(\frac{\frac{4}{3}\mathfrak{D}}{T}\right) \qquad \text{c}')$$

oder, da nur T und $\mathfrak{D}$, nicht T und V zusammenhängen,

$$\frac{1}{T} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{T} - \frac{\mathfrak{D}}{T^2}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{D}}\right), \qquad \text{somit} \qquad T = 4\mathfrak{D}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{D}} .$$

Dies ist also der Zusammenhang von T und $\mathfrak{D}$, welchen der II. Hauptsatz zu-

[1]) Wir nehmen einheitliches Maß für alle Energiemengen, auch Wärme.

nächst in Gestalt einer Differentialgleichung liefert. Man überzeugt sich leicht durch Differentiation, daß ihr das Integral

$$\mathfrak{D} = C \cdot T^4$$

entspricht, und dies ist Stefans Gesetz.

7. Allgemeines Verhalten der Entropie, auch bei nichtumkehrbaren Vorgängen. — Untersucht man die stets als $\int dQ/T$ zu berechnende Entropie beim Verlaufe von Vorgängen innerhalb einer Körpergruppe[1]), die ohne äußere Einwirkungen, von selbst ablaufen, so findet man stets Zunahme der Entropie, wenn die Vorgänge nicht umkehrbar sind; ungeändert bleibt die Entropie, wie oben nachgewiesen, wenn die Vorgänge vollkommen umkehrbar sind. Man kann daher allgemein sagen, daß die Entropie bei Vorgängen, die ohne äußere Einwirkung von selber verlaufen, nicht abnimmt, immer nur zunimmt, nur im Grenzfall (W 250) der vollkommen umkehrbaren Vorgänge unverändert bleibt. Es zeigt damit die Entropie eine Einseitigkeit ihrer Möglichkeiten bei von selber verlaufenden Vorgängen. Dies entspricht ganz der Einseitigkeit des Naturverhaltens, die in dem Satze zum Ausdruck kommt, daß Wärme niemals dauernd von selber von einem kälteren zu einem heißeren Körper übergeht, sondern immer nur umgekehrt, welcher Satz eine Zusammenfassung allgemeinster Erfahrung über Naturvorgänge, nicht nur die Wärme betreffend, darstellt (W 111, 112).

Eine weitere Aussage über das Verhalten der Entropie ergibt sich aus der Kenntnis, daß bei den vollkommen umkehrbaren Vorgängen nur unendlich kleine Temperatur-, Druck- und Geschwindigkeitsunterschiede vorkommen (W 250). Dies entspricht Zuständen, die von selber nur unendlich langsam sich ändern, die also so gut wie unverändert weiterbestehen können. Die nicht umkehrbaren Vorgänge bieten dagegen stets unhaltbare Zustände; denn es kommen dabei endliche Temperatur-, Druck- und Geschwindigkeitsstufen vor, und diese kommen von selber zum Ausgleich, soweit es die gegebenen Umstände zulassen. Es gehen daher die Zustände der nicht umkehrbaren Vorgänge selbsttätig in die Dauerzustände der umkehrbaren Vorgänge über; oder, nach dem bereits bemerkten Verhalten der Entropie: Zustände, die von selber Wachsen der Entropie zur Folge haben, gehen selbsttätig in Zustände des Gleichbleibens der Entropie über, so daß man auch sagen kann: Die Entropie einer, äußeren Einwirkungen entzogenen Körpergruppe wächst selbsttätig solange an, bis sie den höchsten unter den gegebenen Umständen möglichen Wert erreicht hat, der dann ungeändert weiterbestehen bleibt.

Anhang W V (zu W 88, 175 u. f.). Entropie und Wahrscheinlichkeit.

1. Die Entropie war ursprünglich Rechnungsgröße zur Erleichterung der Anwendung des II. Hauptsatzes (Anh. W IV, 4—6). Ihre gute Bewährung hierbei sowie ihr bemerkenswertes allgemeines Verhalten (Anh. W IV, 7) ließ sogleich denken, daß ihr eine wesentliche und wohl einfache Bedeutung für die Wärme selbst zukommen müsse, etwa wie der Temperatur als mittlerer kinetischer Energie der Moleküle im Gaszustand. Es hat großer Anstrengungen bedurft, die der Entropie zugehörige Bedeutung zu finden (Boltzmann 1877). Die Schwierigkeit liegt in der Ungeordnetheit und daher Verwickeltheit der Wärmebewegung, die stets eine sehr große Zahl von Molekülen betrifft und im einzelnen selbst bei einem Gas mit nur einatomigen Molekülen schwer zu erfassen ist.

[1]) Es ist in dieser verallgemeinerten Auffassung der Entropie das Integral über alle Teile der Körpergruppe zu nehmen, so daß dQ auf alle Wärmemengen sich bezieht, die von allen einzelnen Raumelementen der Körpergruppe während des betreffenden Vorgangs aufgenommen werden.

Unmittelbar zu sehen war, daß die Entropie, die durch vollkommen umkehrbare Kreisvorgänge nicht geändert wird, bei nicht umkehrbaren Vorgängen aber wächst, mit der Ungeordnetheit der Bewegungen der Moleküle zu tun haben muß; denn es wächst bei nicht umkehrbaren Vorgängen auch die Ungeordnetheit der Bewegungen in der betrachteten Körpergruppe. So geht beispielsweise bei Reibung die geordnete Bewegung sichtbarer Massen in ungeordnete der Moleküle über, und ebenso geht bei Wärmeleitung mit Temperatursprüngen die vorher geordnete Sonderung verschieden großer Molekulargeschwindigkeiten in ungeordnete Allgemeinverteilung derselben über. Die Entropie einer Körpergruppe erscheint demnach als ein gewisses Maß der Ungeordnetheit der Bewegungen in ihr.

2. Um darüber klar zu werden, muß auf die Einzelheiten der Wärmebewegung eingegangen werden. Für gewöhnlich ist der Zustand einer gegebenen Gasmenge, bestehend aus einer bestimmten Molekülzahl, genügend festgelegt, wenn Volum, Druck und Temperatur gegeben sind. Anders ist es aber, wenn man auf die Bewegungen der vielen Moleküle im Gase eingeht; denn es können gleichen Werten dieser 3 Zustandsbestimmungsstücke sehr viele, verschiedene Verteilungen der Moleküle und ihrer Geschwindigkeiten im gegebenen Volum entsprechen, Verteilungen, die während der Wärmebewegung in ständigem Wechsel auch vorhanden sind. Jede augenblickliche Verteilung sollte aus der vorhergehenden nach den Gesetzen der Mechanik folgen; es fehlt aber zur Anwendung dieser Gesetze die Kenntnis der Einzelheiten der Kräfte, welche die Moleküle aufeinander ausüben, selbst bei den Stößen einatomiger Gasmoleküle. Daher schien es zu möglichstem Eindringen in das Gewirre der Molekularbewegungen das Gegebene, die Wahrscheinlichkeiten der dabei auftretenden, genügend bekannten Zustände zu betrachten, und dies hat sich erfolgreich gezeigt.

Die wohldefinierte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses oder Zustandes ist stets gegeben durch einen Bruch. Nenner desselben ist die Gesamtzahl der beim betrachteten Vorgang möglichen Fälle; Zähler ist die Zahl derjenigen Fälle, welche das Zutreffen des Ereignisses oder Zustandes bedeuten. Die so definierte Wahrscheinlichkeit liegt daher stets zwischen 0 und 1. Bei der Betrachtung der Molekularbewegungen handelt es sich um Wahrscheinlichkeit von Lageverteilungen oder Geschwindigkeitsverteilungen oder Verteilungen der kinetischen Energien der Moleküle. Da diese Verteilungen während der Wärmebewegung in stetem Wechsel immer wieder neu entstehen, so gibt die Wahrscheinlichkeit ihres Entstehens auch das Maß für die Häufigkeit ihres Vorhandenseins.

3. Wichtig wurde die Behandlung stufenweiser („diskreter") Verteilung der kinetischen Energien unter den Molekülen; man kann, von dieser ausgehend, durch beliebige Verkleinerung der Stufen auch zu kontinuierlicher Verteilung übergehen. Ein erläuterndes Beispiel für die Wahrscheinlichkeiten bei stufenweiser Verteilung ist folgendes. Es seien in einem Gefäß nur 7 Gasmoleküle vorhanden; die Stufengröße der Energien, welche sie anzunehmen und bei den Stößen auszutauschen vermögen, sei ε; die vorrätige Gesamtenergie, entsprechend dem Wärmeinhalt des Gases, sei $7\,\varepsilon$. Die vorhandenen Möglichkeiten der Verteilung dieser Gesamtenergie unter die 7 Moleküle können in so einfachem Fall ziemlich leicht aufgezählt werden. Es können beispielsweise die 7 Moleküle der Reihe nach die Energien

0	0	0	0	0	0	7ε	haben, oder
0	0	0	0	0	ε	6ε	oder
0	0	0	0	ε	ε	5ε	oder
0	0	0	ε	ε	2ε	3ε	oder
ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	usw.,

was jedesmal zusammen die verlangten 7ε gibt. Jede solche Möglichkeit kann eine „Komplexion" genannt werden. Es sind deren im gewählten Beispielsfall im ganzen 15 aufzählbar. Diese 15 Komplexionen erschöpfen aber noch nicht alle vorhandenen Möglichkeiten. Es ist nämlich die Reihenfolge, in welcher die 7 Moleküle mit ihren Energien hier aufgeschrieben sind, willkürlich gewählt, und es fehlt noch die Berücksichtigung der anderen möglichen Verteilungen der nämlichen, je einer Komplexion zugehörenden Energien auf die einzelnen, bestimmten Moleküle, die mit Nummern 1 . . . 7 versehen sein könnten. Es kann z. B. bei der zweiten Komplexion, mit ε und 6ε, auch die Verteilung

$$\varepsilon \quad 6\varepsilon \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

vorkommen, und es sind im ganzen sogar 42 solche verschiedene Möglichkeiten bei dieser Komplexion vorhanden. Man bezeichnet diese Möglichkeiten auch als „Permutationen" der Komplexion[1]). Bei der 1. Komplexion sind es, wie leicht zu sehen, nur 7 Möglichkeiten; bei der letzten ist nur die eine Möglichkeit vorhanden; dagegen gibt die 3. Komplexion 105, die 4. sogar 420 verschiedene Permutationen. Diese Möglichkeiten innerhalb je einer Komplexion sind zwar für den Molekularzustand des Gases gleichgültig, weil die vorhandenen Moleküle alle untereinander gleich sind; in dem zu betrachtenden Wechsel der Zustände kommt es aber auf jedes Molekül einzeln an, denn an den einzelnen Molekülen vollziehen sich diese Wechsel, und dafür bedeuten die Möglichkeiten innerhalb der Komplexionen Verschiedenes. Wir nehmen bei diesen Wechseln das Auftreten jeder der möglichen Energiegrößen, die ein betrachtetes Molekül annehmen kann (im Beispiel 0, ε, 2ε, 3ε, ... 7ε), als gleich oft vorkommend an. Ob dies der Wirklichkeit entspricht, kann man nicht vorher wissen; der hier weiter anzugebende Verfolg dieser Annahme zeigt aber, daß sie — in den bisherigen Anwendungen — der Wirklichkeit so gut entspricht als nur zu erwarten war (5, 8, 10)[2]).

4. Es kommt demnach jede der möglichen Permutationen aller Komplexionen gleich oft vor, d. h. jede hat die gleiche Wahrscheinlichkeit des Auftretens, und die Größe dieser Wahrscheinlichkeit ist 1 geteilt durch die Anzahl sämtlicher Permutationen zusammengenommen, welche Anzahl im Beispielsfall 1716 ist. Die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Komplexionen ist demnach aber verschieden je nach der Anzahl der Permutationen, die sie gestatten. So hat im Beispiel die oben als erste aufgeschriebene Komplexion die Wahrscheinlichkeit $^{7}/_{1716}$, die zweite $^{42}/_{1716}$, die dritte $^{105}/_{1716}$, die vierte $^{420}/_{1716}$, die letzte $^{1}/_{1716}$. Im Verhältnis dieser Wahrscheinlichkeiten werden die verschiedenen Komplexionen, d. i. die verschiedenen Molekularzustände des Gases verschieden häufig vorkommen.

Man hat hiermit schon einen wertvollen Einblick in die Möglichkeiten der Wärmebewegung eines Körpers. Im Beispielsfalle des Gases mit 7 Molekülen, das bei gleichbleibendem Volum dauernd gleiche Temperatur und gleichen Druck behalten wird, weil die gleiche mittlere kinetische Energie der Moleküle erhalten bleibt, weiß man nun, daß dieser äußerlich gleichbleibende Zustand innerlich 15 verschiedene Möglichkeiten hat, die abwechselnd eintreten, entsprechend den 15 Komplexionen, und man weiß auch, wie häufig jede einzelne dieser Komplexionen vorkommt, deren jede eine mögliche augenblickliche Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle darstellt; jede kommt nach Maßgabe ihrer Wahrschein-

---

[1]) Es gibt Rechenregeln zur Feststellung der Anzahlen der jeweils möglichen Permutationen.

[2]) Dabei ist bemerkenswert, daß ε zunächst Stufe der kinetischen Energie fortschreitender Bewegung ist, dann aber (10) Stufe von Schwingungsenergie.

lichkeit vor. Ist $\mathfrak{P}$ die Zahl der möglichen Permutationen einer bestimmten Komplexion und J die Gesamtzahl der Permutationen aller möglichen Komplexionen, so ist die Wahrscheinlichkeit W des Auftretens der betreffenden Komplexion $W = \mathfrak{P}/J$, und die Wärmebewegung besorgt es selbst, daß die Häufigkeit der Komplexionen proportional W sich einrichtet.

5. Dieses Ergebnis gilt für beliebig große Molekülzahlen; das betrachtete Beispiel mit 7 Molekülen sollte nur den Hauptgedankengang der Untersuchung erläutern. Es kommt nun auf den Übergang an zu dem, den gewöhnlichen Körpern angepaßten Falle einer außerordentlich großen Molekülzahl mit entsprechend beträchtlichem Gesamtinhalt kinetischer Energie bei beliebig kleinen Energiestufen. Dieser Übergang erfordert verwickelte Rechnungen, ohne daß aber neue Gedanken hinzutreten. Das Ergebnis ist, daß die Unterschiede der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen, dann äußerst zahlreichen Komplexionen sehr groß werden, indem viele Komplexionen dann eine äußerst kleine Wahrscheinlichkeit und also Häufigkeit erhalten, während eine bestimmte Gruppe von Komplexionen größter Wahrscheinlichkeit dann ganz vorwiegend vorhanden sein wird. Dies ergibt eine bestimmte durchschnittliche Geschwindigkeitsverteilung für die Moleküle, die infolge der Wärmebewegung sich einstellt und die dann bei allem Wechsel der Einzelgeschwindigkeiten dauernd bestehen bleibt. Diese Geschwindigkeitsverteilung ist dieselbe, welche für Gase auch aus den Stoßgesetzen sich ergibt (W 88) und welche bei Entwickelung der kinetischen Gastheorie und Vergleichung ihrer Folgerungen mit der Erfahrung (W 88 — 112) in den Hauptzügen nachprüfbar war und Übereinstimmung mit der Wirklichkeit zeigte. Dies ist ein Nachweis der Richtigkeit der oben (3) hervorgehobenen Annahme, mindestens für den Gaszustand.

6. Wie sehr gering die Wahrscheinlichkeit gewisser, von gleichförmiger Verteilung sehr abweichender Geschwindigkeitskomplexionen nach dem so gefundenen Verteilungsgesetz bei den großen Molekülzahlen wird, zeigt sich beispielsweise bei der Frage, wie lange es dauere bis in 1 cm^3 Luft von 0^0 und 1 Atm. einmal sämtliche kinetische Energie der Moleküle ganz oder auch nur vorwiegend auf ein einziges Molekül fiele (wie bei der ersten Komplexion im Beispiel der 7 Moleküle). Man findet trotz der Häufigkeit der Zustandswechsel durch die Zusammenstöße der Moleküle Zeiten, gegen welche Jahrmillionen winzig sind. Das Beispiel zeigt auch, daß Ereignisse dieser Art in der hier entwickelten Rechenweise zwar möglich, aber bei der Vielzahl der zusammenwirkenden Moleküle doch nach eben derselben Rechenweise gänzlich unabwartbar sind[1]).

7. Es seien nun Anfangszustände angenommen, die nach den vorhergegangenen Betrachtungen geringe Wahrscheinlichkeiten W haben. Beispielsweise seien die kinetischen Energien der Moleküle sehr ungleich unter denselben verteilt, wie es bei einem Körper mit endlichen Temperaturstufen der Fall ist oder, ganz allgemein: wie es bei nicht umkehrbaren Vorgängen der Fall ist (W 249, 250). Solche Zustände werden unter der Wirkung der Wärmebewegung der Moleküle nicht bestehen bleiben, sondern sie werden sich so ändern, daß sie Zuständen größerer Wahrscheinlichkeit Platz machen, solange bis die größte mögliche Wahrscheinlichkeit erreicht ist; denn es ist nach dem mindestens bei Gasen Bestätigten die Eigenheit der Kraftwirkungen der Moleküle, Zustände möglichst großer Wahrscheinlichkeit $W = \mathfrak{P}/J$ hervorzubringen (4). Eben diese Eigenschaft wie W, selbsttätig bis zum größten möglichen Wert zu wachsen, hat aber auch die Entropie S (Anh. W IV, 7), und dies zeigt einen festen Zusammenhang von S und W an. Ein-

---

[1]) Nach Stoßüberlegungen wäre überhaupt nicht zu sehen, wie so extrem einseitige Verteilungen zustande kommen sollten.

fache Proportionalität beider ist nicht möglich, weil die Entropie nach ihrer Definition (Anh. W IV, 4) Summe der Entropien der Teile des betrachteten Körpers ist, Wahrscheinlichkeiten aber nicht durch Addition, sondern durch Multiplikation sich zusammensetzen[1]). Im einfachsten Falle könnte daher die Entropie eines Körpers proportional dem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit seines inneren Zustandes sein, so daß

$$S = k \cdot \log W + \text{Konst.} \qquad 7)$$

k ist dabei die Proportionalitätskonstante; die addierte Konstante ist notwendig, weil immer nur Entropieunterschiede feststellbar sind (Anh. IV, 5). Beide Konstanten müßten bei allen Zustandsübergängen des betrachteten Körpers ungeändert bleiben[2]).

8. Dieser Zusammenhang zwischen S und W ist bei Gasen nachprüfbar, wo sowohl $W = \mathfrak{P}/J$ (4) als auch $S = \int dQ/T$ berechenbar ist, W nach den angegebenen Gedanken und S durch die bekannten Eigenschaften der Gase, welche T als Funktion aufgenommener Wärmemengen Q für das Integral liefern. Man findet bei Ausführung der Rechnung Gültigkeit des Zusammenhanges Gl. 7, und es ergibt sich dabei auch die Konstante k. Sie hängt zusammen mit der Molekülzahl in der Raumeinheit der Gase. Es ist

$$k = \frac{1}{N} \cdot \frac{pV}{T}, \qquad 8)$$

wobei N die Zahl der Gasmoleküle im Volum V beim Druck p und bei der absoluten Temperatur T ist. k ist daher aus der Zahl N_0, die auf 1 Atm. und 0°C sich bezieht (W 102, 104), unmittelbar berechenbar. Damit ist k, wie N_0, eine für alle Fälle gemeinsam geltende, allgemeine Naturkonstante. Es ist daher zu denken, daß Gl. 7 mit dieser Konstanten k nicht nur für Gase, sondern auch für die anderen Aggregatzustände gelten werde, und dies ist bei ihrer Anwendung (10) auch bestätigt. Kann k aus Beobachtungen irgendwelcher Art gewonnen werden, so ist danach auch N_0 aus denselben Beobachtungen berechenbar (10).

9. Zu bemerken ist, daß bei Anwendungen der Gl. 7 an Stelle von W auch $\mathfrak{P}$ gesetzt werden kann, weil $W = \mathfrak{P}/J$ ist (4) und J bei den zu betrachtenden Zustandsänderungen eines gegebenen Körpers ungeändert bleibt, so daß nur die addierte Konstante der Gleichung 7 beeinflußt wird[3]).

Ganz allgemein ist danach bei Anwendung der Gl. 7 irgendein Proportionalmaß der Wahrscheinlichkeit oder Häufigkeit an Stelle von W einsetzbar, so daß man W für die Gleichung überhaupt als „Wahrscheinlichkeits maß" bezeichnen könnte[4]).

10. Eine besonders wichtig gewordene Anwendung hat Gl. 7 bei der Untersuchung der Strahlung des schwarzen Körpers gefunden; die Gleichung ermöglichte das Verstehen der eigentümlichen spektralen Intensitätsverteilung dieser Strahlung (W, Gl. 178) auf Grund der Annahme stufenweiser Energieverteilung unter den die Strahlung aussendenden Oszillatoren (W 180).

---

[1]) Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses 1/a, die eines zweiten Ereignisses 1/b, so ist, nach Definition (2), die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens beider Ereignisse 1/ab.

[2]) Gl. 7 ist „Boltzmann's Gleichung" zu nennen.

[3]) Kommt es auf die Größenermittelung dieser Konstante an, so kann die Kenntnis benutzt werden, daß die Entropie eines Körpers nach ihrer Definition bei $T = 0$ Null werden muß, weil dann dem Körper keine Wärme mehr entzogen werden kann (vgl. 1. Note zu Anh. W IV, 5).

[4]) Einsetzung der Wahrscheinlichkeit selbst, die stets kleiner als 1 ist, würde den Logarithmus negativ machen, so daß positive Entropien immer eine große addierte Konstante erforderten.

Diese Oszillatoren nehmen ihre Energie aus dem Wärmeinhalt des Körpers (W 160), man kann daher auch mit der Entropie der Oszillatoren rechnen, indem man ihre Energien als Wärmemengen betrachtet.

Diese Entropie der Oszillatoren ergibt sich nach der Definitionsgleichung der Entropie (Anh. IV, 4) aus den der Erfahrung entnommenen Strahlungsgesetzen des schwarzen Körpers, nämlich dem Gesetz der Gesamtstrahlung (W 175) und dem Verschiebungssatz (W 179). Man findet so die Entropie für jede Oszillatorengruppe der Schwingungszahl n nur abhängig vom Quotienten U/n aus mittlerer Energie U des Oszillators und Schwingungszahl. Die Energie U wird dabei gleich derjenigen Energie gesetzt, welche der Oszillator in einem von der Strahlung des betrachteten Körpers erfüllten Raume (W 177) haben muß, um dauernd in abwechselnder Emission und Absorption mitzuschwingen[1]).

Man kann aber die Entropie des Oszillators auch nach Gl. 7 berechnen und zwar in verhältnismäßig einfacher Weise, weil Energiestufen von endlicher Größe ε angenommen werden, so daß die Berechnung von W nach dem Gedankengang des oben betrachteten Beispielfalles (3) erfolgt[2]). In dieser Weise ergibt sich die Entropie nur abhängig vom Quotienten U/ε.

Die Vergleichung beider Ergebnisse zeigt, daß ε proportional n sein muß, also $\varepsilon = h \cdot n$. Die Oszillatoren, das sind die Atome und Moleküle des heißen, Strahlung liefernden Körpers, ändern also ihren Energieinhalt bei der abwechselnden Energieaufnahme und -abgabe nur in Stufen ε, deren Größe mit der Schwingungszahl durch eine Konstante h verbunden ist.

Mit $\varepsilon = hn$ ist die nach Gl. 7 berechnete Entropie der Oszillatorengruppe schon in ihrer Abhängigkeit von Energie und Schwingungszahl bekannt, und die Gleichsetzung mit der nach Definition berechneten Entropie ergibt die Abhängigkeit der Energie von der Schwingungszahl und damit auch von der Wellenlänge, d.i. die Strahlungsgleichung des schwarzen Körpers, und zwar ergibt sie sich mit —1 im Nenner (W Gl. 178), womit die ganze Rechnung schon eine erste Probe an der Erfahrung bestanden hat, da die Erfahrung die Strahlungsgleichung eben mit —1 im Nenner fordert (W 180). Eine andere Probe wird ermöglicht durch das Auftreten der Konstante k aus Gl. 7 in der so berechneten Strahlungsgleichung, wonach k aus den Messungen am schwarzen Körper ermittelbar wird (vgl. 8); es liefern dabei die Messungen in der Tat den richtigen Wert für N_0 aus Gl. 8 (W 105, 181).

Das Ergebnis, die stufenweise Energieaufnahme und -abgabe der Atome und Moleküle — kurz das „quantenmäßige" Arbeiten der Atome und Moleküle —, hat noch viel weitere Erfahrungszusammenhänge gezeigt, die schon für sich allein ersichtlich wurden, so daß es bald auch ohne das in diesem Anhang V betrachtete große Gedankengebäude, das doch viel nur vermutungsweise Vereinfachung einschließt, offenbar geworden wäre (W 181, 182).

---

[1]) Man bemerkt, daß die nach außen hin allerdings Strahlung aussendenden Oszillatoren (Atome, Moleküle) im Inneren des heißen festen Körpers wohl meist durch Vermittelung der Molekularkräfte ihre Energien mit der Umgebung austauschen, und man sieht, daß vereinfachend angenommen wird, dieser Austausch wirke ebenso wie Strahlungsaustausch.

[2]) W ist im vorliegenden Falle dasselbe wie J im dort betrachteten Falle, weil hier nicht Wahrscheinlichkeiten von Einzelpermutationen oder Komplexionen in Betracht kommen, sondern das Wahrscheinlichkeitsmaß (9) dafür, daß gegebene Energie U in bestimmten Stufen ε, aber sonst beliebig, unter der gegebenen Oszillatorenzahl verteilt vorkomme.